Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 519.17

АЦИКЛИЧЕСКАЯ ПРЕДПИСАННАЯ 5–РАСКРАШИВАЕМОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАФОВ БЕЗ 4–ЦИКЛОВ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Гипотеза о предписанной ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов (О. В. Бородин и др., 2002) пока что подтверждена лишь для некоторых узких классов графов: с обхватом не менее 5 (Монтасьер, Ошам и Распо, 2006), без 4- и 5-циклов, или без 4- и 6-циклов (Монтасьер, Ванг и Распо, 2007), без 4-циклов и хордальных 6-циклов (Занг и Кзу, 2009), без 4-циклов и 3-циклов на расстоянии менее 3 (Чен и Ванг, 2008), а также без 4-циклов и пересекающихся 3-циклов (Чен и Распо, 2010). Ванг и Чен (2009) доказали, что плоские графы без 4-циклов предписанно ациклически 6-раскрашиваемы. В работе доказано, что плоский граф без 4-циклов предписанно ациклически 5-раскрашиваем, что является совместным усилением всех вышеперечисленных результатов.

Ключевые слова: граф, плоский граф, раскраска, ациклическая раскраска, предписанная раскраска.

1. Введение

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множество вершин и ребер графа G соответственно. Правильная *k-раскраска* графа G есть отображение $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $f(x) \neq f(y)$, если вершины x и y смежны в G.

Правильная вершинная раскраска графа называется *ациклической*, если каждый цикл окрашен не менее чем тремя цветами (Грюнбаум [1]). О. А. Бородин [2, 3] доказал гипотезу Грюнбаума о том, что каждый плоский граф ациклически 5-раскрашиваем, улучшив тем самым оценки 9, 8, 7 и 6, полученные Грюнбаумом [1], Митчемом [4], Альбертсоном и Берманом [5] и А. В. Косточкой [6] соответственно. Оценка 5 неулучшаема; более того, существует двудольный 2-вырожденный плоский граф, не являющийся ациклически 4-раскрашиваемым (А. В. Косточка и Л. С. Мельников [7]). Ациклическая раскраска оказалась полезной при получении результатов в задачах о других типах раскраски (см. обзор в монографиях [8, 9]).

Пусть теперь у каждой вершины v графа G имеется список $L(v)$ допустимых цветов, представленных целыми положительными числами. Говорят, что предписание L *хроматично*, если существует правильная вершинная раскраска G такая, что цвет каждой вершины v принадлежит $L(v)$. Граф G называется *предписанно k-раскрашиваемым*, если любое предписание L на G, обладающее свойством $|L(v)| \geq k$ для всех $v \in V(G)$, является хроматичным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09–01–00244, 08–01–00673).

Очевидно, что любой плоский граф предписанно 6-раскрашиваем, поскольку каждый его подграф содержит вершину степени не более 5. Томассен [10] доказал знаменитую теорему о том, что каждый плоский граф является предписанно 5-раскрашиваемым, а Фогт [11] показала, что эта оценка неулучшаема.

О. В. Бородин и др. [12] доказали, что каждый плоский граф предписанно ациклически 7-раскрашиваем, и высказали предположение, обобщающее результаты Бородина и Томассена [3, 10].

Гипотеза 1. *Каждый плоский граф предписанно ациклически* 5*-раскрашиваем.*

Однако эта гипотеза очень трудна; пока что удалось подтвердить ее только для некоторых узких классов плоских графов: для графов с обхватом не менее 5 (Монтасьер, Ошам и Распо [13]), для графов без 4- и 5-циклов, или без 4- и 6-циклов (Монтасьер, Ванг и Распо [14]), для графов без 4-циклов и без хордальных 6-циклов (Занг и Кзу [15]), для графов без 4-циклов и без 3-циклов на расстоянии менее 3 друг от друга (Чен и Ванг [16]), а также для графов без 4-циклов и пересекающихся 3-циклов (Чен и Распо [17]).

Ванг и Чен [18] доказали, что плоские графы без 4-циклов предписанно ациклически 6-раскрашиваемы. Были также получены достаточные условия ациклической 4- и 3-раскрашиваемости плоских графов (как обычной, так и предписанной). Минимальное k, при котором G является ациклически k-раскрашиваемым (предписанно ациклически k-раскрашиваемым), обозначим через $a(G)$ (соответственно через $a^l(G)$).

О. В. Бородин, А. В. Косточка и Вудал [19] показали, что если G — плоский граф с обхватом g, то $a(G) \leq 4$ при $g \geq 5$ и $a(G) \leq 3$ при $g \geq 7$. Недавно было доказано, что $a^l(G) \leq 3$ при $g \geq 7$ (О. В. Бородин и др. [20]) или если G не содержит циклов длины от 4 до 12 (О. В. Бородин [21], и, независимо, Окар и Монтасьер [22]); последний результат усилен О. В. Бородиным и А. О. Ивановой [23] запрещением циклов длины от 4 до 11.

Оценка $a^l(G) \leq 4$ доказана в следующих случаях: для $g \geq 5$ (Монтасьер [24]), для G, не содержащего 4-, 5- и 6-циклов (Монтасьер, Распо и Ванг [25]), при отсутствии 4-, 6- и 7-циклов, либо 4-, 6- и 8-циклов (Чен, Распо и Ванг [26]). О. В. Бородин [27] доказал оценку $a(G) \leq 4$ для G, не содержащего ни 4-, ни 6-циклов. О. В. Бородин, А. О. Иванова и Распо [28] дали совместное обобщение результатов из [24–27], доказав оценку $a^l(G) \leq 4$ при отсутствии 4-циклов и треугольных 6-циклов (т. е. 6-циклов, смежных с 3-циклами).

Кроме того, Монтасьер, Распо и Ванг [25] доказали, что $a^l(G) \leq 4$ для любого плоского графа без 4-, 5- и 7-циклов, или без 4-, 5- и пересекающихся 3-циклов, тогда как Чен и Распо [29] доказали это же для G, не имеющего ни 4- и 5-циклов, ни 8-циклов с треугольными хордами. О. В. Бородин [30] доказал $a(G) \leq 4$ для G без 4- и 5-циклов. Перечисленные выше результаты из [13, 25, 29, 30] улучшены О. В. Бородиным и А. О. Ивановой в [31], где доказано, что каждый плоский граф без 4- и 5-циклов предписанно ациклически 4-раскрашиваем.

Целью данной работы является

Теорема 1. *Каждый плоский граф без* 4*-циклов предписанно ациклически* 5*-раскрашиваем.*

Очевидно, что теорема 1 — совместное усиление упомянутых выше результатов из [13–18].

2. Доказательство теоремы 1

Предположим, что граф G с предписанием L — наименьший по числу вершин контрпример к теореме 1. Очевидно, что G связен и не содержит 1-вершин. Зафиксируем укладку графа G на плоскости; таким образом, все грани графа G определены.

Формулу Эйлера $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$ перепишем в виде

$$\sum_{x \in V(G)} (2d(x) - 6) + \sum_{x \in F(G)} (d(x) - 6) = -12, \tag{1}$$

где $F(G)$ — множество граней графа G, а $d(x)$ — степень вершины или ранг грани $x \in V(G) \cup F(G)$.

Пусть *начальные заряды* каждой вершины $v \in V(G)$ и каждой грани $f \in F(G)$ равны $\mathrm{ch}(v) = 2d(v) - 6$ и $\mathrm{ch}(f) = d(f) - 6$ соответственно. Основываясь на структурных свойствах графа G, сначала дадим правила перераспределения зарядов, приводящие к финальному заряду ch^* такому, что

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \mathrm{ch}^*(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \mathrm{ch}(x) = -12.$$

Затем получим противоречие, доказав, что $\mathrm{ch}^*(x) \geq 0$ для каждого $x \in V(G) \cup F(G)$.

2.1. Структурные свойства минимального контрпримера. Вершину или ребро назовем *треугольными*, если они инцидентны 3-грани. Очевидно, в G нет треугольных 2-вершин. Число 3-граней, инцидентных вершине v, обозначим через $\tau(v)$. Понятно, что для любой v выполняется неравенство $\tau(v) \leq \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor$; в частности, 3-вершина инцидентна не более чем одной 3-грани.

Треугольную 3-вершину, соединенную с v нетреугольным ребром, назовем *плохим соседом* вершины v, а число плохих соседей вершины v обозначим через $\beta(v)$.

Вершину степени не менее k или не более k будем называть k^+- или k^--*вершиной* соответственно и такое же обозначение будем использовать для граней. Через $\nu_2(v)$ обозначим число 2-вершин, смежных с v, а через $\varphi_6(v)$ — число 6^+-граней, инцидентных вершине v.

Вершину v назовем *бедной*, если $d(v) \leq 3$ или $d(v) = 4$, а $\tau(v) = 2$, все остальные вершины — *богатыми.* (Далее на всех рисунках бедные вершины изображены белыми, а богатые — черными кружками.) *Бедной* назовем 3-грань, инцидентную двум бедным 4-вершинам. Назовем 3-грань *слабой*, если она инцидентна 3-вершине, и *плохой*, если она является слабой и инцидентна двум бедным вершинам. Не являющуюся плохой 3-грань будем называть *хорошей.*

Иногда 3-грань uvw будем называть $(d(u), d(v), d(w))$-*гранью.* Пусть $\tau_{3,t}(v)$, где $3 \leq t \leq 4$, — число плохих $(3, t, d(v))$-граней, инцидентных вершине v. Положим $\tau_b(v) = \tau_{3,3}(v) + \tau_{3,4}(v)$ и $\tau_g(v) = \tau(v) - \tau_b(v)$.

5-Грань $v_1 \dots v_5$ является *специальной для вершин* v_3 *и* v_5, если v_1 и v_2 — нетреугольные 3-вершины.

Лемма 1. *Для G справедливы следующие свойства* (рис. 1)*:*
(a) [14] *нет* 2*-вершины, смежной с* 4^-*-вершиной;*
(b) [32] *нет* 4^-*-вершины, имеющей плохого соседа;*
(c) [19, 24] *нет* 3*-вершины, смежной с двумя* 3*-вершинами;*
(d) [14] *нет ни* $(3, 4^-, 4^-)$*-, ни* $(3, 3, 5)$*-граней;*

(e) *нет треугольной 4-вершины, смежной с двумя нетреугольными 3-вершинами;*

(f) *нет такой $(3,4,5)$-грани, 4-вершина которой смежна с нетреугольной 3-вершиной;*

(g) *нет $(3,4,5)$-грани, 4-вершина которой была бы бедной;*

(h) *нет $(4,4,4)$-грани, инцидентной бедной вершине.*

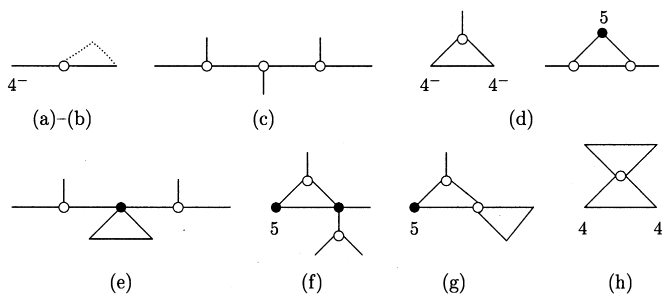

Рис. 1. Сводимые конфигурации в лемме 1.

Доказательство. Обозначим вершины, смежные с 4-вершиной v, через v_1, v_2, v_3, v_4 по часовой стрелке, и пусть v инцидентна 3-грани v_1vv_2.

(e) Предположим, что v_i, $3 \le i \le 4$, — нетреугольная 3-вершина, смежная с v, v'_i и v''_i. Из минимальности G следует, что граф $G - v$ имеет раскраску c, удовлетворяющую списку L. Без ограничения общности предположим, что $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$.

Случай 1. $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 4$. Достаточно положить $c(v) \ge 5$.

Случай 2. $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 1$. Попытка положить $c(v) \ge 4$ оказывается неудачной только в случае, когда $\{c(v'_4), c(v''_4)\} = \{4,5\}$ и $L(v) = \{1,2,3,4,5\}$. Кроме того, можно считать, что и $L(v_4) = \{1,2,3,4,5\}$. Но это означает, что должны существовать все четыре двухцветные цепи между $\{v_1, v_2\}$ и $\{v'_4, v''_4\}$, что невозможно.

Случай 3. $c(v_3) = c(v_4) = 3$. Попытка положить $c(v) \ge 4$ не приводит к успеху, лишь если $\{c(v'_3), c(v''_3)\} = \{c(v'_4), c(v''_4)\} = \{4,5\}$, где $\{4,5\} \subset L(v)$. В этом случае, произвольно перекрасив v_3, оказываемся в случае 1 или в случае 2.

Случай 4. $c(v_3) \in \{1,2\}$ и $c(v_4) \in \{1,2\}$. Предположим, что $\{3,4,5\} \subset L(v)$. Попытка положить $c(v) \ge 3$ не годится только из-за появления двухцветных цепей. Значит, $\{3,4,5\} \subset \{c(v'_3), c(v''_3), c(v'_4), c(v''_4)\}$. Но тогда если, скажем, $\{c(v'_3), c(v''_3)\} = \{3,4\}$, то, положив $c(v_3) \ge 5$, приходим к случаю 2.

(f) Предположим, что v_3 — нетреугольная 3-вершина, окруженная вершинами v, v'_3 и v''_3. Возьмем раскраску c графа $G - v_1$, где $d(v_1) = 3$, и положим $c(v'_1) = 1$, где v'_1 — смежная с v_1 вершина, отличная от v и v_2. Остается рассмотреть случай $1 \in \{c(v), c(v_2)\}$. Если $c(v) = 1$, то достаточно покрасить v_1 отлично от ее соседей и от вершин v_3 и v_4.

Без ограничения общности допустим, что $c(v_2) = 1$ и $c(v) = 2$. Затем предположим, что $\{3,4,5\} \subset L(v_1)$. В рассмотрении нуждается только случай, когда все цвета 3, 4 и 5 присутствуют на соседях вершины v_2. Если $6 \in L(v_2)$, то достаточно покрасить v_2 в 6. Иначе имеем $L(v_2) = \{1,2,3,4,5\}$ и полагаем $c(v_2) = 2$. Если $c(v_3) \ne c(v_4)$, то достаточно покрасить v в цвет, отличный от 1 (и не встречающийся на ее соседях).

Наконец, допустим, что $c(v_3) = c(v_4)$. Если $c(v_3') \neq c(v_3'')$, то полагаем $c(v_3) \notin \{2, c(v_4)\}$ и приходим к только что рассмотренному случаю. Если же $c(v_3') = c(v_3'')$, то можем положить $c(v) \notin \{1, 2, c(v_3), c(v_3')\}$.

(g) Рассуждаем, как в случае (f), опуская лишь последний абзац.

(h) Предположим, что существуют 3-грани vv_1v_2 и vv_3v_4, где $d(v_3) = d(v_4) = 4$, а вершины v_i, $3 \leq i \leq 4$, окружены вершинами v, v_{7-i}, v_i' и v_i''. Возьмем раскраску c графа $G - v$ и допустим, что $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$. Мы легко раскрасим v, если $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 4$.

Случай 1. $c(v_3) = 3$ и $c(v_4) = 1$. Без ограничения общности можем считать, что $\{4, 5\} \subset L(v)$; значит, должны существовать $(4,1)$- и $(5,1)$-цепи, соединяющие $\{v_4', v_4''\}$ с v_1. Если $6 \in L(v_4)$, то достаточно положить $c(v_4) = 6$. Иначе $L(v_4) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, стало быть, можем положить $c(v_4) = 2$ и покрасить v в 4 или 5 благодаря конфликту между двухцветными цепями, соединяющими $\{v_4', v_4''\}$ и $\{v_1, v_2\}$.

Случай 2. $c(v_3) = 2$ и $c(v_4) = 1$. Предположим, что $\{3, 4, 5\} \subset L(v)$; тогда без ограничения общности считаем, что $c(v_3') = 3$, $c(v_3'') = 4$ и $c(v_4') = 5$. Полагая $c(v_3) \geq 5$, приходим к случаю 1. $\square$

Лемма 2. *Пусть $d(v) = 5$. Тогда (рис. 2)*

(a) [14, 16] *$\nu_2(v) \leq 1$, причем если $\nu_2(v) = 1$, то v не смежна ни с одной треугольной 3-вершиной;*

(b) [17] *$\beta(v) \leq 3$, причем если $\beta(v) = 3$, то $\tau(v) = 0$;*

(c) *если v инцидентна бедной 3-грани и $\nu_2(v) = 1$, то $\tau(v) = 1$;*

(d) *если v инцидентна бедной 3-грани и $\beta(v) = 2$, то v не смежна с нетреугольной 3-вершиной;*

(e) *если v инцидентна бедной 3-грани и $\beta(v) = 1$, то v не инцидентна слабой 3-грани;*

(f) *если v инцидентна двум бедным 3-граням, то $\beta(v) = 0$.*

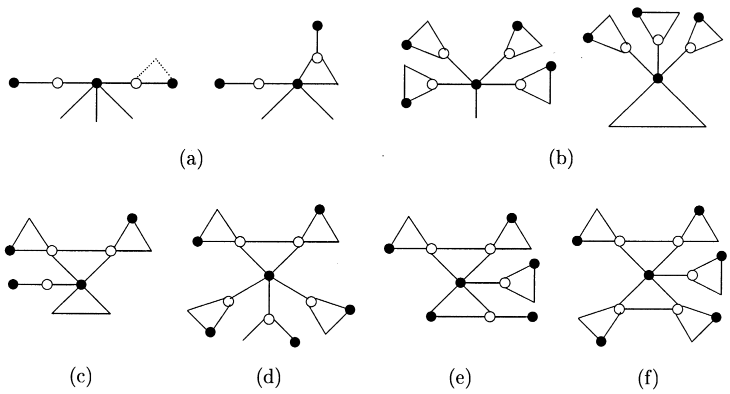

Рис. 2. Сводимые конфигурации в лемме 2.

Доказательство. Обозначим соседей вершины v через $v_1, \ldots, v_5$.

(c) Предположим, что $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = d(v_3) = 4$ и существуют бедная 3-грань vv_2v_3 и 3-грань vv_4v_5. Возьмем раскраску c графа $G - v_1$. Предположив, что $L(v_1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, и принимая во внимание симметрию, мы не сможем покрасить v_1 сразу же, только если v и другой сосед вершины v_1 покрашены в цвет 1, $c(v_i) = i$ при $2 \le i \le 5$ и цвет 1 присутствует на соседях вершин v_2 и v_3, отличных от v. Мы легко продолжим раскраску, если $6 \in L(v)$; иначе мы перекрасим v в цвет 2 и положим $c(v_2) \ge 4$. Если при этом возникает двухцветный $(3, c(v_2))$-цикл, проходящий через ребро v_2v_3, то перекрашиваем вершину v_2.

(d) Предположим, что существуют бедная 3-грань vv_1v_2 и нетреугольная 3-вершина v_3, а v_4 и v_5 — плохие соседи вершины v. Через v'_i и v''_i, где $1 \le i \le 2$, обозначим соседей вершины v_i, отличных от v или v_{3-i}. Если $3 \le i \le 5$, то v'_i и v''_i — соседи вершины v_i, отличные от v.

Пусть c — раскраска графа $G - v$. Пусть $c(v_1) = 1$ и $c(v_2) = 2$, а $\{3,4,5\} \subset L(v)$. Также мы можем считать, что $c(v_3) \notin \{4,5\}$. Отметим следующие два факта.

$(\star)$ Если, скажем, цвет 4 присутствует не более одного раза на $\{v'_4, v''_4, v'_5, v''_5\}$ и избегает $\{v'_3, v''_3\}$, то достаточно положить $c(v) = 4$, а затем — $c(v_5) \ge 3$, если, скажем, $4 \in \{c(v'_5), c(v''_5)\}$.

$(\star\star)$ Если цвет 4 присутствует и на $\{v'_4, v''_4\}$, и на $\{v'_5, v''_5\}$, но не на $\{v'_3, v''_3\}$, то цвет 4 присутствует и на $\{v'_1, v''_1\}$, и на $\{v'_2, v''_2\}$. Действительно, если $4 \notin \{c(v'_1), c(v''_1)\}$, то мы можем покрасить v_4 и v_5 в два разных цвета, отличных от 2.

Если $c(v'_3) \ne c(v''_3)$, то из $(\star)$ следует, что каждый из цветов 3, 4 и 5 должен присутствовать ровно дважды на $\{v'_3, v''_3, v'_4, v''_4, v'_5, v''_5\}$, поэтому мы получаем требуемое, применив $(\star\star)$ к цвету из $\{3,4,5\} \setminus \{c(v'_1), c(v''_1)\}$.

Наконец, предположим, что $c(v'_3) = c(v''_3)$, и вспомним, что $c(v_3) \notin \{4,5\}$.

Случай 1. $c(v'_3) \notin \{4,5\}$. Из $(\star)$ и $(\star\star)$ имеем $\{c(v'_i), c(v''_i)\} = \{4,5\}$, где $i \in \{1,2,4,5\}$, так что достаточно положить $c(v) \notin \{c(v_3), c(v'_3), 4, 5\}$ (и перекрасить вершину v_2, если $c(v) = 2$).

Случай 2. $c(v'_3) = 4$ и $c(v_3) \ne 3$. Заметим, что $(\star)$ и $(\star\star)$ применимы к цветам 3 и 5, т. е. $\{c(v'_i), c(v''_i)\} = \{3,5\}$ при $i \in \{1,2,4,5\}$, так что достаточно взять $c(v) = 4$.

Случай 3. $c(v'_3) = 4$ и $c(v_3) = 3$. Согласно $(\star)$ и $(\star\star)$ имеем $c(v'_i) = 5$ при $i \in \{1,2,4,5\}$. Если цвет 4 не присутствует на $\{v'_4, v''_4, v'_5, v''_5\}$, то достаточно положить $c(v) = 4$.

Итак, пусть $c(v''_4) = 4$. Это означает, что $L(v) = \{1,2,3,4,5\}$, так как иначе достаточно положить $c(v) \ge 6$, а затем $c(v_5) \ge 3$, если $c(v''_5) = c(v)$.

Теперь предположим, что еще и $c(v''_5) \ne 4$. Если $c(v''_1) \ne 4$, то мы можем положить $c(v) = 4$ и $c(v_4) \notin \{2,3,4,5\}$. Если же $c(v''_1) = c(v''_2) = 4$, то достаточно взять $c(v) = 2$.

Наконец, пусть $c(v''_4) = c(v''_5) = 4$. Положим $c(v) = 2$. В рассмотрении нуждается только случай $c(v''_2) = 1$; здесь нас устраивает $c(v_2) \notin \{1,2,5,c(v''_1)\}$.

(e) Пусть v инцидентна бедной 3-грани vv_1v_2 и 3-грани vv_4v_5 с $d(v_4) = 3$ и имеет плохого соседа v_3. Через v'_i и v''_i, где $1 \le i \le 3$, обозначим соседей вершины v_i, отличных от v и соседей вершины v, и пусть v'_4 — сосед вершины v_4, отличный от v и v_5. Возьмем раскраску c графа $G - v_3$ и допустим, что $c(v) = c(v'_3) = 4$, $c(v''_3) = 5$ и $\{1,2,3\} \subset L(v_3)$. Отметим, что если положить $c(v_3) = \alpha$, где $\alpha \le 3$, то возникает $(\alpha, 4)$-цикл. Значит, каждый из цветов 1, 2, 3 встречается на v_1, v_2, v_4, v_5. Можно считать, что $c(v_1) = 1$.

Случай 1. $c(v_2) \ge 5$, $c(v_4) = 3$ и $c(v_5) = 2$. Отметим, что $c(v_4') = 4$. Если $3 \in L(v)$, то достаточно взять $c(v) = 3$ (и перекрасить v_4). В противном случае положим $c(v_3) = 3$ и $c(v) \ge 5$.

Случай 2. $c(v_2) = 2$ и $\{c(v_4), c(v_5)\} = \{3, \beta\}$, где $\beta \ge 5$. Заметим, что цвет 4 должен встречаться как на $\{v_1', v_1''\}$, так и на $\{v_2', v_2''\}$. Если $1 \in L(v)$, то достаточно взять $c(v) = 1$, а затем перекрасить v_1, причем если цвет 2 встречается на $\{v_1', v_1''\}$, то нужно взять $c(v_1) \notin \{c(v_2'), c(v_2'')\}$. Теперь ввиду симметрии можно считать, что $\{1, 2\} \cap L(v) = \varnothing$. Тогда полагаем $c(v) \notin \{4, 5\}$.

Случай 3. $c(v_2) = 2$, $c(v_4) = 1$ и $c(v_5) = 3$. Заметим, что $c(v_4') \notin \{2, 4\}$, так как иначе перекраска $c(v_4) \ge 5$ дает случай 2. Следовательно, цвет 4 встречается на $\{v_1', v_1''\}$ и на $\{v_2', v_2''\}$. Если $2 \in L(v)$, то полагаем $c(v) = 2$ и перекрашиваем v_2 так же, как перекрашивали v_1 в случае 2. В противном случае полагаем $c(v) = \gamma$, где $\gamma \ge 6$. Теперь единственная опасность состоит в $(1, \gamma)$-цикле через v, но если он возникает, то делаем перекраску $c(v_4) \notin \{1, 2\}$.

Случай 4. $c(v_2) = 2$, $c(v_4) = 3$ и $c(v_5) = 1$. Вариант $c(v_3) = 3$ (при $c(v) = 4$) должен создавать $(3, 4)$-цикл, и здесь берем $c(v_4) \ge 5$.

(f) Предположим, что v инцидентна бедным 3-граням vv_1v_2 и vv_3v_4 и имеет плохого соседа v_5. Через v_i' и v_i'', где $1 \le i \le 5$, обозначим соседей вершины v_i, отличных от v и соседей вершины v.

Пусть c — раскраска графа $G - v_5$, причем $c(v) = c(v_5') = 1$, $c(v_5'') = 2$ и $\{3, 4, 5\} \subset L(v_5)$. Благодаря симметрии можем также считать, что $c(v_1) = 3$, $c(v_2) = 4$, $c(v_3) = 5$, $c(v_4) \in \{2, 3, 6\}$ и цвет 1 встречается на каждой паре вершин $\{v_i', v_i''\}$, где $2 \le i \le 3$.

Случай 1. $c(v_4) \in \{2, 6\}$. Заметим, что цвет 1 присутствует и на $\{v_1', v_1''\}$. Если $3 \in L(v)$, то достаточно положить $c(v) = 3$ с дополнительным требованием, чтобы $c(v_1) \notin \{c(v_2'), c(v_2'')\}$ в случае, когда $4 \in \{c(v_1'), c(v_1'')\}$. Теперь ввиду симметрии считаем, что $\{3, 4\} \cap L(v) = \varnothing$, и берем $c(v) \ge 7$.

Случай 2. $c(v_4) = 3$. Можно считать, что $c(v_1') = 1$. Сначала рассмотрим случай $6 \in L(v)$. При $c(v) = 6$ должна возникать $(3, 6)$-цепь $\dots v_1vv_4 \dots$, значит, $c(v_1'') = 6$ и $6 \in \{c(v_4'), c(v_4'')\}$. Взяв $c(v_1) \in L(v_1) \setminus \{1, 3, 4, 5, 6\}$, достигаем цели всегда, кроме случая, когда $L(v_1) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Если так, то положим $c(v_1) = 5$. Теперь видим, что $\{c(v_3'), c(v_3'')\} = \{1, 6\}$. Нам было бы достаточно взять $c(v_3) \notin \{1, 3, 4, 5, 6\}$, поэтому пусть $L(v_3) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Из варианта $c(v_3) = 4$ следует, что $\{c(v_2'), c(v_2'')\} = \{1, 6\}$, и теперь можем положить $c(v) \notin \{1, 2, 3, 6\}$ и $c(v_1) = c(v_4) = 3$, а затем покрасить v_2 и v_3.

Таким образом, можем считать, что $L(v) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Положим $c(v) = 4$, а затем дополнительно потребуем, чтобы $c(v_2) \notin \{c(v_1'), c(v_1'')\}$, если $3 \in \{c(v_2'), c(v_2'')\}$. Единственная опасность — это $(3, 4)$-цепь $\dots v_1vv_4 \dots$, поэтому будем считать, что $c(v_1'') = 4$ и $4 \in \{c(v_4'), c(v_4'')\}$. Беря теперь $c(v) = 5$ вместо $c(v) = 4$, мы видим, что $3 \in \{c(v_3'), c(v_3'')\}$. Но если так, то можно положить $c(v) = 2$ и $c(v_5) \ge 5$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $d(v) = 6$. Тогда*

(a) *если $\nu_2(v) = 2$, $\tau_{3,3}(v) = 0$ и v инцидентна либо двум слабым хорошим 3-граням, либо слабой хорошей 3-грани и бедной 3-грани, то $\varphi_6(v) \ge 1$ (рис. 3);*

(b) *если $\tau(v) = 1$, $\nu_2(v) = 3$ и v имеет нетреугольного 3-соседа, то $\varphi_6(v) \ge 1$ (рис. 4);*

(c) *если v принадлежит слабой 3-грани, $\nu_2(v) = 3$ и v смежна с 4^+-вершиной по нетреугольному ребру, то $\varphi_6(v) \ge 1$;*

(d) *если* $\tau(v) = 0$, $\nu_2(v) = 4$ *и* v *имеет нетреугольного* 3*-соседа, а также* 4^+*-соседа, то* $\varphi_6(v) \geq 1$;

(e) *если* v *имеет двух нетреугольных* 3*-соседей и* $\nu_2(v) \geq 2$, *то*

(1) *из* $\nu_2(v) = 4$ *следует, что* $\varphi_6(v) \geq 2$;

(2) *из* $\nu_2(v) = 3$ *и* $\beta(v) = 1$ *следует, что* $\varphi_6(v) \geq 1$;

(3) *из* $\nu_2(v) = 2$ *и* $\tau_{3,3}(v) = 1$ *следует, что* $\varphi_6(v) \geq 1$;

(f) *если* $\tau_g(v) = 1$ *и* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 4$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 3$; *более того, если* $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v) = 3$, *то хорошая* 3*-грань при* v *не является слабой* (*рис.* 5);

(g) *если* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 5$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 4$ (*рис.* 6(g));

(h) $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) \leq 5$ (*см. рис.* 6(h)).

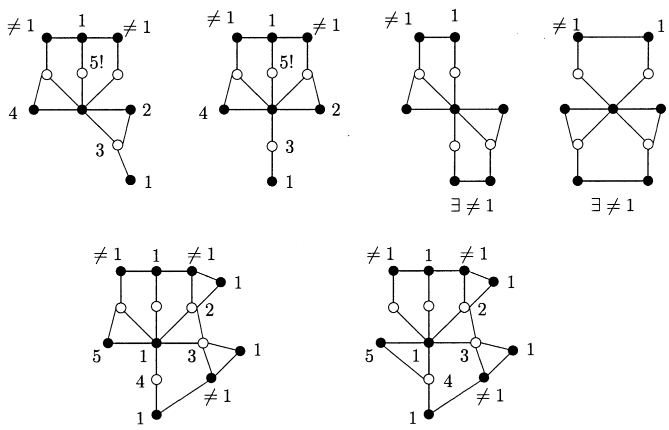

Рис. 3. Конфигурации в лемме 3(a).

Доказательство. Пусть $v_1 \dots v_6$ — соседи вершины v в циклическом порядке, где $d(v_1) = 2$ или v_1 — плохой сосед вершины v. Если $d(v_j) = 2$ или существует 3-грань $v_j v v_{j+1}$, где $d(v_j) = 3$, то через v'_j обозначим соседа вершины v_j, отличного от v и v_{j+1}. Если v_j — нетреугольная 3-вершина, то через v'_j и v''_j обозначим соседей вершины v_j, отличных от v.

В тех случаях, когда v смежна хотя бы с одной 2-вершиной, будем всегда брать раскраску c графа $G - v_1$, где $d(v_1) = 2$, и предполагать, что $c(v) = c(v'_1) = 1$ и $\{2, 3, 4, 5\} \subset L(v_1)$. Следует рассматривать лишь случай, когда, положив $c(v_1) = i$, где $2 \leq i \leq 5$, получаем $(1, i)$-цикл.

Используем одну идею из [19], которую в простейшем виде можно представить следующим образом. Предположим, что $d(v_j) = d(v_{j+1}) = 2$ и грань $v'_j v_j v v_{j+1} v'_{j+1} \dots$ есть пятиугольник, т. е. v'_j смежна с v'_{j+1}. Поскольку только одна из v'_j и v'_{j+1} может быть покрашена в 1, то лишь одна из этих вершин может принадлежать двухцветному циклу, который может возникнуть при окраске вершины v_1 в цвета 2, 3, 4 и 5. Эта идея позволит нам обнаружить при v одну или даже две 6^+-грани.

(a) Пусть T_1 и T_2 суть 3-грани при v (см. рис. 3).

Сначала предположим, что T_1 и T_2 слабые и хорошие, а это значит, что v имеет двух богатых соседей и двух треугольных 3-соседей. Имеем одну из следующих ситуаций: среди вершин v_i существуют либо три последовательные 3^--вершины v_6, v_1 и v_2, либо существуют две пары последовательных 3^--вершин. В обоих случаях среди четырех вершин v'_j не менее двух окрашены отлично от

1, но это означает, что мы можем благополучно покрасить v_1 в цвет, которого нет на богатых соседях вершины v.

Теперь предположим, что T_1 — слабая хорошая 3-грань, T_2 бедная, $d(v_6) \le 3$ и $d(v_m) \le 3$, где $m \ne 6$. Если $m = 2$, то действуем, как в предыдущем абзаце, поэтому ввиду симметрии будем считать, что $m = 4$. Имеем $c(v'_6) \ne 1$, $c(v'_4) = 1$ и $c(v_i) = i$, где $2 \le i \le 5$.

Случай 1. $d(v_6) = 3$ (см. рис. 3, конфигурация слева в нижнем ряду). Сначала допустим, что $c(v'_6) \ne 5$. Положим $c(v) \in \{4, 6\}$ и перекрасим v_4, если $c(v) = 4$. Если получилось $c(v) \ne c(v'_6)$, то достаточно взять $c(v_6) \notin \{c(v), c(v'_6), 5\}$. Пусть $c(v) = c(v'_6)$; тогда положим, что $c(v_6) \notin \{2, 3, 5, c(v)\}$.

Допустим, что $c(v'_6) = 5$. Если $L(v) \ne \{1, 2, 3, c(v_6), 5\}$, то достаточно положить $c(v) \in L(v) \setminus \{1, 2, 3, c(v_6), 5\}$. Пусть $L(v) = \{1, 2, 3, c(v_6), 5\}$. Положим $c(v) = 2$. Это не приводит к немедленному успеху лишь если $3 \in \{c(v'_2), c(v''_2)\}$. Аналогично показывается, что $2 \in \{c(v'_3), c(v''_3)\}$. Теперь можно положить $c(v_2) \in L(v_2) \setminus \{c(v'_2), c(v''_2), c(v'_3), c(v''_3)\}$, сохраняя $c(v) = 2$ и $c(v_3) = 3$.

Случай 2. $d(v_6) = 2$ (конфигурация справа в нижнем ряду на рис. 3). Положим $c(v) \in \{4, 6\}$ и перекрасим v_4, если $c(v) = 4$. Если получилось $c(v) \ne c(v'_6)$, то достаточно перекрасить v_6. Если же $c(v) = c(v'_6)$, то положим $c(v_6) \notin \{2, 3, 5, c(v)\}$.

(b) Допустим, что v окружена пятью 5-гранями и 3-гранью (см. рис. 4(b)). Если $d(v_6) = d(v_2) = 2$, то $c(v'_6) \ne 1$ и $c(v'_2) \ne 1$, т. е. через вершину v (и v_3, v_4 и v_5) может проходить не более трех двухцветных циклов, так что мы можем покрасить v_1.

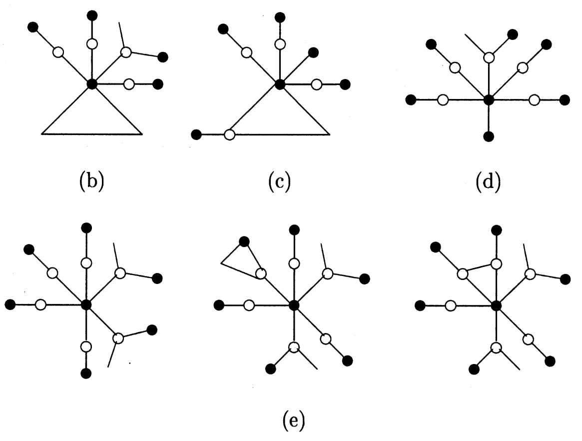

Рис. 4. Конфигурации в лемме 3(b)–(e).

Если $d(v_6) = 2$, а v_2 — нетреугольная 3-вершина, то $c(v'_6) \ne 1$ и, скажем, $c(v'_2) \ne 1$. Поскольку случай 1 уже не имеет места, то $d(v_3) = 2$. Заметим, что по крайней мере одна из вершин v''_2 и v'_3 не покрашена в 1, поэтому у нас снова есть свободный цвет для v_1.

(c) Если $d(v_6) = 2$, а v_2 есть либо треугольная 3-вершина, либо 2-вершина (см. рис. 4(c)), то $c(v'_6) \ne 1$ и $c(v'_2) \ne 1$, так что мы действуем, как выше. Если же $d(v_6) = d(v_4) = 2$, а v_3 есть треугольная 3-вершина, то достаточно заметить, что $c(v'_6) \ne 1$ и либо $c(v'_3) \ne 1$, либо $c(v'_4) \ne 1$.

(d) Можно считать, что $d(v_6) = 2$, а $d(v_2) \le 3$ (см. рис. 4(d)). Здесь $c(v_6') \ne 1$ и $c(v_2') \ne 1$. Если не существует $(1, i)$-цикла, проходящего через v_2, то доказывать нечего, стало быть, считаем, что $d(v_2) = 32$ и $c(v_2'') = 1$. Это означает, что $d(v_5) \ge 4$, поэтому $d(v_3) = d(v_4) = 2$ и, таким образом, хотя бы одна из v_3 и v_4 не окрашена в 1.

(e) (см. рис. 4(e)). Будем говорить, что 2-вершина либо 3-вершина v_i из $(3, 3, d(v))$-грани *заблокирована* (с точки зрения прохождения двухцветных циклов через v при $c(v) = 1$), если $c(v_i') \ne 1$. Плохой сосед или нетреугольный 3-сосед v_i вершины v *заблокирован*, если $c(v_i') \ne 1 \ne c(v_i'')$. Утверждение леммы 3(e) будет доказано, если по меньшей мере два соседа вершины v будут заблокированы, но предположим противное.

Для доказательства п. (e)(1) заметим, что сначала каждый заблокированный сосед (если он существует) дает нам не более двух 5-граней, инцидентных v, а затем каждый незаблокированный 3-сосед дает дополнительно не более одной 5-грани при v (из числа тех, что не инцидентны заблокированному соседу вершины v). Понятно, что незаблокированный 2-сосед не может давать таких дополнительных 5-граней. Это значит, что всего при v имеется не более $2 + 1 + 1 = 6 - 2$ пятиугольников; противоречие.

В (e)(2) наихудшим является случай, когда ни один из 3-соседей не заблокирован (но одна из смежных 2-вершин заблокирована), и тогда при v не более $2 + 1 + 1 + 1 < 6$ граней ранга 5.

Для доказательства (e)(3) заметим, что каждый заблокированный 3-сосед v_i, входящий в $(3, 3, d(v))$-грань, создает не более одной 5-грани при v. Поэтому и здесь наихудшим является случай, когда заблокирована одна из 2-вершин, и тогда v инцидентна самое большее $2 + 1 + 1$ пятиугольникам.

Отметим, что нетрудно найти конфигурации, показывающие неулучшаемость всех трех утверждений в лемме 3(e) в терминах φ_6.

Для доказательства леммы 3(f),(g),(h) и последующих лемм 4–6 воспользуемся следующими простыми наблюдениями.

Утверждение 1. (a) *Если $d(v_1) = 2$ и $c(v) = c(v_1')$, то v_1 можно покрасить четырьмя способами.*

(b) *Если v_1 — плохой сосед для v, а $c(v) = c(v_1')$, то имеется выбор из трех цветов для v_1.*

(c) *Если $v_1 v v_2$ — 3-грань с $d(v_1) = d(v_2) = 3$, то вершины v_1 и v_2 можно покрасить без образования двухцветных цепей через ребро $v_1 v_2$, причем если еще и $c(v) = c(v_1')$, то v_1 можно покрасить тремя способами, и то же самое верно для v_2.*

(d) *Если $v_1 v v_2$ — плохая 3-грань с $d(v_1) = 3$ и $d(v_2) = 4$, то вершины v_1 и v_2 можно покрасить без образования двухцветных цепей через ребро $v_1 v_2$, причем если $c(v) = c(v_1')$ либо $c(v) = c(v_2')$, либо и то и другое вместе, то соответственно имеется выбор из трех цветов для v_1 либо для v_2, либо для обеих этих вершин.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) тривиальны.

(c) Если $c(v_1') = c(v) = c(v_2')$, то сначала можно покрасить вершину v_1 четырьмя способами, а затем v_2 тремя способами. Если $c(v_1') = c(v) \ne c(v_2')$, то сначала красим v_1 четырьмя способами, а затем красим v_2. Если $c(v) \ne c(v_1')$ и $c(v_2') \ne c(v)$, то сначала возьмем $c(v_2) \ne c(v_1')$, а затем покрасим v_1.

(d) Если $c(v_1') = c(v) = c(v_2') = 1$, то сначала красим v_2 тремя способами, а затем v_1 также тремя способами. Если $c(v_1') = c(v)$, а $c(v) \notin \{c(v_2'), c(v_2'')\}$, то сначала красим v_1 четырьмя способами, а затем красим v_2. Если $c(v_1') \neq c(v)$, а $c(v) \in \{c(v_2'), c(v_2'')\}$, то сначала красим v_2 (тремя способами), а затем берем $c(v_1) \notin \{c(v_2'), c(v_2'')\}$. Наконец, если $c(v) \notin \{c(v_1'), c(v_2'), c(v_2'')\}$, то сначала возьмем $c(v_2) \neq c(v_1')$, а затем покрасим вершину v_1. $\square$

Вернемся к доказательству леммы 3.

(f) (См. рис. 5.) Предположим, что $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v) \leq 2$ и существует хороший треугольник v_1vv_2. Пусть $W_2(v)$ — множество вершин на расстоянии 2 от v, которые соединяются с v цепями длины 2, проходящими через $\{v_3 \dots v_6\}$. Каждая вершина v_i, $3 \leq i \leq 6$, вносит вклад в v_i' из $W_2(v)$, тогда как v_i, будучи плохим соседом или 4-вершиной в плохой 3-грани, также вносит вклад в v_i''. Поскольку в нашем G нет 4-циклов, это значит, что $|W_2(v)| = \nu_2(v) + 2\beta(v) + 2\tau_{3,3}(v) + 3\tau_{3,4}(v)$.

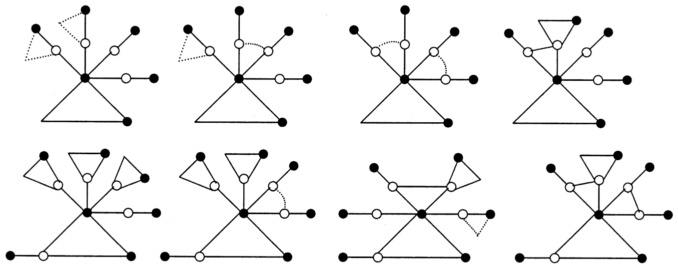

Рис. 5. К лемме 3(f).

Возьмем раскраску c графа $G - v$ и обесцветим $v_3, \dots, v_6$. Будем сначала красить v в цвет, который встречается в W_2 наименьшее число раз, а затем красить обесцвеченных соседей, используя утверждение 1. Напомним, что у нас есть по четыре свободных цвета на 2-вершинах и не менее трех цветов на остальных обесцвеченных соседях.

Сначала рассмотрим конфигурации из верхнего ряда на рис. 5. Заметим, что $|W_2(v)| \leq 3 \times 2 + 2 \times 1 = 6$. Пусть $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$ и $\{3,4,5\} \subset L(v)$. Если, скажем, цвет 3 присутствует самое большее один раз в $W_2(v)$, то полагаем $c(v) = 3$ и легко красим вершины $v_3, \dots, v_6$ согласно утверждению 1, используя цвета, отличные от 1, 2 или 3.

Иначе каждый из цветов 3, 4 и 5 присутствует в $W_2(v)$ в точности дважды. Это может иметь место, только если $\nu_2(v) = \beta(v) = 2$, и в этом случае мы можем дополнительно считать, что цвет 3 встречается на такой вершине v_i', что $d(v_i) = 2$. Возьмем $c(v) = 3$. Заметим, что мы можем покрасить эту 2-вершину v_i в последнюю очередь среди обесцвеченных соседей $\{v_3, \dots, v_6\}$ вершины v по утверждению 1, поскольку $|L(v_i) \setminus \{1,2,3\}| \geq 2$.

Теперь докажем вторую часть утверждения (f); а именно, пусть $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) = 3$ и хорошая 3-грань при v является слабой. Видим, что $W_2(v) \leq 7$. Дополняя рассуждения предыдущего абзаца, предположим, что $d(v_1) = 3$, v_1 смежна с $v_1' \notin \{v, v_2\}$, а цвета 3 и 4 встречаются ровно по два раза на множестве вершин $W_2(v)$, причем $c(v_1') \neq 3$. Пусть, скажем, $c(v_3') = c(v_4') = 3$.

Положим $c(v) = 3$. Утверждение 1 гарантирует по три допустимых цвета для каждой из вершин v_3 и v_4. Из этих троек мы должны вычеркнуть цвет 2, но не обязаны удалять цвет 1. Таким образом, на v_3 и v_4 остается по два допустимых цвета, так что мы можем выбрать $c(v_3) \neq c(v_4)$.

(g) (См. рис. 6(g).) Допустим, что $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \leq 3$, и пусть $d(v_1) \geq 4$ или v_1 есть нетреугольная 3-вершина. Теперь $W_2(v)$ определяется так же, как в (f), но для $2 \leq i \leq 6$, и имеем $|W_2(v)| \leq 8$. В отличие от (f) только $c(v_1)$ нужно удалять из троек свободных цветов. Это значит, что нам подходит любой из не менее чем четырех цветов из $L(v) \setminus \{c(v_1)\}$, который присутствует не более двух раз в $W_2(v)$. (Заметим, что это справедливо для всех $|W_2(v)| < 4 \times 3$.)

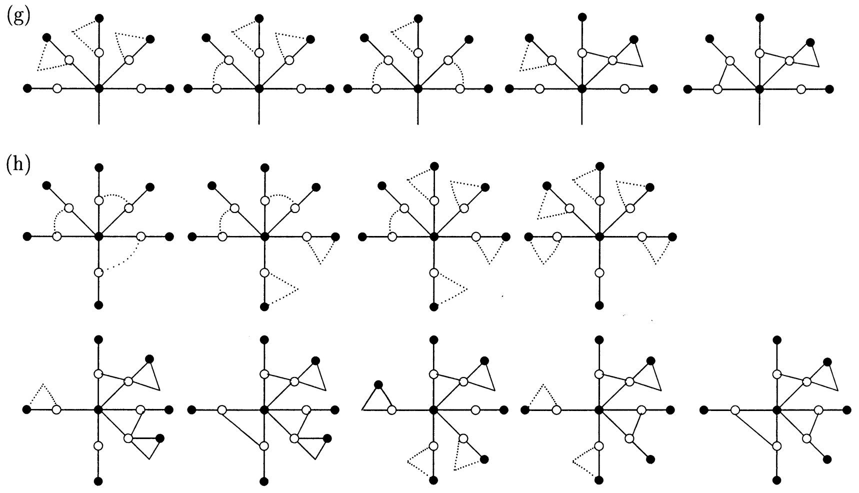

Рис. 6. Конфигурации в лемме 3(g),(h).

(h) (См. рис. 6(h).) Рассуждая точно так же, имеем больше свободы, чем в (g): подходит любой цвет $\alpha \in L(v)$, присутствующий самое большее три раза на множестве вершин $W_2(v)$, определенном на сей раз при всех $1 \leq i \leq 6$, тогда как $|W_2(v)| \leq 12 < 5 \times 4$. $\square$

Напомним, что $\tau_b(v) = \tau_{3,3}(v) + \tau_{3,4}(v)$ — число плохих 3-граней при вершине v.

Лемма 4. *Пусть* $d(v) = 7$. *Тогда*
(a) *если* $\tau_g(v) = 1$, $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 5$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 2$;
(b) *если* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 6$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 3$;
(c) *если* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 7$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 5$.

Доказательство. (a) Если $\tau_{3,4} = 0$ и $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) \leq 1$, то годятся рассуждения из доказательства леммы 3(f), поскольку $|W_2(v)| = \nu_2(v) + 2\beta(v) + 2\tau_{3,3}(v) \leq 5 + \beta(v) \leq 6$.

(b) Снова годятся рассуждения из леммы 3(g), так как $|W_2(v)| \leq 6 + 2 < 4 \times 3$.

(c) Заметим, что если $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v) \leq 4$, то $|W_2(v)| \leq 7+4 = 11 < 5\times 4$, поэтому мы можем рассуждать так же, как в доказательстве леммы 3(h). $\square$

Лемма 5. *Пусть* $d(v) = 8$. *Тогда*
(a) *если* $\tau_g(v) = 1$ *и* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 6$, *то* $\beta(v) + \tau_b(v) \geq 1$;
(b) *если* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_{3,3}(v) = 7$, *то* $\beta(v) + \tau_b(v) \geq 1$;
(c) *если* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 8$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 3$.

Доказательство оставляем читателю. $\square$

Лемма 6. *Если* $d(v) = 9$ *и* $\nu_2(v) + \beta(v) + 2\tau_b(v) = 9$, *то* $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v) \geq 2$.

Доказательство оставляем читателю. □

2.2. Перераспределение зарядов. Используем следующие правила перераспределения зарядов (рис. 7).

R0. Каждая 2-вершина получает заряд 1 от каждой смежной 5^+-вершины.

R1. Если 5^+-вершина v имеет плохого соседа x, то v отдает заряд $\frac{3}{5}$ треугольнику xyz.

R2. Каждый треугольник xyz получает следующий заряд.

(a) 2 от x, если $d(x) \geq 6$ и $d(y) = d(z) = 3$.

(b) $\frac{8}{5}$ от x и 1 от y, если $d(x) \geq 6$, y — бедная 4-вершина и $d(z) = 3$.

(c) $\frac{6}{5}$ от x и 1 от каждой из y и z, если обе они являются бедными 4-вершинами.

(d) Пусть $d(z) = 3$. Тогда

• $\frac{7}{5}$ от x и 1 от y, если $d(x) \geq 6$, а y — богатая 4-вершина;

• $\frac{6}{5}$ от каждой из вершин x и y, если x — богатая 4-вершина, смежная с тремя богатыми вершинами, а $d(z) = 5$;

• $\frac{6}{5}$ от каждой из вершин x и y, если $d(x) \geq 5$ и $d(y) \geq 5$.

(e) 1 от каждой из вершин x, y и z в остальных случаях.

R3. Если 5-грань f смежна с 3-гранью $T = xyz$ по ребру xy, где z богатая, а обе вершины x и y бедные, то T дает заряд $\frac{1}{5}$ грани f.

R4. 5-грань $f = v_1 \dots v_5$ получает от богатой вершины v_2 заряд:

(a) $\frac{2}{5}$, если обе вершины v_1 и v_3 бедные, за исключением случая, когда обе вершины v_3 и v_4 являются нетреугольными 3-вершинами, а в этом случае v_2 (как и v_5) дает грани f заряд $\frac{1}{2}$;

(b) $\frac{3}{10}$, если v_1 богатая, а v_3 бедная, за исключением случая, когда обе вершины v_3 и v_4 являются нетреугольными 3-вершинами, а в этом случае вершина v_2 (как и v_5) дает грани f заряд $\frac{2}{5}$;

(c) $\frac{1}{5}$, если обе вершины v_1 и v_3 богатые.

2.3. Проверка того, что $\mathrm{ch}^* \geq 0$ **для всех вершин и граней графа** G.

Случай 1. $v \in V(G)$. Пусть вершина v богатая. Чтобы оценить суммарный заряд, передаваемый вершиной v по правилам R0–R2 и R4, сделаем следующее усреднение, которое позволяет упростить приведенный ниже разбор вариантов.

R1*. Если у v есть плохой сосед x, то заряд $\frac{3}{5}$ от v отдается вершине x, а не 3-грани xyz.

R2*. Заряд, посылаемый 3-грани uvw по R2, распределим поровну между вершинами u и w.

R4*. Заряд, посылаемый 5-грани $f = uvwxy$ по R4, распределим между вершинами u и w следующим образом: богатая вершина получает $\frac{1}{10}$, а бедная — $\frac{3}{10}$, если она смежна с бедной вершиной, лежащей в границе грани f, и $\frac{1}{5}$ в противном случае.

Отметим, что в правиле R4* заряд $\frac{3}{10}$ фактически получает нетреугольная 3-вершина, смежная с нетреугольной 3-вершиной, лежащей в границе грани f.

Теперь все заряды от вершины v расходятся вдоль ребер к смежным вершинам. Заметим, что максимальный заряд, который уходит по ребру vx, равен

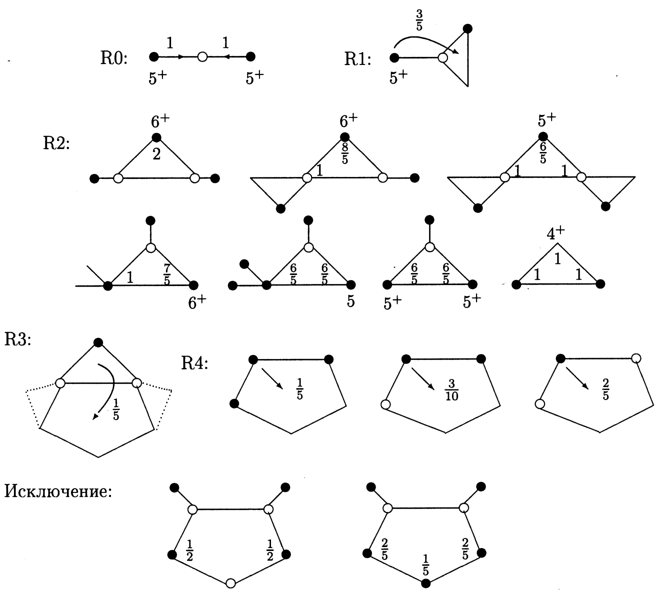

Рис. 7. Правила перераспределения зарядов.

$\frac{7}{5}$; это возможно, только если $d(x) = 2$ и x получает $2 \times \frac{1}{5}$ по R4*. Другие соседние вершины, как легко видеть, создают для вершины v строго положительные накопления относительно уровня расхода в $\frac{7}{5}$.

Определим *дефицит* нашей вершины v как $D(v) = \frac{7}{5}d(v) - \mathrm{ch}(v) = \frac{3}{5}(10 - d(v))$. Поскольку $\mathrm{ch}^*(v) \geq \mathrm{ch}(v) - \frac{7}{5}d(v) = -D(v)$, нам уже нечего доказывать, если $d(v) \geq 10$. Однако чтобы разобрать случай $4 \leq d(v) \leq 9$, нужно более тщательно оценить эти накопления.

Если vx есть нетреугольное ребро, то *накопление, $\sigma(x)$, вызванное вершиной x*, по определению равно $\frac{7}{5}$ минус заряд, полученный вершиной x после усреднения. Если $T = uvw$ — 3-грань, то *накопление, $\sigma(T)$, вызванное гранью T*, положим равным $2 \times \frac{7}{5}$ минус суммарный заряд, полученный вершинами u и w после усреднения. *Накопление, $\Sigma(v)$, богатой вершины v* есть суммарное накопление вдоль всех ребер, инцидентных v.

Заметим, что доказываемое утверждение $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$ равносильно тому, что $\Sigma(v) \geq D(v)$.

Утверждение 2. *Накопления богатой вершины v вдоль нетреугольного ребра vx и вдоль пары ребер $\{vu, vw\}$ треугольника $T = uvw$ оцениваются следующим образом:*

(a) *если $d(x) = 2$, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - 1 - 2 \times \frac{1}{5} = 0$;*

(b) *если x — нетреугольная 3-вершина, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$;*

(c) *если x — плохой сосед вершины v, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - \frac{3}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$;*

(d) *если x — богатая вершина, то $\sigma(x) \geq \frac{7}{5} - 2 \times \frac{1}{10} = \frac{6}{5}$;*

(e) *если T получает от v заряд $\nu(T) \in \left\{\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, 1\right\}$ по правилу R2, то $\sigma(T) \geq 2 \times \frac{7}{5} - \nu(T) - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{5}{2} - \nu(T) \geq \frac{11}{10}$, если грань T не бедная, в противном случае $\sigma(T) = 2 \times \frac{7}{5} - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$;*

(f) *если T — $(3, 3, N)$-грань, то $\sigma(T) \geq 2 \times \frac{7}{5} - 2 - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$;*

(g) *если T — плохая $(3, 4, N)$-грань, то $\sigma(T) \geq 2 \times \frac{7}{5} - \frac{8}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.*

Доказательство. Единственный момент, заслуживающий упоминания, касается п. (b): здесь x не может принадлежать двум парам нетреугольных 3-вершин благодаря лемме 1(c), поэтому x не может получать $2 \times \frac{3}{10}$ по R4*. □

Следуя пунктам утверждения 2, разобьем ребра вокруг вершины v на накопители S_b–S_g. Среди них S_c (плохой сосед) и S_f ($(3,3,N)$-грань) являются самыми слабыми накопителями; каждый обеспечивает для v накопление лишь в $\frac{2}{5}$. При разборе случаев ниже будем на передний план выдвигать сильнейшие накопители, чтобы исчерпать дефицит $D(v)$ вершины v как можно быстрее.

Подслучай 1.1. $d(v) = 9$. Теперь $D(v) = \frac{3}{5}$, так что надо рассмотреть только случай, когда вершина v имеет не более одного накопителя, причем этот накопитель должен быть «слабым», т. е. быть либо S_c, либо S_f. Однако это исключается леммой 6, согласно которой $\Sigma(v) \geq \frac{2}{5}(\beta(v) + \tau_{3,3}(v) + 2\tau_{3,4}(v)) \geq \frac{2}{5} \times 2 > D(v)$.

Подслучай 1.2. $d(v) = 8$. Здесь $D(v) = \frac{6}{5}$. Если v имеет накопитель вида S_b или S_d, приносящий не менее $\frac{9}{10}$, то надо исключить лишь случай, когда v смежна с семью 2-вершинами, но это следует из леммы 5(b). Допустим, что имеется накопитель S_e (хорошая 3-грань); теперь v не может быть смежной с шестью 2-вершинами по лемме 5(a), откуда $\Sigma(v) \geq 1 + \frac{2}{5}$, что и требовалось. Предположим, наконец, что каждый накопитель при v экономит не более $\frac{4}{5}$; тогда по лемме 5(c) v получает не менее $\Sigma(v) \geq 3 \times \frac{2}{5} \geq D(v)$.

Подслучай 1.3. $d(v) = 7$. Теперь $D(v) = \frac{9}{5}$. Если имеется S_e, экономящий не менее 1, то мы должны позаботиться только о наличии не более одного из S_c и S_f при условии, что все остальные соседи вершины v являются 2-вершинами; но это невозможно согласно лемме 4(a).

Заметим, что каждый S_b или S_d экономит не менее $\frac{9}{10}$, так что наличия не менее двух из них уже достаточно. Если существует в точности один из S_b и S_d, то суммарное накопление от S_c, S_f и S_g не менее $\frac{6}{5}$ по лемме 4(b).

Наконец, если при v существуют только накопители S_c, S_f и S_g, то $\Sigma(v) \geq 5 \times \frac{2}{5} > D(v)$ по лемме 4(c).

Подслучай 1.4. $d(v) = 6$. Теперь $D(v) = \frac{12}{5}$. Ведем разбор вариантов в терминах накопителей, но в критических случаях прибегаем к исходным правилам R0–R4.

Можно считать, что при v существует не более двух S_e. Если имеется в точности два, т. е. $\tau_g(v) = 2$, то надо рассмотреть только случай, когда один из них экономит ровно $\frac{11}{10}$, так как иначе каждый экономит не менее $\frac{6}{5}$. Кроме того, v должна быть смежна с двумя 2-вершинами, а другой накопитель должен экономить $\frac{11}{10}$ или $\frac{6}{5}$, т. е. быть либо слабой, либо бедной 3-гранью. Однако в этом случае вершина v отдает заряд не более чем трем 5-граням согласно лемме 3(a), поэтому $\mathrm{ch}^*(v) \geq 6 - 2 \times \frac{7}{5} - 2 \times 1 - 3 \times \frac{2}{5} = 0$ по правилам R0, R2 и R4.

Подслучай 1.4.1. v имеет в точности один накопитель S_e, т. е. хорошую 3-грань $T = v_1 v v_2$. Учитывая специфику этого S_e, нам остается дополнительно сэкономить не более $\frac{13}{10}$. Очевидно, что наличия двух накопителей вида S_b или S_d было бы достаточно. Сначала предположим, что имеется в точности один из S_b и S_d. Напомним, что каждый из них экономит не менее $\frac{9}{10}$ согласно утверждению 2.

Очевидно, что уже нечего доказывать, если $\beta(v) + \tau_{3,3}(v) \geq 1$ или при v есть S_g, поэтому предположим, что $\nu_2(v) = 3$ и $\beta(v) = 0$.

Если при v имеется S_b, то v не дает заряд хотя бы одной инцидентной 6^+-грани по R4 благодаря лемме 3(b), откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$. В самом деле, в рассмотрении нуждается лишь вариант, когда v дает $\frac{7}{5}$ грани T, $\frac{1}{2}$ своей специальной 5-грани и $3 \times \frac{2}{5}$ остальным трем инцидентным 5-граням. Такое может случиться, лишь если инцидентная богатой вершине v_2 грань f_2 при v имеет $d(f_2) \geq 6$, так как иначе 5-грань f_2 получает лишь $\frac{3}{10}$ от v, если f_2 не является специальной для v, либо получает $\frac{2}{5}$ вместо $\frac{1}{2}$ от v, будучи специальной для v. Следовательно, имеются 3^--вершины $v_1, v_6, \ldots, v_3$, последовательно расположенные вокруг v и все принадлежащие 5-граням, инцидентным v. Однако удалив 2-вершину этой последовательности, находящуюся ближе всего к v_1, мы можем продолжить раскраску полученного графа на весь G точно так же, как мы делали при доказательстве леммы 3; противоречие.

Теперь допустим, что при v есть S_d вместе с S_e. Тогда v дает своим 5-граням не более $\frac{9}{5} = 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{5}$ по R4, так что остается рассмотреть лишь случай, когда T получает $\frac{7}{5}$ от v. Однако по лемме 3(c) v тратит на 5-грани не более $4 \times \frac{2}{5}$, что и требовалось.

Наконец, пусть при v нет ни S_b, ни S_d. Мы находимся в ситуации леммы 3(f). Напомним, что v накапливает не менее $\frac{2}{5}(\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v))$ благодаря своим плохим соседям и плохим 3-граням. Если $\beta(v)+\tau_{3,3}(v)+2\tau_{3,4}(v) \geq 4$, то v экономит не менее $\frac{11}{10}+4\times\frac{2}{5} > \frac{12}{5}$. В противном случае v экономит не менее $\frac{6}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ согласно лемме 3(f), поскольку T не является слабой.

Подслучай 1.4.2. При v нет S_e, т. е. $\tau_g(v) = 0$. Очевидно, мы можем считать, что при v существует не более двух накопителей S_b и S_d. Сначала допустим, что их в точности два. Если при v имеется еще и S_g, то доказывать нечего, поскольку $2 \times \frac{9}{10} + \frac{4}{5} > \frac{12}{5}$.

Если при v имеется два накопителя S_d, то v отдает не более 4 на вершины по правилам R0 и R1 и не более $2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{3}{10} = 3 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = 2$ на грани по правилу R4, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$.

Предположим, что при v имеется один S_b и один S_d. Они обеспечивают суммарную экономию не менее, чем $\frac{9}{10} + \frac{6}{5} = 2\frac{1}{10}$, поэтому можно считать, что $\nu_2(v) = 4$, поскольку S_c или S_f дают недостающую экономию в $\frac{2}{5}$. Теперь по лемме 3(d) имеем $\varphi_6(v) \geq 1$, откуда следует, что суммарный расход вершины v на грани по правилу R4 снова не превышает $\frac{1}{2} + 3 \times \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = 2$, поскольку 5-грань, инцидентная S_d, забирает от v лишь $\frac{3}{10}$, не будучи специальной для v, в противном случае — лишь $\frac{2}{5}$.

Пусть v смежна с двумя нетреугольными 3-вершинами. Можем считать, что при v есть разве что один из накопителей S_c или S_f. Однако лемма 3(e) позволяет сэкономить еще $\frac{2}{5}$ при $\nu_2(v) \leq 3$ или $2\times\frac{2}{5}$ при $\nu_2(v) = 4$ из-за наличия 6^+-граней при v, так что всегда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$.

Наконец, пусть при v имеется в точности один из накопителей S_b и S_d. Из леммы 3(g) получаем, что $\Sigma(v) \geq \frac{9}{10} + 4 \times \frac{2}{5} > \frac{12}{5}$.

Подслучай 1.4.3. При v нет накопителей S_e, S_b и S_d. Все такие конфигурации сводимы согласно лемме 3(h).

Подслучай 1.5. $d(v) = 5$. С этого момента отказываемся от усреднения и возвращаемся к правилам R0–R4. Заметим, что вершина v отдает не более $\frac{6}{5}$ каждой инцидентной 3-грани по правилу R2.

Подслучай 1.5.1. $\tau(v) = 0$. Здесь $\nu_2(v) \leq 1$ по лемме 2(a). Более того, если $\nu_2(v) = 1$, то $\beta(v) = 0$, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \geq 4 - 1 - 5 \times \frac{1}{2} > 0$ по правилам R0 и R4.

Итак, пусть $\nu_2(v) = 0$. Теперь $\beta(v) \le 3$ согласно лемме 2(b). Если $\beta(v) \le 2$, то $\mathrm{ch}^*(v) \le 4 - 2 \times \frac{3}{5} - 5 \times \frac{1}{2} > 0$ по R1 и R4. Напомним, что нетреугольная 3-вершина не может быть смежна более чем с одной нетреугольной 3-вершиной по лемме 1(c). Отсюда следует, что число 5-граней, являющихся специальными для v, не превышает числа нетреугольных 3-соседей вершины v. Следовательно, если $\beta(v) = 3$, то v инцидентна не более чем двум специальным 5-граням, получающим $\frac{1}{2}$ от v, так что $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 3 \times \frac{3}{5} - 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{2}{5} = 0$ по R1 и R4.

Подслучай 1.5.2. $\tau(v) = 1$. Пусть $T = uvw$ — 3-грань при вершине v. Если $\nu_2(v) = 1$, то $\beta(v) = 0$, $d(u) \ge 4$ и $d(w) \ge 4$ по лемме 2(a). Поскольку при v имеется не более двух специальных граней, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 1 - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{2}{5} - \frac{6}{5} = 0$ по правилам R0, R2 и R4.

Пусть $\nu_2(v) = 0$. Теперь $\beta(v) \le 2$ по лемме 2(b). Если $\beta(v) \le 1$, то $\mathrm{ch}^*(v) \le 4 - \frac{6}{5} - \frac{3}{5} - 4 \times \frac{1}{2} > 0$ по правилам R1, R2 и R4, поэтому допустим, что $\beta(v) = 2$. Через $z \notin \{u, w\}$ обозначим смежную с v вершину, не являющуюся плохим соседом для v. Если z богатая, то v отдает не больше $2 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{7}{5}$ инцидентным 5-граням, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{3}{5} - \frac{7}{5} > 0$.

Остается предположить, что $d(z) = 3$, а это значит, что вершина v может быть инцидентна (самое большее одной) специальной 5-грани. Если v отдает заряд 1 грани T, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 1 - 2 \times \frac{3}{5} - 3 \times \frac{2}{5} - \frac{1}{2} > 0$. Если, скажем, $d(u) = 3$, то w является богатой вершиной ввиду леммы 1(d),(g), так что v отдает не больше $\frac{8}{5} = 4 \times \frac{2}{5} = 2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$ своим инцидентным 5-граням, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = 0$. Наконец, отметим, что T не может быть $(4, 4, 5)$-гранью, получающей $\frac{6}{5}$ по R2 согласно лемме 2(d).

Подслучай 1.5.3. $\tau(v) = 2$. Пусть T_1 и T_2 суть 3-грани при v, и пусть z — сосед вершины v, который не принадлежит $T_1 \cup T_2$. Сначала предположим, что $d(z) = 2$. Заметим, что v не смежна с 3-вершинами по лемме 2(a). Поскольку ни одна из граней T_1 и T_2 не содержит двух бедных 4-вершин согласно лемме 2(c), каждая из T_1 и T_2 получает 1 от v, тогда как три инцидентные 5^+-грани получают не более $2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 1$, а значит, $\mathrm{ch}^*(v) \ge 0$.

Если z не является плохим соседом, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 2 \times \frac{6}{5} - 3 \times \frac{1}{2} > 0$, поэтому предположим, что это так. В частности, отсюда следует, что v не инцидентна специальным 5-граням, которые получают по $\frac{1}{2}$ от v. Если у вершины v не менее двух богатых соседей, то суммарная передача от v ее 5-граням не больше 1, откуда $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - 2 \times \frac{6}{5} - \frac{3}{5} - 1 = 0$. Итак, далее можем считать, что $T_1 = vxy$, где $d(x) = d(y) = 4$ и $\tau(x) = \tau(y) = 2$. Если T_2 получает только 1 от v по R2, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 4 - \frac{6}{5} - 1 - \frac{3}{5} - 3 \times \frac{2}{5} = 0$. Следовательно, проблемы могли возникнуть лишь если T_2 была бы того же типа, что и T_1, либо являлась $(3, 4^+, 5)$-гранью. Однако это противоречит лемме 2(e),(f).

Подслучай 1.6. $d(v) = 4$ и v богатая (рис. 8). Заметим, что $\nu_2(v) = \beta(v) = 0$ согласно лемме 1(a),(b), и, значит, v не отдает заряд своим соседям $v_1, \dots, v_4$ по правилам R0 и R1. Если $\tau(v) = 0$, то $\mathrm{ch}^*(v) \ge 2 - 4 \times \frac{1}{2} = 0$ по R4, поэтому предположим, что $\tau(v) = 1$, и существует 3-грань $T = v_1 v v_2$.

Как следует из леммы 1(d),(h), хотя бы одна из вершин v_1 и v_2 богатая. По лемме 1(e) хотя бы одна из v_3 и v_4 не является нетреугольной 3-вершиной, т. е. она богатая. Отсюда следует, что v инцидентна не больше чем одной специальной грани (см. исключения в R4). Напомним, что T получает заряд 1 от v по R2, кроме случая, когда $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 5$ и каждая из v_3 и v_4 является богатой, а в этом случае имеем $\mathrm{ch}^*(v) \ge 2 - \frac{6}{5} - 2 \times \frac{1}{5} - \frac{3}{10} > 0$.

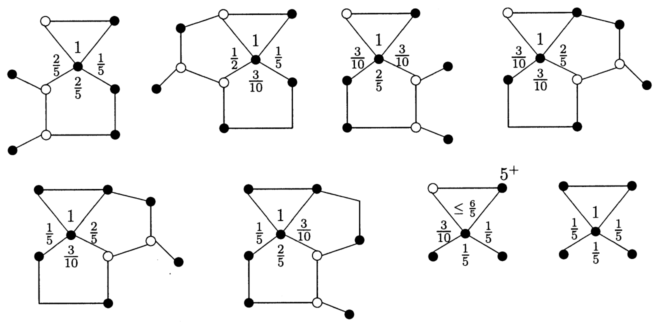

Рис. 8. Передачи от богатой 4-вершины.

Небольшой перебор (см. рис. 8) показывает, что v отдает своим 5^+-граням в сумме не более $1 = 2 \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5}$, так что $\mathrm{ch}^*(v) \geq 0$.

Подслучай 1.7. v бедная. Если $d(v) = 4$, то $\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) - 2 \times 1 = 0$ по R2. Если $d(v) = 3$, то $\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) = 0$, поскольку 3-вершины не участвуют в перераспределении зарядов. Наконец, если $d(v) = 2$, то $\mathrm{ch}^*(v) \geq 4-6+2\times 1 = 0$ по R0 согласно лемме 1(a).

Случай 2. $f \in F(G)$.

Подслучай 2.1. $d(f) = 3$. Поскольку по меньшей мере одна из инцидентных грани f вершин является богатой по лемме 1(d),(h), из R1–R3 следует, что $\mathrm{ch}^*(f) = 0$ (см. рис. 7). Действительно, если f не участвует в R3, то $\mathrm{ch}^*(f) = -3 + 3 \times 1 = 0$; иначе $\mathrm{ch}^*(f) = -3 + \frac{16}{5} - \frac{1}{5} = 0$.

Подслучай 2.2. $d(f) = 5$. Пусть $f = v_1 \dots v_5$. Если v_1 и v_2 являются бедными, то либо существует 3-грань $v_1 v v_2$, где $d(v_1) \leq 4$, $d(v_2) \leq 4$ и v богатая по лемме 1(d),(g),(h), либо v_1 и v_2 — нетреугольные 3-вершины (в этом случае v_5 и v_3 богатые по лемме 1(c)). Отсюда следует, что если все вершины v_1, v_2 и v_3 бедные, то $d(v_1) \leq 4$, $d(v_2) = 4$ и $d(v_3) \leq 4$.

Пусть $\nu_P(f)$ есть число бедных вершин, инцидентных грани f. Если $\nu_P(f) = 5$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$ согласно R3. Если же $\nu_P(f) = 4$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 0$ по R3 и R4.

Пусть $\nu_P(f) = 3$. Если v_1, v_2 и v_3 бедные, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1+2\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{10} = 0$. Допустим v_1, v_2 и v_4 бедные. Если ребро v_1v_2 треугольное, то имеем $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = 0$; иначе $d(v_1) = d(v_2) = 3$, поэтому $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Если же только v_1 и v_3 бедные, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 0$. Предположим, что только v_1 и v_2 бедные. Если ребро v_1v_2 треугольное, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 0$ по правилам R3 и R4; иначе $d(v_1) = d(v_2) = 3$, откуда $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = 0$ по R4.

Если $\nu_P(f) = 1$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1+2\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{10} = 0$. Наконец, если $\nu_P(f) = 0$, то $\mathrm{ch}^*(f) = -1 + 5 \times \frac{1}{5} = 0$ снова по R4.

Подслучай 2.3. $d(f) \geq 6$. Теперь $\mathrm{ch}^*(f) = \mathrm{ch}(f) = d(f) - 6 \geq 0$.

Полученное противоречие с (1) завершает доказательство теоремы 1.

Авторы благодарят А. Н. Глебова за тщательную проверку доказательства и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grünbaum B.* Acyclic colorings of planar graphs // Israel J. Math. 1973. V. 14, N 3. P. 390–408.

2. *Бородин О. В.* Доказательство гипотезы Б. Грюнбаума об ациклической 5-раскрашиваемости плоских графов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 1. С. 18–20.

3. *Borodin O. V.* On acyclic colorings of planar graphs // Discrete Math. 1979. V. 25, N 3. P. 211–236.

4. *Mitchem J.* Every planar graph has an acyclic 8-coloring // Duke Math. J. 1974. V. 14. P. 177–181.

5. *Albertson M. O., Berman D.* Every planar graph has an acyclic 7-coloring // Israel J. Math. 1977. V. 28, N 1–2. P. 169–177.

6. *Косточка А. В.* Ациклическая 6-раскраска плоских графов // Дискрет. анализ. 1976. Т. 28. С. 48–56.

7. *Kostochka A. V., Mel'nikov L. S.* Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings // Discrete Math. 1976. V. 14, N 4. P. 403–406.

8. *Jensen T. R., Toft B.* Graph coloring problems. New York: Wiley Intersci., 1995.

9. *Hell P., Nešetřil J.* Graphs and homomorphisms. Oxford: Oxford Univ. Press, 2004. (Oxf. Lect. Ser. Math. Appl.).

10. *Thomassen C.* Every planar graph is 5-choosable // J. Combin. Theory Ser. B. 1994. V. 62. P. 180–181.

11. *Voigt M.* List colorings of planar graph // Discrete Math. 1993. V. 120, N 1–3. P. 215–219.

12. *Borodin O. V., Fon-Der-Flaass D. G., Kostochka A. V., Raspaud A., Sopena E.* Acyclic list 7-coloring of planar graphs // J. Graph Theory. 2002. V. 40, N 2. P. 83–90.

13. *Montassier M., Ochem P., Raspaud A.* On the acyclic choosability of graphs // J. Graph Theory. 2006. V. 51, N 4. P. 281–300.

14. *Montassier M., Raspaud A., Wang W.* Acyclic 5-choosability of planar graphs without small cycles // J. Graph Theory. 207. V. 54, N 3. P. 245–260.

15. *Zhang H., Xu B.* Acyclic 5-choosable planar graphs with neither 4-cycles nor chordal 6-cycles // Discrete Math. 2009. V. 309, N 20. P. 6089–6091.

16. *Chen M., Wang W.* Acyclic 5-choosability of planar graphs without 4-cycles // Discrete Math. 2008. V. 308, N 24. P. 6216–6225.

17. *Chen M., Raspaud A.* A sufficient condition for planar graphs to be acyclically 5-choosable // Discrete Math. (Accepted).

18. *Wang W., Chen M.* Planar graphs without 4-cycles are acyclically 6-choosable // J. Graph Theory. 2009. V. 61, N 4. P. 307–323.

19. *Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.* Acyclic colorings of planar graphs with large girth // J. London Math. Soc. 1999. V. 60, N 2. P. 344–352.

20. *Borodin O. V., Chen M., Ivanova A. O., Raspaud A.* Acyclic 3-choosability of sparse graphs with girth at least 7 // Discrete Math. 2010. V. 310, N 17–18. P. 2426–2534.

21. *Бородин О. В.* Ациклическая предписанная 3-раскрашиваемость плоских графов, не содержащих циклов длины от 4 до 12 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 26–33.

22. *Hocquard H., Montassier M.* Every planar graph without cycles of lengths 4 to 12 is acyclically 3-choosable // Inf. Proc. Lett. 2009. V. 109, N 21–22. P. 1193–1196.

23. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Acyclic 3-choosability of planar graphs with no cycles of length from 4 to 11 // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. V. 7. P. 275–283.

24. *Montassier M.* Acyclic 4-choosability of planar graphs with girth at least 5 // Trends in Math.: Graph Theory in Paris, 2007. P. 299–310.

25. *Montassier M., Raspaud A., Wang W.* Acyclic 4-choosability of planar graphs without cycles of specific lengths // Topics in discrete mathematics. Algorithms Combin. Berlin: Springer-Verl., 2009. V. 26. P. 473–491.

26. *Chen M., Raspaud A., Wang W.* Acyclic 4-choosability of planar graphs without prescribed cycles // Discrete Math. (Accepted).

27. *Бородин О. В.* Ациклическая 4-раскрашиваемость плоских графов без циклов длины 4 и 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 3–11.

28. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Raspaud A.* Acyclic 4-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor triangular 6-cycles // Discrete Math. 2010. V. 310, N 21. P. 2946–2958.

29. *Chen M., Raspaud A.* On acyclic 4-choosability of planar graphs without short cycles // Discrete Math. 2010. V. 310. N 15–16. P. 2113–2118.

30. *Бородин О. В.* Ациклическая 4-раскрашиваемость плоских графов, не содержащих 4- и 5-циклов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 2. С. 20–30.
31. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Acyclic 4-choosability of planar graphs with no 4- and 5-cycles // J. Graph Theory (submitted).
32. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Acyclic 5-choosability of planar graphs without adjacent short cycles // J. Graph Theory, published on-line. DOI 10.1002/jgt 20549.

Статья поступила 18 июля 2010 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Институт математики при Якутском гос. университете,
Северо-Восточный федеральный университет,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
shmgnanna@mail.ru