Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.95

ЛИУВИЛЛЕВО СВОЙСТВО И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е. А. Мазепа

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение решений полулинейных уравнений на некомпактных римановых многообразиях. Изучается взаимосвязь разрешимости некоторых краевых и внешних краевых задач. Найдены условия выполнения и устойчивости теорем типа Лиувилля для решений полулинейных уравнений на таких многообразиях.

Ключевые слова: лиувиллево свойство, краевая задача, эллиптическое уравнение, риманово многообразие.

§ 1. Введение

Работа посвящена изучению поведения решений некоторых полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях, в частности, на модельных (или сферически-симметричных) многообразиях.

Одним из истоков этой проблематики традиционно указывается классификационная теория некомпактных римановых поверхностей и многообразий. Известная проблема идентификации конформного типа односвязной некомпактной римановой поверхности может быть переформулирована следующим образом: существует ли на данной поверхности нетривиальная положительная супергармоническая функция? Многие проблемы, относящиеся к этому направлению, можно переформулировать в виде теорем типа Лиувилля, утверждающих тривиальность пространств решений некоторых эллиптических уравнений на римановых многообразиях или областях евклидова пространства. Общее представление об истории развития и современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из [1–3].

Первоначально большее внимание уделялось изучению гармонических функций на многообразиях. Считающаяся ныне классической формулировка теоремы Лиувилля утверждает, что всякая ограниченная гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция тождественно постоянна. С другой стороны, класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен. Более того, обнаружены множества некомпактных римановых многообразий, на которых разрешима задача Дирихле о восстановлении гармонической функции по непрерывным граничным данным для случая идеальной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–97004–р_поволжье_а).

границы. Вообще, проблема разрешимости задачи Дирихле о восстановлении решения уравнения по граничным данным на «бесконечности» является в некотором смысле двойственной по отношению к справедливости теорем типа Лиувилля. С этой точки зрения наибольший интерес представляют некомпактные римановы многообразия. Заметим, что сама постановка задачи Дирихле на таких многообразиях может оказаться проблематичной. В некоторых случаях геометрическая компактификация многообразия позволяет сделать это аналогично постановке классической задачи Дирихле в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ (см., например, [4–7]). С другой стороны, в [8] предложен достаточно новый подход к постановке краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях.

Рядом авторов решались аналогичные задачи для уравнений более общих, чем уравнение Лапласа — Бельтрами. Например, рассматривались различные множества решений стационарного уравнения Шрёдингера

$$\Delta u = c(x)u, \tag{1}$$

где $c(x)$ — гладкая неотрицательная функция, и, в частности,

$$\Delta u = u. \tag{2}$$

Известно (см. [9]), что существование ненулевого ограниченного решения уравнения (2) эквивалентно стохастической неполноте рассматриваемого многообразия. Многообразие называют *стохастически полным*, если минимальный винеровский процесс на нем имеет бесконечное время жизни (более подробно о таких многообразиях см. в [10]). Так как для уравнений (1) и (2) ненулевая постоянная не является решением, то и лиувиллево свойство для них формулируется несколько иначе, чем для гармонических функций.

Будем говорить, что на некомпактном многообразии M выполнено *лиувиллево свойство* для ограниченных решений уравнения (1) (аналогично (2)), если любое такое решение есть тождественный нуль.

Отдельный интерес вызывает установление взаимосвязи между выполнением лиувиллева свойства для решений различных эллиптических уравнений и разрешимостью краевых и внешних краевых задач для них на рассматриваемых многообразиях. Изучению указанных вопросов для решений уравнения (1) посвящены работы [8, 11, 12].

В последние годы все более активно изучаются решения уравнения

$$\Delta u = g(x, u) \tag{3}$$

с различными структурными требованиями на правую часть $g(x, \xi)$ (см., например, [13–16]).

Одним из частных случаев уравнения (3) является уравнение вида

$$\Delta u = \phi(|u|)u, \tag{4}$$

где $\phi(\xi)$ — неотрицательная монотонно неубывающая функция при $\xi \geq 0$. Поведение ограниченных решений этого уравнения, вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач, выполнения лиувиллева свойства, а также их устойчивость при вариациях правой части достаточно подробно изучены в [15, 16].

Всюду в работе M — произвольное полное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k, т. е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$.

Доказательство основных результатов опирается на принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений на предкомпактных подмножествах многообразия M (их справедливость доказывается так же, как и для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$, см., например, [17, с. 39, 40]), кроме того, применяются их аналоги для решений полулинейных эллиптических дифференциальных уравнений (доказательства этих утверждений см. в приложении).

§ 2. Лиувиллево свойство для полулинейного уравнения

В данном параграфе будем предполагать, что правая часть уравнения (3) удовлетворяет следующим структурным условиям:

1) $g(x,\xi) \in \mathbf{Lip}(M \times \mathbb{R})$;
2) $g(x,-\xi) = -g(x,\xi)$;
3) $g(x,\xi_1) \geq g(x,\xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$;
4) существует постоянная $A > 0$ такая, что $Ag(x,\xi) \geq \xi$ для всех $\xi \geq 0$.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть G_1, G_2 — некоторые предкомпактные области многообразия M такие, что $B \subset G_1$ и $\overline{G_1} \subset G_2$. Обозначим

$$M_i(v) = \sup_{\partial G_i} v, \quad m_i(v) = \inf_{\partial G_i} v, \quad a^+ = \max\{0,a\}, \quad a^- = \min\{0,a\}.$$

Теорема 1. *На полном некомпактном римановом многообразии M для ограниченных решений уравнения* (3) *не справедливо лиувиллево свойство тогда и только тогда, когда на $M \setminus B$ существует ненулевое ограниченное решение $v(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям*

$$M_1(v) < M_2(v^+), \quad m_1(v) > m_2(v^-). \tag{5}$$

Теорема 2. *На полном некомпактном римановом многообразии M для ограниченных решений уравнения* (3) *справедливо лиувиллево свойство тогда и только тогда, когда на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения* (2).

Замечание 1. Аналогичное теореме 1 утверждение для решений уравнения (1) было получено в [11], аналоги теорем 1 и 2 для решений уравнения (4) — в [15] и [16].

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения* (3), *то на M существует и нетривиальное неотрицательное ограниченное решение этого уравнения.*

Доказательство леммы 1. Пусть $u_0 \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения (3) на M. Покажем, что на M существует неотрицательное ограниченное решение этого уравнения.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\Delta u_k = g(x,u_k) \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = u_0^+|_{\partial B_k}. \tag{6}$$

Решения u_k существуют в силу структурных условий 1–3 для уравнения (3) (см. [17, с. 347–351]).

Рассмотрим два случая: $u_0^+ \equiv 0$ и $u_0^+ \not\equiv 0$. В первом случае имеем $u_0 \leq 0$ на M. Тогда в силу нечетности функции $g(x,\xi)$ по второму аргументу (см. структурное условие 2), функция $-u_0$ является нетривиальным неотрицательным решением уравнения (3) на M.

Пусть теперь $u_0^+ \not\equiv 0$. Тогда, учитывая принцип максимума (см. приложение) для решений задачи (6), для всех k имеем $0 \leq u_k \leq \sup\limits_M u_0^+$. Кроме того, в B_k будет

$$\Delta u_0 = g(x,u_0), \quad u_0|_{\partial B_k} \leq u_0^+|_{\partial B_k} = u_k|_{\partial B_k}.$$

Применяя принцип сравнения 1 (см. приложение), получаем $u_k \geq u_0$ в B_k и, следовательно, $u_k \geq u_0^+$ в B_k для всех k.

Используя внутренние оценки градиентов в комбинации с внутренними оценками в пространстве Гёльдера $C^\gamma(\Omega)$, $0<\gamma<1$, производных (см., например, [17, с. 294, 346]) для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M$, выводим, что семейство функций $g_k(x) = g(x,u_k(x))$ имеет равномерно ограниченные нормы в $C^\gamma(\Omega)$. Тогда с учетом внутренних оценок Шаудера [17, с. 91, 94, 95] получаем компактность семейства $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$. Последнее условие влечет существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является нетривиальным ограниченным неотрицательным решением уравнения (3) на M. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(x)$ — ненулевое ограниченное решение уравнения (3) на M. Положим $v(x) \equiv u(x)$ на $M \setminus B$. Тогда функция $v(x)$ является ненулевым ограниченным решением уравнения (3) на $M\setminus B$. Условия (5) выполняются в силу принципа максимума (см. приложение). Необходимость доказана.

Докажем достаточное условие. Пусть $v(x)$ — ограниченное решение уравнения (3) на $M \setminus B$, для которого выполняются условия (5). Обозначим $K = \sup\limits_{M\setminus B} |v|$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ — исчерпание многообразия M. Без ограничения общности можем считать, что $\overline{G}_2 \subset B_k$ для всех k. Рассмотрим последовательность функций u_k, которые являются решениями следующих задач:

$$\Delta u_k = g(x,u_k) \quad \text{в } B_k, \ u_k|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k}.$$

Тогда в силу принципа максимума (см. приложение) для всех k имеем

$$|u_k| \leq \sup_{B_k} |u_k| = \sup_{\partial B_k} |u_k| \leq K.$$

Как и при доказательстве леммы 1, получаем компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ для произвольного компактного подмножества $\Omega \subset M$. Последнее условие влечет существование функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения (3) на M. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Предположим противное: $u \equiv 0$. Рассмотрим последовательность функций $w_k = v - u_k$, каждая из которых является решением уравнения $\Delta w_k - c_k w_k = 0$, где

$$c_k = \frac{g(x,v) - g(x,u_k)}{v-u_k} \text{ при } w_k \neq 0, \quad c_k = 0 \text{ при } w_k = 0.$$

Ясно, что $c_k \ge 0$. Кроме того, для всех k имеет место равенство $w_k|_{\partial B_k} = 0$, и $w_k \to v$ при $k \to \infty$. Тогда в силу выполнения условий (5) для функции v при достаточно больших k имеем

$$M_1(w_k) < M_2\big(w_k^+\big), \quad m_1(w_k) > m_2(w_k^-). \tag{7}$$

Применяя принцип максимума для решений эллиптических уравнений к функции w_k в $B_k \setminus \overline{G}_1$ (см., например, [17, с. 39, 40]), приходим к неравенствам

$$M_1\big(w_k^+\big) \ge M_2(w_k), \quad m_1\big(w_k^-\big) \le m_2(w_k). \tag{8}$$

Объединяя условия (7) и (8), легко получить

$$M_2(w_k) \le 0, \quad M_1(w_k) < 0. \tag{9}$$

Действительно, рассмотрим два случая: $M_2\big(w_k^+\big) > 0$ и $M_2\big(w_k^+\big) = 0$. Если $M_2\big(w_k^+\big) > 0$, то $M_2(w_k) = M_2\big(w_k^+\big) > 0$, и из (7) и (8) имеем

$$M_1(w_k) < M_2\big(w_k^+\big) = M_2(w_k) \le M_1\big(w_k^+\big).$$

Последнее неравенство возможно лишь в случае, если $M_1(w_k) < 0$ и $M_1\big(w_k^+\big) = 0$. Тогда ввиду (8) $M_2(w_k) \le 0$. Пришли к противоречию с тем, что $M_2(w_k) > 0$.

Значит, единственно возможный вариант, когда $M_2\big(w_k^+\big) = 0$. Из (7) имеем $M_1\big(w_k^+\big) = 0$, $M_1(w_k) < 0$, а из (8) — $M_2(w_k) \le 0$.

Аналогично получаем

$$m_2(w_k) \ge 0 \quad \text{и} \quad m_1(w_k) > 0,$$

что невозможно одновременно с (9). Таким образом, $u \not\equiv 0$, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Заметим сначала, что если структурное условие 4, наложенное на функцию $g(x,\xi)$, выполнено с некоторой константой $A < 1$, то оно будет выполнено и при $A \ge 1$. Поэтому без ограничения общности можем считать $A \ge 1$.

Достаточность. Предположим противное. Пусть на M существует функция $u_0 \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения (3). По лемме 1 можем считать, что $u_0 \ge 0$. Покажем, что на M существует нетривиальное неотрицательное ограниченное решение уравнения

$$\Delta u = Ag(x,u). \tag{3a}$$

Рассмотрим решения следующих краевых задач:

$$\Delta u_k = Ag(x,u_k) \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}.$$

Так как $0 \le u_k \le \sup\limits_M u_0$, существует функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, причем $0 \le u \le \sup\limits_M u_0$. Кроме того, $0 \le \Delta u_0 = g(x,u_0) \le Ag(x,u_0)$ в B_k, тогда с учетом принципа сравнения 1 (см. приложение) выполнено $0 \le u_k \le u_0$ и, следовательно, $0 \le u \le u_0$. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Рассмотрим функции w_k, $\bar{u}_k$, $\bar{v}_k$, которые являются решениями соответствующих краевых задач в области B_k:

$$\Delta w_k = 0, \quad w_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k},$$

$$\Delta\bar{v}_k = -g(x,u_0), \quad \bar{v}_k|_{\partial B_k} = 0, \quad \Delta\bar{u}_k = -Ag(x,u_k), \quad \bar{u}_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Ясно, что $\Delta w_k = \Delta(u_k+\bar{u}_k) = 0$ и $w_k|_{\partial B_k} = (u_k+\bar{u}_k)|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$. С другой стороны, $\Delta w_k = \Delta(u_0 + \bar{v}_k) = 0$ и $w_k|_{\partial B_k} = (u_0 + \bar{v}_k)|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$. Тогда по теореме единственности для гармонических функций в каждой области B_k выполнено $w_k = \bar{u}_k + u_k$, $w_k = \bar{v}_k + u_0$. Кроме того, $u_0 \le w_k \le \sup\limits_M u_0$ и $u_k \le w_k \le \sup\limits_M u_0$, следовательно, $\bar{v}_k \ge 0$ и $\bar{u}_k \ge 0$.

Покажем, что $\bar{u}_k \le A\bar{v}_k$ (где $A \ge 1$ — константа, определенная выше). Действительно, так как функция $g(x,\xi)$ монотонно не убывает по второму аргументу (см. структурное условие 3), из условия $0 \le u_k \le u_0$ получаем $0 \le g(x,u_k) \le g(x,u_0)$. Следовательно,

$$\Delta(A\bar{v}_k) = -Ag(x,u_0) \le -Ag(x,u_k) = \Delta\bar{u}_k.$$

Тогда, учитывая равенство $A\bar{v}_k|_{\partial B_k} = \bar{u}_k|_{\partial B_k} = 0$, из принципа сравнения (см. [17, с. 41]) получаем $A\bar{v}_k \ge \bar{u}_k$.

Выберем точку x_0, в которой $u_0(x_0) > \sup\limits_M u_0 - \varepsilon$. Тогда

$$w_k(x_0) > \sup_M u_0 - \varepsilon,$$

$$\bar{v}_k(x_0) = w_k(x_0) - u_0(x_0) \le \sup_M u_0 - u_0(x_0) < \varepsilon,$$

$$\bar{u}_k(x_0) < A\bar{v}_k(x_0) < A\varepsilon, \quad u_k(x_0) = w_k(x_0) - \bar{u}_k(x_0) > \sup_M u_0 - (A+1)\varepsilon.$$

При $k \to \infty$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем

$$u(x_0) \ge \sup_M u_0 - (A+1)\varepsilon > 0.$$

Таким образом, функция $u \not\equiv 0$ является неотрицательным ограниченным решением уравнения (3a).

Покажем теперь, что на M существует положительное ограниченное решение уравнения (2). Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\Delta u_k - u_k = 0 \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}.$$

Учитывая принцип максимума для стационарного уравнения Шрёдингера (см. [17, с. 39, 40]), для всех k имеем $0 \le u_k \le \sup\limits_M u$.

Так как $\Delta u_k = u_k \le Ag(x,u_k)$ (в силу выполнения структурного условия 4) и $\Delta u = Ag(x,u)$, $u_k|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}$, применяя принцип сравнения 1 (см. приложение), получаем $u_k \ge u \ge 0$ в B_k.

Как и в лемме 1, доказывается существование предельной функции для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая, в свою очередь, является положительным ограниченным решением уравнения (2) на M, что противоречит условию.

Необходимость. Предположим противное. Пусть на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения (2). Тогда на M существуют положительное ограниченное решение этого уравнения v_0 (см., например, [15]).

Положим $C = \sup\limits_M v_0 > 0$. Покажем сначала, что на M существует нетривиальное неотрицательное ограниченное решение уравнения (3a).

Как и выше, рассмотрим последовательность решений следующих краевых задач:

$$\Delta u_k = Ag(x,u_k) \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = v_0|_{\partial B_k}.$$

Так как $0 \le u_k \le \sup\limits_M v_0$, как и выше, существует предельная функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, причем $0 \le u \le C$. Кроме того, $\Delta v_0 = v_0 \le Ag(x, v_0)$ (см. структурное условие 4). С учетом принципа сравнения 1 из приложения в B_k выполнено $0 \le u_k \le v_0$ для любого k и, следовательно, $0 \le u \le v_0$. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Рассмотрим функции w_k, $\bar{u}_k$, $\bar{v}_k$, которые являются решениями соответствующих краевых задач в области B_k:

$$\Delta w_k = 0, \quad w_k|_{\partial B_k} = v_0|_{\partial B_k},$$

$$\Delta \bar{v}_k = -v_0, \quad \bar{v}_k|_{\partial B_k} = 0,$$

$$\Delta \bar{u}_k = -Ag(x, u_k), \quad \bar{u}_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Как и при доказательстве достаточного условия, по теореме единственности имеем $w_k = u_k + \bar{u}_k$, $w_k = v_0 + \bar{v}_k$, причем $\Delta v_0 = v_0 > 0$, $\Delta u_k = Ag(x, u_k)$, стало быть, $0 \le u_k \le v_0 \le w_k \le C$ и соответственно $\bar{u}_k \ge 0$, $\bar{v}_k \ge 0$.

Так как $g(x,\xi) \in \mathrm{Lip}(M \times \mathbb{R})$ (см. структурное условие 1), существует константа $C_1 > 0$ такая, что $|g(x,\xi_1) - g(x,\xi_2)| \le C_1|\xi_1 - \xi_2|$. Полагая $\xi_1 = v_0 > 0$, $\xi_2 = 0$, получим неравенство $g(x, v_0) \le C_1 v_0$. Тогда для всех k в B_k выполнено

$$\Delta(\bar{u}_k) = -Ag(x, u_k) \ge -Ag(x, v_0) \ge -AC_1 v_0 = \Delta(AC_1 \bar{v}_k).$$

Кроме того, $\bar{u}_k|_{\partial B_k} = \bar{v}_k|_{\partial B_k} = 0$. Из принципа сравнения (см. [17, с. 41]) получаем $\bar{u}_k \le AC_1 \bar{v}_k$.

Выберем точку $x_0 \in M$, в которой $v_0(x_0) > C - \varepsilon$. Для достаточно больших k справедливы следующие неравенства:

$$w_k(x_0) \ge v_0(x_0) > C - \varepsilon,$$

$$\bar{v}_k(x_0) = w_k(x_0) - v_0(x_0) \le C - v_0(x_0) < \varepsilon,$$

$$\bar{u}_k(x_0) \le AC_1 \bar{v}_k(x_0) < AC_1 \varepsilon,$$

$$u_k(x_0) = w_k(x_0) - \bar{u}_k(x_0) > C - \varepsilon - AC_1\varepsilon = C - \varepsilon(1 + AC_1).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $u(x_0) \ge C - \varepsilon(1 + AC_1) > 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Значит, функция $u \ge 0$ является нетривиальным ограниченным решением уравнения (3*a*).

Так как $A \ge 1$, для всех $x \in M$ и для любого $\xi \ge 0$ выполнено $g(x,\xi) \le Ag(x,\xi)$. Из существования нетривиального неотрицательного ограниченного решения для уравнения (3*a*) следует существование аналогичного решения для уравнения (3).

Действительно, рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}.$$

Учитывая принцип максимума (см. приложение), для всех k имеем $0 \le u_k \le \sup\limits_M u$. Так как

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \le Ag(x, u_k), \quad \Delta u = Ag(x, u), \quad u_k|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k},$$

применяя принцип сравнения 1, получаем $u_k \ge u \ge 0$ в B_k, причем $u \not\equiv 0$.

В заключение, как и в лемме 1, доказывается существование предельной функции для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая, в свою очередь, является нетривиальным ограниченным решением уравнения (3) на M. Получили противоречие с условием. Теорема доказана.

Наряду с уравнением (3) рассмотрим уравнение

$$\Delta u = g_1(x, u), \tag{3b}$$

где функция $g_1(x,\xi)$ удовлетворяет структурным условиям 1–4, $g_1(x,\xi) \not\equiv 0$ при $\xi \geq 0$ и $0 \leq g_1(x,\xi) \leq A^* g(x,\xi)$ для некоторой константы $A^* > 0$.

Теорема 3. *Пусть на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения* (3*b*). *Тогда лиувиллево свойство выполнено и для ограниченных решений уравнения* (3).

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала случай, когда $g_1(x,\xi) \leq g(x,\xi)$ для $\xi \geq 0$. Пусть существует функция $u_0 \not\equiv 0$ — ограниченное решение уравнения (3), т. е. $\Delta u_0 = g(x, u_0)$ на M. Покажем, что на M существует неотрицательное ограниченное решение уравнения $\Delta u = g_1(x,u)$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задач

$$\Delta u_k = g_1(x, u_k) \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = u_0^+|_{\partial B_k}.$$

Можем считать, что $u_0^+ \not\equiv 0$. Учитывая принцип максимума (см. приложение), для всех k имеем $0 \leq u_k \leq \sup\limits_M u_0$. Так как

$$\Delta u_k = g_1(x, u_k) \leq g(x, u_k), \quad \Delta u_0 = g(x, u_0), \quad u_k|_{\partial B_k} \geq u_0|_{\partial B_k},$$

по принципу сравнения 1 $u_k \geq u_0$ и, следовательно, $u_k \geq u_0^+$ в B_k.

Как и в лемме 1, доказывается существование предельной функции для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая в силу принципа максимума является нетривиальным неотрицательным ограниченным решением уравнения (3b) на M.

Пусть теперь $g_1(x,\xi) \leq A^* g(x,\xi)$ для $\xi \geq 0$, $A^* \geq 1$. Можем считать, что u_0 — неотрицательное ограниченное решение уравнения (3), в противном случае вместо u_0 возьмем u_0^+. Покажем, что на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения $\Delta u = A^* g(x,u)$.

Рассмотрим решения следующих краевых задач:

$$\Delta u_k = A^* g(x, u_k) \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}.$$

С учетом принципа сравнения 1 в B_k выполнено $u_k \leq u_0$. Кроме того, так как $0 \leq u_k \leq \sup\limits_M u_0$, существует функция $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения $\Delta u = A^* g(x,u)$, причем $0 \leq u \leq \sup\limits_M u_0$. Доказательство того, что $u \not\equiv 0$, дословно совпадает с доказательством аналогичного факта в теореме 2 с точностью до замены константы A на A^*. Таким образом, функция u является нетривиальным ограниченным решением уравнения $\Delta u = A^* g(x,u)$. Возвращаясь к случаю, разобранному в начале доказательства, окончательно выводим справедливость теоремы.

Замечание 2. Утверждение леммы 1, теорем 1 и 3, а также достаточное условие теоремы 2 остаются справедливыми, если вместо глобальной липшицевости функции $g(x,\xi)$ на $M \times \mathbb{R}$ потребовать только ее локальную липшицевость на $G \times \mathbb{R}$ для любой подобласти $G \Subset M$.

§ 3. Краевые и внешние краевые задачи для полулинейного уравнения

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на M функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M, и обозначать через $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^0(G)} = \sup\limits_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Ясно, что введенное отношение не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$.

Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной*, если на M существует непрерывная ограниченная функция $w \geq 0$ такая, что $w \sim f$.

Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (3) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (3) такое, что $u \in [f]$.

Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная на ∂B функция. Будем говорить, что для непрерывной на ∂B функции $\Phi(x)$ на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (3) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (3) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Аналогичным образом можно осуществить постановку краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях для уравнений (1), (2), (4) и ряда других эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка (см. [8, 15, 16]).

Заметим, что если многообразие M имеет компактный край или существует естественная геометрическая компактификация многообразия M (например, на многообразиях отрицательной секционной кривизны, на сферически-симметричных многообразиях), добавляющая границу на бесконечности, данный подход естественным образом приводит к классической постановке задачи Дирихле (см., например, [4–6]).

Далее вместо структурных условий 1–4 будем рассматривать следующие условия:

(1a) $g(x, \xi) \in C^{\gamma}(G \times \mathbb{R})$ для любой подобласти $G \Subset M$, $0 < \gamma < 1$;

(2a) $g(x, 0) \equiv 0$;

(3a) $g(x, \xi_1) \geq g(x, \xi_2)$ для всех $\xi_1 > \xi_2$.

Тогда справедлива

Теорема 4. *Пусть на* $M \setminus B$ *для уравнения* (3) *для любой постоянной на* ∂B *функции* Φ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на* M *для уравнения* (3) *разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

Доказательство теоремы 4. Обозначим через v решение внешней краевой задачи для уравнения (3) на $M \setminus B$, удовлетворяющее условиям $v \in [f]$ и $v|_{\partial B} = 0$. Рассмотрим последовательность функций u_k, являющихся решением задач

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \text{ в } B_k, \quad u_k|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k}.$$

Данные решения существуют в силу выполнения структурных условий (1a)–(3a) (см. [17, с. 347–351]).

Как и при доказательстве леммы 1, получаем компактность семейства функций $\{u_k\}$ в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M$. Последнее условие влечет существование функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения (3) на M.

Докажем, что $u \in [f]$. Действительно, в силу непрерывности функции $u(x)$ существуют $U_1 = \min_{\partial B} u(x)$, $U_2 = \max_{\partial B} u(x)$.

Тогда $U_1 \le u|_{\partial B} \le U_2$ и, следовательно, при достаточно больших k выполнено

$$U_1 - 1 \le u_k|_{\partial B} \le U_2 + 1.$$

Пусть $A_1 = \min\{0, U_1 - 1\}$, $A_2 = \max\{0, U_2 + 1\}$. Учитывая, что $v|_{\partial B} = 0$, имеем $A_1 \le v|_{\partial B} \le A_2$ и $A_1 \le u_k|_{\partial B} \le A_2$ для достаточно больших k.

Согласно условию теоремы на $M \setminus B$ существуют решения $v_1 \in [f]$ и $v_2 \in [f]$ уравнения (3), удовлетворяющие условиям

$$v_1|_{\partial B} = A_1, \quad v_2|_{\partial B} = A_2.$$

Так как $v_1 \sim v_2 \sim v$ и $v_1|_{\partial B} \le v|_{\partial B} \le v_2|_{\partial B}$, согласно принципу сравнения 2 (см. приложение) на $M \setminus B$ получаем $v_1 \le v \le v_2$. Тогда для достаточно больших k

$$v_1|_{\partial B_k} \le u_k|_{\partial B_k} = v|_{\partial B_k} \le v_2|_{\partial B_k}, \quad v_1|_{\partial B} \le u_k|_{\partial B} \le v_2|_{\partial B}.$$

Применяя принцип сравнения 1 к функциям u_k, на множестве $B_k \setminus B$ имеем $v_1 \le u_k \le v_2$.

Перейдя к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ получим $v_1 \le u \le v_2$. Учитывая, что $v_1 \sim v_2 \sim v$, получаем $u \sim v$ и, следовательно, $u \in [f]$. Теорема 4 доказана.

Замечание 3. Если f — асимптотически неотрицательная функция, то условие теоремы можно ослабить, потребовав разрешимость внешних краевых задач в классе $[f]$ только для неотрицательных постоянных на ∂B функций.

В следующей теореме исследуются вопросы устойчивости разрешимости краевых и внешних краевых задач при вариациях правой части полулинейного уравнения. Для этого наряду с решениями уравнения (3) будем рассматривать решения уравнений

$$\Delta u = g_i(x, u), \tag{3c}$$

где функции $g_i(x, \xi)$ удовлетворяют структурным условиям (1a)–(3a), $i = 1, 2$, и $g_1(x, \xi) \le g(x, \xi) \le g_2(x, \xi)$.

Теорема 5. *Пусть на $M \setminus B$ для любых постоянных неотрицательных на ∂B функций разрешимы внешние краевые задачи для уравнений* (3c) *при $i = 1, 2$ с граничными условиями из класса $[f]$, где f — асимптотически неотрицательная на M функция. Тогда*

(1) *на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x) \ge 0$ для уравнения* (3) *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$;*

(2) *на M для уравнения* (3) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса $[f]$.*

Доказательство теоремы 5. Пусть $\Phi(x)$ — произвольная непрерывная неотрицательная на ∂B функция, и пусть $C_1 = \sup\limits_{\partial B} \Phi(x) \ge 0$. По условию существует функция u_0 — ограниченное решение внешней краевой задачи для уравнения (3c) при $i = 1$ на $M \setminus B$ такая, что $u_0 \in [f]$ и $u_0|_{\partial B} = A_1|_{\partial B}$. При этом $0 \le u_0 \le K$ на $M \setminus B$, где $K = \sup\limits_{M \setminus B} u_0$.

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, являющихся решением задачи

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \text{ в } B_k \setminus B, \quad u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}, \quad u_k|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}.$$

Учитывая принцип максимума (см. приложение), для всех k имеем

$$0 \le u_k \le \sup_{\partial B_k \cup \partial B} u_k \le K,$$

откуда получаем равномерную ограниченность последовательности функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ на $M \setminus B$ и, стало быть, ее компактность в классе $C^{2,\gamma}(\Omega)$ на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M \setminus B$. Последнее влечет существование предельной функции $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, которая является ограниченным решением уравнения (3) на $M \setminus B$ таким, что $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Кроме того, $\Delta u_0 = g_1(x, u_0) \le g(x, u_0)$, $\Delta u_k = g(x, u_k)$ в B_k, $u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$, $u_k|_{\partial B} \le u_0|_{\partial B}$. С учетом принципа сравнения 1 в $B_k \setminus B$ получаем $u_k \le u_0$. Следовательно, $0 \le u \le u_0$ на $M \setminus B$.

Покажем, что $u \sim u_0$. Согласно условию на $M \setminus B$ существует решение v_0 уравнения (3c) при $i = 2$ такое, что $v_0|_{\partial B} = 0$ и $v_0 \in [f]$. Используя принцип сравнения 2 (см. приложение) на $M \setminus B$, получаем $u_0 \ge v_0 \ge 0$.

Более того, для каждого k имеют место следующие неравенства:

$$\Delta u_k = g(x, u_k) \le g_2(x, u_k) \quad \text{в } B_k \setminus B,$$

$$v_0|_{\partial B} \le u_k|_{\partial B}, \quad v_0|_{\partial B_k} \le u_k|_{\partial B_k}.$$

По принципу сравнения 1 в $B_k \setminus B$ имеем $u_k \ge v_0$ и, следовательно, $u_0 \ge u_k \ge v_0 \ge 0$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$, на $M \setminus B$ получаем $u_0 \ge u \ge v_0$. Так как $u_0 \sim v_0 \sim f$, то $u \sim f$. Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второго утверждения следует из теоремы 4 и замечания 3. Теорема доказана полностью.

В частности, если существуют такие функции $c_i(x) \ge 0$, $c_i(x) \in C^{\gamma}(G)$ (где $i = 1, 2$, $G \Subset M$, $0 < \gamma < 1$), что $g_i(x, \xi) = c_i(x)\xi$ и $c_1(x)\xi \le g(x, \xi) \le c_2(x)\xi$, то справедливо

Следствие. *Пусть на $M \setminus B$ для любой постоянной $C \ge 0$ разрешимы внешние краевые задачи для уравнений $\Delta u = c_i(x)u$ при $i = 1, 2$ с граничными условиями из класса $[f]$, где f — асимптотически неотрицательная на M функция. Тогда*

(1) *на $M \setminus B$ для любой непрерывной на ∂B функции $\Phi(x) \ge 0$ разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (3) *с граничными условиями из класса* $[f]$;

(2) *на M для уравнения* (3) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

§ 4. Лиувиллево свойство и разрешимость задачи Дирихле для полулинейных уравнений на модельных многообразиях

В данном параграфе будут получены критерии выполнения лиувиллева свойства и разрешимости задачи Дирихле для уравнения (3) на модельных многообразиях.

Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B — некоторый компакт, D изометрично прямому произведению $R_+ \times S$ (где $R_+ = (0, +\infty)$, а S — компактное риманово многообразие) с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)\, d\theta^2.$$

Здесь $q(r)$ — положительная гладкая на R_+ функция, $d\theta^2$ — метрика на S. Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство, пространство Лобачевского, поверхность, полученная вращением графика функции $f(r)$ вокруг луча Or в $\mathbb{R}^n$, и др.

Пусть функция $g(x, \xi)$ удовлетворяет структурным условиям (1а)–(3а) § 3 и существуют такие функции $c_i(x) \geq 0$, $c_i(x) \in C^\gamma(G)$, (где $i = 1, 2$, $G \Subset M$, $0 < \gamma < 1$), что на D выполнено условие $c_1(r)\xi \leq g(x, \xi) \leq c_2(r)\xi$.

Будем говорить, что на многообразии M *однозначно разрешима задача Дирихле*, если для любой непрерывной на S функции $\Phi(\theta)$ существует единственное решение $u(x)$ уравнения (1) (соответственно, (2), (3)), удовлетворяющее условию $\lim\limits_{r\to\infty} u(r, \theta) = \Phi(\theta)$.

Будем говорить, что на многообразии M *однозначно разрешима внешняя краевая задача Дирихле*, если для любых непрерывных на S функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ существует единственное решение $u(x)$ уравнения (1) (соответственно (2), (3)), удовлетворяющее условиям $u(r_0, \theta) = \Psi(\theta)$, $\lim\limits_{r\to\infty} u(r, \theta) = \Phi(\theta)$.

Введем обозначения:

$$I = \int\limits_{r_0}^{\infty} q^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^{t} q^{n-3}(\beta)\, d\beta \right) dt, \quad K = \int\limits_{r_0}^{\infty} q^{1-n}(t)\, dt,$$

$$J = \int\limits_{r_0}^{\infty} q^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^{t} q^{n-1}(\beta)\, d\beta \right) dt, \quad J_i = \int\limits_{r_0}^{\infty} q^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^{t} c_i(\beta) q^{n-1}(\beta)\, d\beta \right) dt,$$

где $r_0 = \mathrm{const} > 0$, $n = \dim M$, $i = 1, 2$, и переформулируем в этих обозначениях следующие утверждения из [5].

Лемма [5]. *Пусть риманово многообразие M таково, что $I + J_2 < \infty$. Тогда для любых непрерывных на S функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$ существуют единственные решения $u_i(r, \theta)$ внешних краевых задач Дирихле на $M \setminus B$ для уравнений $\Delta u - c_i(x)u = 0$ ($i = 1, 2$).*

Теорема [5]. (α) *Если риманово многообразие M таково, что $I + J_2 < \infty$, то для любой непрерывной на S функции $\Phi(\theta)$ на M однозначно разрешима задача Дирихле для уравнений $\Delta u - c_i(x)u = 0$ ($i = 1, 2$).*

(β) *Если M таково, что $I = \infty$, $J_2 < \infty$ и $c_1(x) \not\equiv 0$, то на M существуют нетривиальные ограниченные решения $u_i(x)$ уравнений $\Delta u - c_i(x)u = 0$ ($i = 1, 2$), для которых существуют конечные пределы $\lim\limits_{r\to\infty} u_i(r, \theta)$, не зависящие от θ.*

(γ) *Если M таково, что на нем выполнено хотя бы одно из условий $K = \infty$ или $J_1 = \infty$ и $c_1(x) \not\equiv 0$, то на M выполнено лиувиллево свойство для уравнений $\Delta u - c_i(x)u = 0$ ($i = 1, 2$).*

Если же $c_i(x) \equiv 0$ и M таково, что $I = \infty$, то на нем всякая ограниченная гармоническая функция является тождественной константой.

Замечание 4. При формулировке результатов используется тот факт, что расходимость интеграла $I = \infty$ влечет расходимость интеграла $J = \infty$ (см. [12]).

Как следствия из результатов § 2, 3, а также из [5] сформулируем необходимые и достаточные условия выполнения лиувиллева свойства и разрешимости задачи Дирихле для ограниченных решений уравнения (3) на модельном многообразии M.

Теорема 6. (α) *Если риманово многообразие M таково, что $I + J_2 < \infty$, то для любых непрерывных на S функций $\Phi(\theta) \geq 0$ и $\Psi(\theta) \geq 0$ однозначно разрешимы на M задача Дирихле, а на $M \setminus B$ — внешняя краевая задача Дирихле для уравнения* (3).

(β) *Если риманово многообразие M таково, что $I = \infty$, $J_2 < \infty$, то для любой непрерывной на S функции $\Psi(\theta) \geq 0$ и любой константы $C \geq 0$ для уравнения* (3) *на M существует единственное ограниченное решение $u(x)$ такое, что $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) = C$, и на $M \setminus B$ существует единственное ограниченное решение $u(x)$ такое, что $u(r_0,\theta) = \Psi(\theta)$, $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\theta) = C$.*

Далее будем считать, что функция $g(x,\xi)$ удовлетворяет структурным условиям 1–4 § 2. Тогда справедлива

Теорема 7. *На M для ограниченных решений уравнения* (3) *выполнено лиувиллево свойство тогда и только тогда, когда многообразие M таково, что $K = \infty$ или $J = \infty$.*

Замечание 5. Пусть M — полное риманово многообразие, представимое в виде $M = B \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_p$, где B — некоторый компакт, а каждая область D_i изометрична прямому произведению $\mathbb{R}_+ \times S_{i1} \times S_{i2} \times \dots \times S_{ik}$ (где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, а S_{ij} — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = h_i^2(r)\,dr^2 + q_{i1}^2(r)\,d\theta_{i1}^2 + \dots + q_{ik}^2(r)\,d\theta_{ik}^2.$$

Здесь $h_i(r)$ и $q_{ij}(r)$ — положительные гладкие на $\mathbb{R}_+$ функции, $d\theta_{ij}^2$ — метрика на S_{ij}.

Используя результаты работ [7, 18], несложно получить утверждения, аналогичные теоремам 6 и 7.

Приложение

Предложение 1 (принцип сравнения 1). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное подмножество и $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяют в Ω неравенствам $\Delta u \geq g(x,u)$, $\Delta v \leq g(x,v)$ и $u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}$. Тогда $u \leq v$ в Ω.*

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Обозначим через $D = \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\} \neq \varnothing$ открытое подмножество в Ω. Пусть D_0 — одна из его компонент связности такая, что $u > v$ внутри D_0 и $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$. Рассмотрим в D_0 функцию $w = u - v > 0$. При этом $w|_{\partial D_0} = 0$ и $\Delta w = \Delta u - \Delta v \geq g(x,u) - g(x,v) \geq 0$ в D_0 (в силу монотонности функции $g(x,\xi)$ по второму аргументу). Применяя к функции w в D_0 принцип максимума для субгармонических функций, имеем $w \leq 0$, что противоречит выбору области D_0.

Предложение 2 (принцип максимума). *Пусть $\Omega \subset M$ — предкомпактное подмножество и $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω неравенству $\Delta u \geq g(x,u)$ ($\Delta u \leq g(x,u)$). Тогда $\sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$ ($\inf\limits_{\Omega} u \geq \inf\limits_{\partial\Omega} u^-$). Если же $\Delta u = g(x,u)$ в Ω, то $\sup\limits_{\Omega} |u| = \sup\limits_{\partial\Omega} |u|$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $v = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ \geq 0$, которая в Ω удовлетворяет неравенству $\Delta v \leq g(x, v)$. По условию для функции u выполнено $\Delta u \geq g(x, u)$. Тогда

$$\Delta u \geq g(x, u), \quad \Delta v \leq g(x, v), \quad u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}.$$

Применяя принцип сравнения 1 к функциям u и v в Ω, имеем $u \leq v$, т. е. $u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$. Следовательно, $\sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$.

Аналогично доказывается второе неравенство $\inf\limits_{\Omega} u \geq \inf\limits_{\partial\Omega} u^-$.

Пусть теперь $\Delta u = g(x, u)$ в Ω, что, в свою очередь, равносильно одновременному выполнению в Ω двух неравенств $\Delta u \geq g(x, u)$ и $\Delta u \leq g(x, u)$. Тогда по первой части доказательства имеем

$$\inf_{\partial\Omega} u^- \leq u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+. \tag{10}$$

С другой стороны, справедливы неравенства

$$\sup_{\partial\Omega} u^+ \leq \sup_{\partial\Omega} |u|, \quad \inf_{\partial\Omega} u^- \geq -\sup_{\partial\Omega} |u|. \tag{11}$$

Объединяя (10) и (11), получим $-\sup\limits_{\partial\Omega} |u| \leq u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} |u|$, т. е. в Ω выполнено $|u| \leq \sup\limits_{\partial\Omega} |u|$ и, следовательно,

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Так как Ω — предкомпактное подмножество в M и $u \in C^0(\overline{\Omega})$, то

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\overline{\Omega}} |u| \geq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Последние два неравенства влекут выполнение окончательного равенства

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Предложение 3 (принцип сравнения 2). *Пусть $\Delta v \leq g(x, v)$, $\Delta u \geq g(x, u)$ на $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на $M \setminus B$.*

Пусть $\Delta v \leq g(x, v)$, $\Delta u \geq g(x, u)$ на M и $v \sim u$. Тогда $v \geq u$ на M.

Доказательство. Допустим, что первое утверждение неверно. Обозначим через $D = \{x \in M \setminus B : u(x) > v(x)\} \neq \varnothing$ открытое подмножество в $M \setminus B$. Пусть D_0 — одна из ограниченных компонент связности подмножества D такая, что $u > v$ внутри D_0 и $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$. Рассмотрим в D_0 функцию $w = u - v > 0$. При этом $w|_{\partial D_0} = 0$ и $\Delta w = \Delta u - \Delta v \geq g(x, u) - g(x, v) \geq 0$ в D_0 (в силу монотонности функции $g(x, \xi)$ по второму аргументу). Применяя к функции w в D_0 принцип максимума для субгармонических функций, имеем $w \leq 0$, что противоречит выбору области D_0.

Пусть теперь D_0 — одна из неограниченных компонент связности, для которой выполнено $u|_{\partial D_0} = v|_{\partial D_0}$, $v < u$ внутри D_0 и $v \sim u$ в D_0, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \|v(x) - u(x)\|_{C^0((M\setminus B_k)\cap D_0)} = 0$. Как и выше, рассмотрим в D_0 функцию $w = u - v > 0$. При этом $w|_{\partial D_0} = 0$, $\Delta w = \Delta u - \Delta v \geq g(x, u) - g(x, v) \geq 0$ в D_0 и $v \sim 0$. По принципу максимума для субгармонических функций в D_0 (см., например, [8]) получаем $w \leq 0$; приходим к противоречию.

Доказательство второго утверждения проводится аналогично.

Из принципа сравнения непосредственно следует теорема единственности решений краевых и внешних краевых задач для уравнения (3).

Предложение 4 (теорема единственности). *Пусть* $\Delta v = g(x, v)$ *и* $\Delta u = g(x, u)$ *на* $M \setminus B$ *и* $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $w = u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $\Delta v = g(x, v)$, $\Delta u = g(x, u)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v = u$ *на* M.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grigor'yan A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 135–249.
2. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behavior of positive solutions of non-linear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 525–598.
3. *Serrin J., Zou H.* Cauchy–Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities // Acta Math. 2002. V. 189, N 1. P. 79–142.
4. *Anderson M. T., Schoen R.* Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature // Ann. Math. 1985. V. 121. P. 429–461.
5. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях // Изв. вузов. Математика. 1999. № 6. С. 41–49.
6. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на некомпактных римановых многообразиях специального вида // Докл. РАН. 1999. Т. 367, № 2. С. 166–167.
7. *Лосев А. Г., Мазепа Е. А.* Ограниченные решения уравнения Шрёдингера на римановых произведениях // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 1. С. 84–110.
8. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 591–599.
9. *Davies E. B.* L^1 properties of second order elliptic operators // Bull. London Math. Soc. 1985. V. 17, N 5. P. 417–436.
10. *Grigor'yan A.* Heat kernel and analysis on manifolds // AMS/IP Stud. Adv. Math. 2009. V. 47. P. 1–484.
11. *Григорьян А. А., Надирашвили Н. С.* Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Математика. 1987. № 5. С. 25–33.
12. *Лосев А. Г.* О взаимосвязи некоторых лиувиллевых теорем на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Математика. 1997. № 10. С. 31–37.
13. *Коньков А. А.* Поведение решений квазилинейных эллиптических неравенств // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 2004. Т. 7. С. 3–158. (Итоги науки и техники).
14. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сб. 1988. Т. 135, № 3. С. 346–360.
15. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи и лиувиллевы теоремы для полулинейных эллиптических уравнений на римановых многообразиях // Изв. вузов. Математика. 2005. № 3. С. 59–66.
16. *Мазепа Е. А.* О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 1. С. 153–156.
17. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 2007.
18. *Лосев А. Г.* О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 87–93.

Статья поступила 21 октября 2010 г.

Мазепа Елена Алексеевна
Волгоградский гос. университет,
кафедра фундаментальной информатики и оптимального управления,
Университетский пр., 100, Волгоград 400062
`lmazepa@rambler.ru`