Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.5

РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ КВАЗИКОНФОРМНЫХ В СРЕДНЕМ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов

Аннотация. Установлены равностепенная непрерывность и нормальность семейств $\mathfrak{R}^{\Phi}$ так называемых кольцевых $Q(x)$-гомеоморфизмов с ограничениями интегрального типа $\int \Phi(Q(x))\,dm(x) < \infty$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Показано, что найденные условия на функцию Φ являются не только достаточными, но и необходимыми для равностепенной непрерывности и нормальности таких семейств отображений. Также приведены приложения этих результатов к классам Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$.

Ключевые слова: равностепенная непрерывность, нормальное семейство, квазиконформное в среднем отображение, класс Соболева.

1. Введение

Всюду далее m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

В теории отображений, называемых квазиконформными в среднем, условия вида

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\,dm(x) < \infty \tag{1.1}$$

являются стандартными для различных характеристик Q отображений (см., например, [1–15]). Изучение классов с интегральными условиями вида (1.1) также актуально в связи с развитием в последнее время теории вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, монографии [16, 17], а также обзоры [18, 19]) и так называемых отображений с конечным искажением (см. гл. VI в [20] и разд. 8.4 в [17]).

Статья является естественным продолжением работы [21]. Здесь мы исследуем вопросы, связанные с равностепенной непрерывностью и нормальностью так называемых кольцевых $Q(x)$-гомеоморфизмов с условием (1.1), и приводим соответствующие приложения к классам Соболева, включающим, в частности, квазиконформные отображения, геометрическое определение которых также основано на понятии модуля.

Напомним, что *модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\,dm(x),$$

где борелевы функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ допустимы для семейства кривых Γ в D, $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, т. е.

$$\int\limits_\gamma \rho(x)\,|dx| \geq 1 \quad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

Одно из эквивалентных геометрических определений K-квазиконформных отображений f с $K \in [1, \infty)$, заданных в области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, сводится к неравенству

$$M(f\Gamma) \leq K\, M(\Gamma) \tag{1.2}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D (см. [22, гл. II, определение 13.1]). Другими словами, (1.2) означает, что искажение внешней меры M над пространством всех кривых в D ограничено при квазиконформных отображениях.

Аналогично для заданной области D в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и измеримой (по Лебегу) функции $Q : D \to [1, \infty]$, гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, называется $Q(x)$-*гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x)\rho^n(x)\, dm(x) \tag{1.3}$$

для каждого семейства Γ кривых γ в D и каждой $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ (см., например, [23, 24], а также [17, разд. 4.1]).

В случае $Q(x) \leq K$ п. в. снова приходим к неравенству вида (1.2). В общем случае последнее неравенство означает, что модуль семейства $f\Gamma$ оценивается через модуль Γ с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \leq M_Q(\Gamma)$ (см., например, [25]). В монографии В. М. Миклюкова [26] можно найти другой класс отображений, удовлетворяющих аналогичным неравенствам в терминах емкостей. Впервые неравенство типа (1.3) установлено Лехто и Виртаненом для квазиконформных отображений на плоскости в [27, гл. V, разд. 6.3] и Ю. Ф. Струговым в работе [12] для пространственных отображений, квазиконформных в среднем. В [28] неравенство вида (1.3) установлено для квазиконформных отображений в пространстве с $Q(x)$, равным $K_I(x, f)$.

Напомним, что *внутренней дилатацией* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в точке $x \in D$ дифференцируемости f называется величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках, где $J(x, f)$ — якобиан отображения f в точке x и

$$l(f'(x)) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Следующее понятие обобщает и локализует вышеприведенное понятие Q-гомеоморфизма. Оно мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., например, [29]), введено впервые В. И. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости, а позже распространено В. И. Рязановым и Е. А. Севостьяновым на пространственный случай (см., например, [21; 17, гл. VII, XI]). Пусть $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Пусть $x_0 \in D$ и $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая (по Лебегу) функция. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называют *кольцевым* Q-*гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если f удовлетворяет соотношению

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, R))) \leq \int\limits_R Q(x)\eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{1.4}$$

для каждого кольца $R = R(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}$, где $0 < r_1 < r_2 < r_0 := \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geq 1.$$

Гомеоморфизм f называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в области D*, если он является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in D$. Заметим, что, в частности, гомеоморфизмы $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ при $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}$ являются кольцевыми Q-гомеоморфизмами, а также Q-гомеоморфизмами с $Q(x) := K_I(x, f)$ (см., например, теоремы 8.1 и 8.6 в [17], а также теорему 6.10 и следствие 4.9 в [30]).

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма может быть естественным образом распространено на случай $x_0 = \infty$. Именно, при $\infty \in D \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в ∞*, если отображение $\tilde{f} = f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ является кольцевым Q'-гомеоморфизмом в нуле при $Q'(x) = Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$. Другими словами, отображение $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в ∞ тогда и только тогда, когда соотношение

$$M(f(\Gamma(S(R_1), S(R_2), R))) \leq \int\limits_{R} Q(y) \eta^n(|y|)\, dm(y)$$

выполнено для каждого кольца $R = R(R_1, R_2, 0) = \{y \in \mathbb{R}^n : R_1 < |y| < R_2\}$ в D при $0 < R_1 < R_2 < \infty$, $S(R_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = R_i\}$ и каждой измеримой функции $\eta : (R_1, R_2) \to [0, \infty]$ при $\int\limits_{R_1}^{R_2} \eta(r)\, dr \geq 1$.

2. Предварительные сведения

Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывному отображению $f : X \to X'$. Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех x с $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X.

Следующая версия теоремы Арцела — Асколи будет полезна в дальнейшем (см., например, п. 20.4 в [22]).

Предложение 2.1. *Если (X, d) — сепарабельное метрическое пространство, а (X', d') — компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.*

В частности, предложение 2.1 имеет место в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ с обычным расстоянием и X' — расширенное пространство $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, являющееся компактным, со сферической метрикой.

Напомним, что сферическая (хордальная) метрика $h(x, y)$ равна $|\pi(x) - \pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. в явном виде

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Сферическим диаметром множества E в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} h(x_1, x_2).$$

Пусть $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ — класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов f в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta > 0$. Следующая оценка искажения сферического расстояния при Q-гомеоморфизмах может быть найдена в [21] (см. также [17, теорема 7.3]).

Предложение 2.2. *Пусть $\Delta > 0$ и $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая функция. Тогда*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left\{-\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}\right\} \tag{2.1}$$

для каждого $f \in \mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ и $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, где $\alpha_n > 0$ зависит только от n и $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(z)$ на сфере $|z - x_0| = r$.

Обратная функция Φ^{-1} может быть корректно определена для любой неубывающей функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geq \tau} t. \tag{2.2}$$

Как обычно, inf в (2.2) равен ∞, если множество $t \in [0, \infty]$ таких, что $\Phi(t) \geq \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также неубывающая.

Замечание 2.1. Из определения очевидно, что

$$\Phi^{-1}(\Phi(t)) \leq t \quad \forall\, t \in [0, \infty] \tag{2.3}$$

с равенством в (2.3), исключая интервалы постоянства функции $\Phi(t)$.

Поскольку отображение $t \mapsto t^p$ для каждого положительного p является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом $[0, \infty]$ на $[0, \infty]$, теорема 2.1 из [31] может быть переписана в следующем виде, более удобном для дальнейших приложений. Здесь, в (2.5) и (2.6), мы дополняем определения интегралов, полагая их равными ∞ при $\Phi_p(t) = \infty$, соответственно $H_p(t) = \infty$, для всех $t \geq T \in [0, \infty)$. Интеграл в (2.6) понимается в смысле Лебега — Стильтьеса, а интегралы в (2.5) и (2.7)–(2.10) — как обычные интегралы Лебега.

Предложение 2.3. *Пусть $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — неубывающая функция. Положим*

$$H_p(t) = \log \Phi_p(t), \quad \Phi_p(t) = \Phi(t^p), \quad p \in (0, \infty). \tag{2.4}$$

Тогда равенство

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p'(t) \frac{dt}{t} = \infty \tag{2.5}$$

влечет

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{dH_p(t)}{t} = \infty \tag{2.6}$$

и (2.6) *эквивалентно соотношению*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} H_p(t) \frac{dt}{t^2} = \infty \tag{2.7}$$

для некоторого $\delta > 0$. *Равенство* (2.7) *эквивалентно каждому из равенств:*

$$\int\limits_{0}^{\Delta} H_p\left(\frac{1}{t}\right) dt = \infty \tag{2.8}$$

при некотором $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)} = \infty \tag{2.9}$$

при некотором $\delta_* > H(+0)$,

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \tag{2.10}$$

при некотором $\delta_* > \Phi(+0)$.

Более того, (2.5) эквивалентно соотношению (2.6), и, следовательно, (2.5)–(2.10) эквивалентны друг другу при дополнительном условии, что Φ абсолютно непрерывна. В частности, все условия (2.5)–(2.10) эквивалентны друг другу при условии, что функция Φ выпуклая и неубывающая.

Легко видеть, что условия (2.5)–(2.10) более слабые при больших p (см., например, (2.7)). Необходимо дать еще одно пояснение. В правых частях условий (2.5)–(2.10) подразумевается символ $+\infty$. При $\Phi_p(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$ имеем $H_p(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$ и полагаем $H'_p(t) := 0$ для $t \in [0, t_*]$. Заметим, что условия (2.6) и (2.7) исключают случай, когда t_* принадлежит интервалу интегрирования в указанных выше соотношениях. В противном случае левые части в (2.6) и (2.7) либо одновременно равны $-\infty$, либо не определены. Следовательно, мы можем предполагать в (2.5)–(2.8), что $\delta > t_0$ и соответственно $\Delta < 1/t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\Phi_p(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi_p(0) > 0$.

3. Основная лемма и ее следствия

Напомним, что функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ называется *выпуклой,* если

$$\Phi(\lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2) \le \lambda \Phi(t_1) + (1 - \lambda) \Phi(t_2)$$

при всех t_1, $t_2 \in [0, \infty]$ и $\lambda \in [0, 1]$.

В дальнейшем $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, обозначает сферическое кольцо в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$:

$$\mathbb{R}^n(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < 1\}. \tag{3.1}$$

Следующее утверждение является обобщением и усилением леммы 3.1 из [31].

Лемма 3.1. *Пусть* $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ *— измеримая функция,* $\Phi : [0,\infty] \to (0,\infty]$ *— неубывающая выпуклая функция, и пусть среднее интегральное значение* $M(\varepsilon)$ *функции* $\Phi \circ Q$ *в кольце* $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ *конечно. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall\, p \in (0,\infty),\ \varepsilon \in (0,1), \tag{3.2}$$

где $q(r)$ *— среднее интегральное значение функции* $Q(x)$ *над сферой* $|x| = r$.

Замечание 3.1. При каждом $p \in (0,\infty)$ соотношение (3.2) эквивалентно неравенству

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau\Phi_p^{-1}(\tau)}, \quad \Phi_p(t) := \Phi(t^p). \tag{3.3}$$

Доказательство леммы 3.1. Обозначим $t_* = \sup\limits_{\Phi_p(t)=\tau_0} t$, $\tau_0 = \Phi(0) > 0$. Полагая $H_p(t) := \log \Phi_p(t)$, видим, что $H_p^{-1}(\eta) = \Phi_p^{-1}(e^\eta)$, $\Phi_p^{-1}(\tau) = H_p^{-1}(\log \tau)$ (см. лемму 2.1 в [31]). Следовательно,

$$q^{\frac{1}{p}}(r) = H_p^{-1}\left(\log \frac{h(r)}{r^n}\right) = H_p^{-1}\left(n \log \frac{1}{r} + \log h(r)\right) \quad \forall\, r \in R_*, \tag{3.4}$$

где $h(r) := r^n \Phi(q(r)) = r^n \Phi_p(q^{\frac{1}{p}}(r))$ и $R_* = \{r \in (\varepsilon, 1) : q^{\frac{1}{p}}(r) > t_*\}$. Тогда

$$q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) = H_p^{-1}(ns + \log h(e^{-s})) \quad \forall\, s \in S_*, \tag{3.5}$$

где $S_* = \left\{s \in \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) : q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) > t_*\right\}$.

В силу неравенства Иенсена и выпуклости функции Φ имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{0}^{\log \frac{1}{\varepsilon}} h(e^{-s})ds &= \int\limits_{\varepsilon}^{1} h(r)\frac{dr}{r} = \int\limits_{\varepsilon}^{1} \Phi(q(r)) r^{n-1} dr \\ &\leq \int\limits_{\varepsilon}^{1} \Bigg(\;\;\fint\limits_{S(r)} \Phi(Q(x)) d\mathscr{A} \Bigg) r^{n-1} dr \leq \frac{\Omega_n}{\omega_{n-1}} M(\varepsilon) = \frac{1}{n} M(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где использовано среднее значение функции $\Phi \circ Q$ на сфере $S(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ относительно меры площади. Как обычно, здесь Ω_n и ω_{n-1} — объем единичного шара и площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ соответственно. Рассуждая от противного, легко видеть, что

$$|T| = \int\limits_{T} ds \leq \frac{1}{n}, \tag{3.7}$$

где $T = \left\{s \in \left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) : h(e^{-s}) > M(\varepsilon)\right\}$. Следующим шагом покажем, что

$$q^{\frac{1}{p}}(e^{-s}) \leq H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon)) \quad \forall\, s \in (0, \log(1/\varepsilon)) \setminus T_*, \tag{3.8}$$

где $T_* := T \cap S_*$. Заметим, что $\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T_* = \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*\right] \cup \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus T\right] = \left[\left(0, \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*\right] \cup [S_* \setminus T]$. Неравенство (3.8) имеет место для $s \in S_* \setminus T$ ввиду (3.5), поскольку функция H_p^{-1} неубывающая. Заметим также, что

$$e^{ns} M(\varepsilon) > \Phi(0) = \tau_0 \quad \forall\, s \in (0, \log(1/\varepsilon)), \tag{3.9}$$

а тогда

$$t_* < \Phi_p^{-1}(e^{ns}M(\varepsilon)) = H_p^{-1}(ns + \log M(\varepsilon)) \quad \forall\, s \in (0, \log(1/\varepsilon)). \tag{3.10}$$

Следовательно, (3.8) имеет место также для $s \in \left(0, \log\frac{1}{\varepsilon}\right) \setminus S_*$.

Поскольку функция H_p^{-1} неубывающая, ввиду (3.7) и (3.8) получаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} = \int\limits_{0}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{q^{\frac{1}{p}}(e^{-s})} \geq \int\limits_{(0,\log\frac{1}{\varepsilon})\setminus T_*} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)}$$

$$\geq \int\limits_{|T_*|}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)} \geq \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\log\frac{1}{\varepsilon}} \frac{ds}{H_p^{-1}(ns+\Delta)} = \frac{1}{n} \int\limits_{1+\Delta}^{n\log\frac{1}{\varepsilon}+\Delta} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}, \tag{3.11}$$

где $\Delta = \log M(\varepsilon)$. Заметим, что $1 + \Delta = \log eM(\varepsilon)$. Таким образом,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{\log eM(\varepsilon)}^{\log\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\eta}{H_p^{-1}(\eta)}, \tag{3.12}$$

и после замены переменной $\eta = \log\tau$ получаем (3.3), а значит, и (3.2). $\Box$

Следствие 3.1. *Пусть $\Phi : [0,\infty] \to (0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция, $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $Q_*(x) = 1$ при $Q(x) < 1$ и $Q_*(x) = Q(x)$ при $Q(x) \geq 1$. Предположим, что среднее значение $M_*(\varepsilon)$ функции $\Phi \circ Q_*$ над кольцом $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$, конечно. Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{\lambda}{p}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM_*(\varepsilon)}^{\frac{M_*(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} \quad \forall\, \lambda \in (0,1),\ p \in (0,\infty), \tag{3.13}$$

где $q(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x| = r$.

Действительно, пусть $q_*(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q_*(x)$ на сфере $|x| = r$. Тогда $q(r) \leq q_*(r)$ и, кроме того, $q_*(r) \geq 1$ для всех $r \in (0,1)$. Таким образом, $q^{\frac{\lambda}{p}}(r) \leq q_*^{\frac{\lambda}{p}}(r) \leq q_*^{\frac{1}{p}}(r)$ для всех $\lambda \in (0,1)$, и по лемме 3.1, примененной к функции $Q_*(x)$, получаем (3.13).

Теорема 3.1. *Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to [0,\infty]$ — измеримая функция такая, что*

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(Q(x))\, dm(x) < \infty, \tag{3.14}$$

где $\Phi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция такая, что

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} = \infty, \quad p \in (0,\infty), \tag{3.15}$$

при некотором $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{rq^{\frac{1}{p}}(r)} = \infty, \tag{3.16}$$

где $q(r)$ — среднее интегральное значение функции $Q(x)$ на сфере $|x| = r$.

Доказательство. Если $\Phi(0) \neq 0$, то теорема 3.1 является прямым следствием леммы 3.1. В случае $\Phi(0) = 0$ фиксируем произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$ и полагаем $\Phi_*(t) = \Phi(t)$, если $\Phi(t) > \delta$, и $\Phi_*(t) = \delta$, если $\Phi(t) \le \delta$. Тогда по (3.14) имеем $\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi_*(Q(x))\, dm(x) < \infty$, поскольку $|\Phi_*(t) - \Phi(t)| \le \delta$, а мера $\mathbb{B}^n$ конечна. Кроме того, $\Phi_*^{-1}(\tau) = \Phi^{-1}(\tau)$ при $\tau \ge \delta$, а тогда по (3.15) $\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi_*^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}}} = \infty$. Таким образом, (3.16) имеет место снова по лемме 3.1. □

Замечание 3.2. Так как $[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{p}} = \Phi_p^{-1}(\tau)$, где $\Phi_p(t) = \Phi(t^p)$, из соотношения (3.15) вытекает, что

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall\, \delta \in [0, \infty). \tag{3.17}$$

С другой стороны, соотношение вида (3.17), выполненное при некотором $\delta \in [0, \infty)$, вообще говоря, не влечет (3.15). Действительно, (3.15), очевидно, влечет (3.17) для $\delta \in [0, \delta_0)$, а для $\delta \in (\delta_0, \infty)$ имеем

$$0 \le \int\limits_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} \le \frac{1}{\Phi_p^{-1}(\delta_0)} \log \frac{\delta}{\delta_0} < \infty, \tag{3.18}$$

поскольку функция Φ_p^{-1} не убывает и $\Phi_p^{-1}(\delta_0) > 0$. Кроме того, по определению обратной функции $\Phi_p^{-1}(\tau) \equiv 0$ для всех $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 = \Phi_p(0)$, следовательно, (3.17) при $\delta \in [0, \tau_0)$, вообще говоря, не влечет (3.15). Если $\tau_0 > 0$, то

$$\int\limits_{\delta}^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau \Phi_p^{-1}(\tau)} = \infty \quad \forall\, \delta \in [0, \tau_0). \tag{3.19}$$

Однако соотношение (3.19) не несет никакой информации собственно о функции $Q(x)$ и, стало быть, из (3.17) при $\delta < \Phi(0)$ не может следовать (3.16).

Аналогично следствию 3.2 из [31] получаем

Следствие 3.2. *Если $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — неубывающая выпуклая функция, а Q удовлетворяет условию* (3.14)*, то каждое из условий* (2.5)–(2.10) *при $p \in (0, \infty)$ влечет* (3.16).

Если, кроме того, $\Phi(1) < \infty$ либо $q(r) \ge 1$ на подмножестве интервала $(0, 1)$, имеющем положительную меру, каждое из условий (2.5)–(2.10) *при $p \in (0, \infty)$ влечет, что*

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{r q^{\frac{\lambda}{p}}(r)} = \infty \quad \forall\, \lambda \in (0, 1), \tag{3.20}$$

а также

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dr}{r^{\alpha} q^{\frac{\beta}{p}}(r)} = \infty \quad \forall\, \alpha \ge 1,\ \beta \in (0, \alpha]. \tag{3.21}$$

4. Достаточные условия равностепенной непрерывности

Всюду далее D — фиксированная область в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $n \geq 2$. Предположим, что заданы функция $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$, числа $M > 0$ и $\Delta > 0$. Обозначим через $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ семейство всех кольцевых $Q(x)$-гомеоморфизмов в D таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \Delta$ и

$$\int\limits_D \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} \leq M. \tag{4.1}$$

Иногда может быть использовано обозначение $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}(D)$, чтобы явно указать на область D.

Теорема 4.1. *Пусть $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ — неубывающая выпуклая функция. Если*

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}} = \infty \tag{4.2}$$

для некоторого $\delta_0 > \tau_0 := \Phi(0)$, то класс $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ равностепенно непрерывен и, следовательно, образует нормальное семейство отображений при всех $M \in (0, \infty)$ и $\Delta \in (0, 1)$.

Замечание 4.1. Условие

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\, dm(x) \leq M \tag{4.3}$$

влечет соотношение (4.1). Следовательно, (4.1) является более общим, чем (4.3), а соответствующий класс кольцевых Q-гомеоморфизмов, удовлетворяющих (4.3), представляет собой подкласс семейства $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$. С другой стороны, если область D ограничена, то условие (4.1) влечет условие

$$\int\limits_D \Phi(Q(x))\, dm(x) \leq M_*, \tag{4.4}$$

где $M_* = M \cdot (1 + \delta_*^2)^n$, $\delta_* = \sup\limits_{x \in D} |x|$.

Доказательство теоремы 4.1. Ввиду предложения 2.1 достаточно показать, что семейство отображений $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in D$. Если $x_0 \neq \infty$, то по предложению 2.2

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp \left\{ - \int\limits_{|x - x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \right\} \tag{4.5}$$

для всех $x \in B(x_0, \rho)$ и каждого положительного $\rho = \rho(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, где $q_{x_0}(r)$ обозначает среднее значение $Q(x)$ на сфере $|z - x_0| = r$ и постоянная α_n зависит только от n. После замены $t = r/\rho$ интеграл в правой части (4.5) по лемме 3.1 оценивается следующим образом:

$$\int\limits_{|x - x_0|}^{\rho} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r q^{\frac{1}{n-1}}(r)} \geq \frac{1}{n} \int\limits_{eM(\varepsilon)}^{\frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}},$$

где $\varepsilon = |x - x_0|/\rho$, $q(r) = q_{x_0}(\rho r)$ и

$$M(\varepsilon) = \fint_R \Phi(Q(z))\,dm(z) = \frac{1}{\Omega_n \rho^n (1-\varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z))\,dm(z),$$

$R = \{z \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < |z - x_0| < \rho\}$ — кольцо с центром в точке x_0 и Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Так как $|z| \le |z - x_0| + |x_0| \le \rho(x_0) + |x_0|$, получаем, что

$$M(\varepsilon) \le \frac{\beta_n(x_0)}{\Omega_n(1-\varepsilon^n)} \int_R \Phi(Q(z)) \frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^n},$$

где $\beta_n(x_0) = (1 + (\rho(x_0) + |x_0|)^2)^n / \rho^n(x_0)$. Следовательно, при $\varepsilon \le 1/\sqrt[n]{2}$ и, в частности, при $\varepsilon \le 1/2$,

$$\Phi(0) \le M(\varepsilon) \le \frac{2\beta_n(x_0)}{\Omega_n} M.$$

Таким образом, для всех x таких, что $|x - x_0| < \rho(x_0)/2$, имеем

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\Delta} \exp\left\{ -\frac{1}{n} \int\limits_{\lambda_n \beta_n(x_0) M}^{\frac{\Phi(0)\rho^n(x_0)}{|x-x_0|^n}} \frac{d\tau}{\tau [\Phi^{-1}(r)]^{\frac{1}{n-1}}} \right\}, \tag{4.6}$$

где постоянная $\lambda_n = 2e/\Omega_n$ зависит только от n. Стало быть, семейство $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ равностепенно непрерывно в точке x_0. Наконец, случай $x_0 = \infty$ может быть сведен к случаю $x_0 = 0$ через инверсию относительно сферы $|x| = 1$. $\square$

Следствие 4.1. *Каждое из условий* (2.5)–(2.10) *при* $p \in (0, n-1]$ *влечет равностепенную непрерывность и нормальность класса* $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ *для всех* $M \in (0, \infty)$ *и* $\Delta \in (0, 1)$.

Для данных функции $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ и чисел $M > 0$, $\Delta > 0$ обозначим через $S^{\Phi}_{M,\Delta}$ семейство всех гомеоморфизмов f, заданных в области D, принадлежащих классу Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ и имеющих локально интегрируемую внутреннюю дилатацию $K_I(x, f)$ таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \ge \Delta$, для которых выполнено соотношение вида (4.1) при $Q(x) := K_I(x, f)$. Заметим, что если функция Φ выпуклая, неубывающая и непостоянная на $[0, \infty)$, то условие (4.1) автоматически влечет, что $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Заметим также, что $S^{\Phi}_{M,\Delta} \subset \mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ (см., например, теорему 6.10 и следствие 4.9 в [30]). Таким образом, из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.2. *Каждое из условий* (2.5)–(2.10) *при* $p \in (0, n-1]$ *влечет равностепенную непрерывность и нормальность семейства* $S^{\Phi}_{M,\Delta}$ *для всех* $M \in (0, \infty)$ *и* $\Delta \in (0, 1)$.

Замечание 4.2. При $p = n-1$ условия типа (2.5)–(2.10) являются наиболее слабыми, которые ведут к равностепенной непрерывности и нормальности классов отображений $S^{\Phi}_{M,\Delta}$ и $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ (см. ниже теорему 5.1). Наиболее интересным из этих условий является соотношение (2.7), которое может быть переписано в виде

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t) \frac{dt}{t^{n'}} = \infty, \tag{4.7}$$

где $\frac{1}{n'}+\frac{1}{n}=1$, т. е. $n'=2$ при $n=2$, n' строго возрастает по n и $n'=n/(n-1)\to 1$ при $n\to\infty$. Заметим также, что условие (4.2), как и соотношение (5.1), приводимое ниже, может быть переписано в виде

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)}=\infty,\quad \Phi_{n-1}(t):=\Phi(t^{n-1}). \tag{4.8}$$

5. Необходимые условия равностепенной непрерывности

Теорема 5.1. *Предположим, что классы отображений $S_{M,\Delta}^{\Phi}\subset\mathfrak{R}_{M,\Delta}^{\Phi}$ равностепенно непрерывны (нормальны) при неубывающей выпуклой функции $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ для всех $M\in(0,\infty)$, $\Delta\in(0,1)$. Тогда*

$$\int\limits_{\delta_*}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{\frac{1}{n-1}}}=\infty \tag{5.1}$$

для всех $\delta_*\in(\tau_0,\infty)$, где $\tau_0:=\Phi(0)$.

Ясно, что функция $\Phi(t)$ в теореме 5.1 не может быть постоянной, ибо в противном случае никаких ограничений на K_I в указанной выше теореме не возникает, за исключением условия $\Phi(t)\equiv\infty$, когда классы $S_{M,\Delta}^{\Phi}$ пусты. Более того, согласно известному критерию выпуклости (см., например, [32, I.4.3, предложение 5]) наклон $[\Phi(t)-\Phi(0)]/t$ является неубывающей функцией. Поэтому доказательство теоремы 5.1 сводится к следующему утверждению.

Лемма 5.1. *Пусть функция $\Phi:[0,\infty]\to[0,\infty]$ не убывает и*

$$\Phi(t)\ge C\cdot t^{\frac{1}{n-1}}\quad\forall\, t\in[T,\infty] \tag{5.2}$$

для некоторых $C>0$ и $T\in(0,\infty)$. Если классы $S_{M,\Delta}^{\Phi}\subset\mathfrak{R}_{M,\Delta}^{\Phi}$ равностепенно непрерывны (нормальны) при всех $M\in(0,\infty)$ и $\Delta\in(0,1)$, то (5.1) имеет место при всех $\delta_*\in(\tau_0,\infty)$, где $\tau_0:=\Phi(+0)$.

Замечание 5.1. Хорошо известно, что критический показатель $n-1$ играет ключевую роль во многих проблемах пространственных отображений. Условие (5.2) может быть переписано в виде

$$\Phi_{n-1}(t)\ge Ct\quad\forall\, t\in[T,\infty], \tag{5.3}$$

где $\Phi_{n-1}(t)=\Phi(t^{n-1})$ и $C>0$, $T\in(0,\infty)$, что еще раз подчеркивает важное значение функции Φ_{n-1} в данном контексте. Фактически в теореме 5.1 достаточно потребовать более слабое условие выпуклости Φ_{n-1} вместо Φ.

Доказательство леммы 5.1. Предположим, что соотношение (5.1) не выполнено, т. е.

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)}<\infty \tag{5.4}$$

для некоторого $\delta_0\in(\tau_0,\infty)$, где $\Phi_{n-1}(t):=\Phi(t^{n-1})$. Тогда также

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau\Phi_{n-1}^{-1}(\tau)}<\infty\quad\forall\,\delta\in(\tau_0,\infty), \tag{5.5}$$

поскольку $\Phi^{-1}(\tau) > 0$ для всех $\tau > \tau_0$ и функция $\Phi^{-1}(\tau)$ не убывает. Заметим, что по условию (5.2)

$$\Phi_{n-1}(t) \geq Ct \quad \forall\, t \geq T \tag{5.6}$$

при некоторых $C > 0$ и $T \in (1, \infty)$. Более того, применяя линейное преобразование $\alpha\Phi + \beta$, где $\alpha = 1/C$ и $\beta = T$ (см., например, (2.7)), можем считать, что

$$\Phi_{n-1}(t) \geq t \quad \forall\, t \in [0, \infty). \tag{5.7}$$

Конечно, мы можем также предполагать, что $\Phi(t) = t$ при всех $t \in [0, 1)$, поскольку значения функции Φ на полуинтервале $[0, 1)$ не несут в себе информации относительно $K_I(x, f) \geq 1$ в (4.1). Ясно, что соотношение (5.5) влечет условие $\Phi(t) < \infty$ при всех $t < \infty$ (см. критерий (2.7), а также (2.10)).

Заметим, что функция $\Psi(t) := t\Phi_{n-1}(t)$ строго возрастает, $\Psi(1) = \Phi(1)$ и $\Psi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Поэтому функциональное уравнение

$$\Psi(K(r)) = (\gamma/r)^2 \quad \forall\, r \in (0, 1], \tag{5.8}$$

где $\gamma = \Phi^{1/2}(1) \geq 1$, разрешимо с $K(1) = 1$ и строго возрастающей непрерывной функцией $K(r)$ такой, что $K(r) < \infty$, $r \in (0, 1]$, и $K(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Беря логарифм в (5.8), имеем

$$\log K(r) + \log \Phi_{n-1}(K(r)) = 2 \log \frac{\gamma}{r}$$

и ввиду (5.7) получаем, что $\log K(r) \leq \log(\gamma/r)$, т. е.

$$K(r) \leq \gamma/r. \tag{5.9}$$

Тогда в силу (5.8) $\Phi_{n-1}(K(r)) \geq \gamma/r$ и по (2.3)

$$K(r) \geq \Phi^{-1}_{n-1}(\gamma/r). \tag{5.10}$$

Достаточно рассмотреть случай $D = \mathbb{B}^n$. Определим следующие отображения в проколотом единичном шаре $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|), \quad f_m(x) = \frac{x}{|x|}\rho_m(|x|), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\rho(t) = \exp\{I(0) - I(t)\}, \quad \rho_m(t) = \exp\{I(0) - I_m(t)\},$$

$$I(t) = \int\limits_t^1 \frac{dr}{rK(r)}, \quad I_m(t) = \int\limits_t^1 \frac{dr}{rK_m(r)}$$

и

$$K_m(r) = \begin{cases} K(r), & \text{если } r \geq 1/m, \\ K(\frac{1}{m}), & \text{если } r \in (0, 1/m). \end{cases}$$

Из (5.10) получаем

$$I(0) - I(t) = \int\limits_0^t \frac{dr}{rK(r)} \leq \int\limits_0^t \frac{dr}{r\Phi^{-1}_{n-1}\left(\frac{\gamma}{r}\right)} = \int\limits_{\frac{\gamma}{t}}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}_{n-1}(\tau)} \quad \forall\, t \in (0, 1],$$

где $\gamma/t \geq \gamma \geq 1 > \Phi(0) = 0$. Поэтому ввиду (5.5)

$$I(0) - I(t) \leq I(0) = \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} < \infty \quad \forall\, t \in (0, 1]. \tag{5.11}$$

Кроме того, f_m и f принадлежат $C^1(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})$, поскольку $K_m(r)$ и $K(r)$ непрерывны, поэтому локально квазиконформны в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Более того, f_m являются K_m-квазиконформными отображениями в $\mathbb{B}^n$, где $K_m = K(1/m)$.

Теперь касательная и радиальная дилатации f на сфере $|x| = \rho$, $\rho \in (0, 1)$, легко вычисляются:

$$\delta_\tau(x) = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho}, \quad \delta_r(x) = \frac{\partial|f(x)|}{\partial|x|} = \frac{\exp\left\{\int\limits_0^\rho \frac{dr}{rK(r)}\right\}}{\rho K(\rho)},$$

и видим, что $\delta_\tau(x) \geq \delta_r(x)$, поскольку $K(r) \geq 1$. Следовательно, ввиду сферической симметрии имеем

$$K_I(x, f) = \frac{\delta_\tau^{n-1}(x)\delta_r(x)}{\delta_r^n(x)} = K^{n-1}(|x|)$$

во всех точках $x \in \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ (см., например, [33, п. I.2.1]). Заметим, что

$$f_m(x) \equiv f(x) \quad \text{для любого } x \text{ такого, что } \frac{1}{m} < |x| < 1,\ m = 1, 2 \dots . \tag{5.12}$$

Поэтому аналогично вычисляются $K_I(x, f_m) = K_I(x, f) = K^{n-1}(|x|)$ для $1/m < |x| < 1$ и $K_I(x, f_m) = K^{n-1}(1/m)$ для $0 < |x| < 1/m$. Таким образом, f_m квазиконформны в $\mathbb{B}^n$, поэтому $f_m \in W^{1,n}_{\rm loc}$ и ввиду (5.8)

$$\int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi(K_I(x, f_m))\, dm(x) \leq \int\limits_{\mathbb{B}^n} \Phi_{n-1}(K(|x|))\, dm(x)$$
$$= \omega_{n-1} \int\limits_0^1 \frac{\Psi(K(r))}{rK(r)} r^n\, dr \leq \gamma^2 \omega_{n-1} \int\limits_0^1 \frac{dr}{rK(r)} \leq M =: \gamma^2 \omega_{n-1} I(0) < \infty.$$

Заметим, что f_m отображают единичный шар $\mathbb{B}^n$ на шар с центром в начале координат радиуса $R = e^{I(0)} < \infty$. Таким образом, $f_m \in S^\Phi_{M,\Delta}$ при некотором $\Delta > 0$, где M указано выше.

С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{t \to 0} \rho(t) = e^0 = 1, \tag{5.13}$$

т. е. f отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < R = e^{I(0)}$. Тогда в силу (5.12) и (5.13) получаем, что $|f_m(x)| = |f(x)| \geq 1$ для любого x такого, что $|x| \geq 1/m$, $m = 1, 2, \dots$, т. е. семейство $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ не является равностепенно непрерывным в нуле.

Полученное противоречие опровергает предположение (5.4). □

Замечание 5.2. Теорема 5.1 показывает, что условие (4.2) теоремы 4.1 не только достаточно, но и необходимо для равностепенной непрерывности (нормальности) классов отображений с интегральными ограничениями вида (4.1) либо (4.4) при выпуклой неубывающей функции Φ. Ввиду предложения 2.3 это относится также к каждому из условий (2.5)–(2.10) при $p = n - 1$.

Отметим, наконец, что еще в работе [11] была установлена необходимость условий неубывания и выпуклости функции Φ для компактности (замкнутости) классов отображений с ограничениями интегрального типа (4.3).

Следствие 5.1. *Если классы отображений $S^{\Phi}_{M,\Delta} \subset \mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ равностепенно непрерывны (нормальны) для всех $M \in (0,\infty)$, $\Delta \in (0,1)$ при неубывающей выпуклой функции Φ, то*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t) \frac{dt}{t^{n'}} = \infty \tag{5.14}$$

для всех $\delta > t_0$, где $t_0 := \sup\limits_{\Phi(t)=0} t$, $t_0 = 0$, если $\Phi(0) > 0$, $\frac{1}{n'} + \frac{1}{n} = 1$, т. е. $n' = n/(n-1)$.

По замечанию 4.2 и предложению 2.3 условие (5.14) также достаточно для равностепенной непрерывности (нормальности) классов отображений $S^{\Phi}_{M,\Delta}$ и $\mathfrak{R}^{\Phi}_{M,\Delta}$ при всех $M \in (0,\infty)$ и $\Delta \in (0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L.* On quasiconformal mappings // J. Anal. Math. 1951/54. V. 3. P. 1–58.

2. *Билута П. А.* Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 4. С. 717–726.

3. *Golberg A.* Homeomorphisms with finite mean dilatations // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 177–186.

4. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.

5. *Крушкаль С. Л.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 517–519.

6. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения: новые методы и приложения. Новосибирск: Наука, 1984.

7. *Кудьявин В. С.* Поведение класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 5. С. 1056–1058.

8. *Kühnau R.* Über Extremalprobleme bei im Mittel quasiconformen Abbildungen // Complex analysis. Fifth Romanian–Finnish Seminar. Berlin: Springer-Verl., 1983. P. 113–124. (Lect. Notes Math.; V. 1013).

9. *Perovich M.* Isolated singularity of the mean quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. 1979. V. 743. P. 212–214.

10. *Песин И. Н.* Отображения, квазиконформные в среднем // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 740–742.

11. *Рязанов В. И.* Об отображениях, квазиконформных в среднем // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 378–388.

12. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 4. С. 859–861.

13. *Ukhlov A., Vodopyanov S. K.* Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Complex Anal. Dynam. Syst. III, Contemp. Math. 2008. V. 455. P. 369–382.

14. *Зорич В. А.* О допустимом порядке роста характеристики квазиконформности в теореме М. А. Лаврентьева // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 3. С. 530–533.

15. *Зорич В. А.* Изолированные особенности отображений с ограниченным искажением // Мат. сб. 1970. Т. 123, № 4. С. 634–638.

16. *Astala K., Iwaniec T., Martin G. J.* Elliptic differential equations and quasiconformal mappings in the plane. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. (Princeton Math. Ser.; V. 48).

17. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. New York: Springer-Verl., 2009. (Springer Monogr. Math.).

18. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the Beltrami equations // Укр. мат. вестн. 2010. Т. 7, № 4. С. 467–515.

19. *Srebro U. Yakubov E.* The Beltrami equation // Handbook in Complex Analysis: Geometric Function Theory. Basel: Elseiver, 2005. V. 2. P. 555–597.

20. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and nonlinear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001.

21. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1361–1376.

22. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes Math.; V. 229).
23. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Contemp. Math. 2004. V. 364. P. 193–203.
24. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. 2005. V. 30, N 1. P. 49–69.
25. *Andreian Cazacu C.* On the length-area dilatation // Complex Var. Theory Appl. 2005. V. 50, N 7–11. P. 765–776.
26. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005.
27. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. New York etc.: Springer-Verl., 1973.
28. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Sci. 2003. V. 22. P. 1397–1420.
29. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 353–393.
30. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. 2004. V. 93, N 1. P. 215–236.
31. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестн.. 2010. Т. 7, № 1. С. 73–87.
32. *Bourbaki N.* Functions of real variable. Berlin: Springer-Verl., 2004.
33. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

Статья поступила 13 апреля 2010 г.

Рязанов Владимир Ильич, Севостьянов Евгений Александрович
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
vlryazanov1@rambler.ru, brusin2006@rambler.ru