Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.543.7+512.542

ЭКОНОМНОЕ ПРИСОЕДИНЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ К ГРУППАМ

Д. В. Баранов, Ант. А. Клячко

Аннотация. Насколько нужно увеличить группу, чтобы в получившейся группе все элементы исходной группы являлись квадратами? Мы даем довольно точный ответ на этот вопрос (наилучшая возможная оценка сверху отличается от полученной оценки не более, чем в два раза) и формулируем несколько открытых вопросов на эту тему.

Ключевые слова: уравнение над группой, присоединение корней, сплетение.

Введение

Исследованию разрешимости уравнений над группами посвящено множество работ (см., например, работы [1–14] и литературу в них). В этих статьях доказывается, что при тех или иных условиях уравнение $w(x) = 1$ с коэффициентами из группы G *разрешимо над* G, т. е. найдутся группа H, содержащая G в качестве подгруппы, и элемент $h \in H$ такой, что $w(h) = 1$. В настоящей работе мы пытаемся исследовать количественный вопрос: *насколько большой должна быть такая группа* H*?* Даже для простых уравнений, разрешимость которых давно известна, этот вопрос оказывается весьма трудным, и мы ограничиваемся изучением простейшего нетривиального уравнения $x^2 = g$.

Разумеется, ответ сильно зависит от исходной группы G. Например, если порядок группы G нечетный, то при любом $g \in G$ в качестве H можно взять саму группу G; если группа G циклическая, то при любом $g \in G$ в качестве H достаточно взять группу вдвое большего порядка, и т. д. Наиболее интересно, конечно, оценить порядок группы H «в худшем случае». Нам удается получить оценку, отличающуюся от наилучшей не более, чем в два раза, в следующем смысле.

Основная теорема. *Каждая конечная группа G вкладывается в группу порядка $2|G|^2$, в которой все элементы группы G являются квадратами. Существует бесконечно много попарно неизоморфных конечных групп G_i таких, что для некоторого $g_i \in G_i$ группа, содержащая G_i в качестве подгруппы и элемент, квадрат которого равен g_i, имеет порядок не меньше, чем $|G_i|^2$.*

Кроме задачи решения одного уравнения $x^2 = g$ можно рассмотреть и задачу одновременного решения всех уравнений такого вида. Из основной теоремы ясно, что и в этом случае также всегда достаточно группы порядка $2|G|^2$, но не всегда достаточно группы порядка, меньшего $|G|^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00945).

Про поведение множества решений уравнений в конечных группах многое известно (см., например, [15–18] и литературу в них). К сожалению, нам не удалось воспользоваться этими нетривиальными результатами.

Первое утверждение теоремы не является новым и легко доказывается (см. § 1). В § 2 доказано второе утверждение. В § 3 сформулированы несколько открытых вопросов об экономном присоединении решений уравнений к группам.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky}, x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$ соответственно. Если X — подмножество некоторой группы, то $|X|$, $\langle X\rangle$ и $\langle\langle X\rangle\rangle$ означают соответственно мощность множества X, подгруппу, порожденную множеством X, и нормальную подгруппу, порожденную множеством X. Буква $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел. Символ $\mathbb{Z}_n$ обозначает группу или кольцо $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ вычетов по модулю n. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_n$ обозначается через $\mathbb{Z}_n^*$, группа автоморфизмов группы G — через $\operatorname{Aut} G$. Символ D_p обозначает диэдральную группу порядка $2p$. Стабилизатор точки a при действии группы G обозначается через $\mathrm{St}_G(a)$. *Отражением* мы называем элемент группы D_p, не лежащий в ее подгруппе $\mathbb{Z}_p$.

Авторы благодарят анонимного рецензента за ценные замечания.

§ 1. Сплетения и доказательство первого утверждения теоремы

Первое утверждение теоремы хорошо известно [13]: сплетение

$$G \wr \mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \mid g_1, g_2 \in G \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix} \mid g_1, g_2 \in G \right\}$$

группы G и циклической группой порядка 2 является группой порядка $2|G|^2$ и содержит квадратные корни из всех элементов группы G, если считать, что группа G вложена в сплетение $G \wr \mathbb{Z}_2$ диагональным образом:

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. Это простейший частный случай теоремы Левина, полную формулировку мы приводим в § 3.

§ 2. Диэдральные группы и доказательство второго утверждения теоремы

Второе утверждение основной теоремы немедленно вытекает из следующего факта.

Теорема 1. *Пусть $p \in 4\mathbb{Z} + 3$ — простое число, $\widetilde{G}$ — группа, содержащая диэдральную подгруппу $G = D_p$, и отражение $g \in G$ является квадратом некоторого элемента $x \in \widetilde{G}$. Тогда $|\widetilde{G}| \geq |G|^2$.*

Для доказательства нам потребуются несколько несложных лемм.

Лемма 1. *Если H_1 и H_2 — подгруппы некоторой группы H, то $|H| \geq \frac{|H_1||H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = |H_1 H_2|$.*

Доказательство этой несложной леммы оставляем читателю.

Лемма 2. *Пусть* $D_p = G \subseteq \langle G, x\rangle = \widetilde{G}$ *и* $x^2 = g$, *где* $g \in G$ *— отражение. Тогда либо* $G \triangleleft \widetilde{G}$, *либо* $G \cap G^x = \langle g\rangle$.

Доказательство. Очевидно, что $g \in G \cap G^x$. В D_p существуют всего две подгруппы, содержащие g. Если $G \cap G^x = \langle g\rangle$, то все доказано. Если же $G \cap G^x = G$, то $G = G^x$. Но тогда $G \triangleleft \widetilde{G}$, так как $\langle G, x\rangle = \widetilde{G}$.

Лемма 3. *Пусть* $D_p = G \triangleleft \widetilde{G}$, *где* $p \in 3+4\mathbb{Z}$ *— простое число. Тогда никакое отражение* $g \in G$ *не является квадратом в* $\widetilde{G}$.

Доказательство. Подгруппа $\mathbb{Z}_p \subset D_p = G \triangleleft \widetilde{G}$ является коммутантом группы G и, следовательно, характеристична в G и нормальна в $\widetilde{G}$. Группа $\widetilde{G}$ действует на $\mathbb{Z}_p$ сопряжениями. При этом отражение g действует как $-1 \in \mathbb{Z}_p^* = \operatorname{Aut}\mathbb{Z}_p$, но -1 не является, как известно, квадратом в $\mathbb{Z}_p^*$, если $p \in 3+4\mathbb{Z}$, что и доказывает лемму.

Приступим к доказательству теоремы 1. Можно считать, что $\widetilde{G} = \langle G, x\rangle$. Пусть K — множество всех подгрупп группы $\widetilde{G}$, сопряженных с G. Тогда $\widetilde{G}$ транзитивно действует на K сопряжениями.

Лемма 4. $|\widetilde{G}| \geq |K| \cdot |G|$.

Доказательство. $|\widetilde{G}| = |K| \cdot |\operatorname{St}_{\widetilde{G}}(G)| \geq |K| \cdot |G|$, так как $G \subseteq \operatorname{St}_{\widetilde{G}}(G)$.

Рассмотрим полный неориентированный граф Γ с множеством вершин K. Назовем ребро (G^{h_1}, G^{h_2}) *зеленым*, если $|G^{h_1} \cap G^{h_2}| = 2$, *желтым*, если $|G^{h_1} \cap G^{h_2}| = p$, и *красным*, если $|G^{h_1} \cap G^{h_2}| = 1$. Ясно, что все ребра покрашены. Если есть хотя бы одно ребро красного цвета, то утверждение сразу же следует из леммы 1. Поэтому далее считаем, что красных ребер нет.

Лемма 5. *Все вершины* K *и желтые ребра образуют граф* Y, *каждая компонента связности которого — полный граф. Все компоненты связности содержат одно и то же число вершин.*

Доказательство. Первое утверждение леммы немедленно вытекает из того, что в D_p есть всего одна подгруппа порядка p. То, что все компоненты связности содержат одинаковое количество вершин, следует из того, что действие $\widetilde{G}$ на K транзитивно и сохраняет цвета ребер.

Лемма 6. *Число зеленых ребер, выходящих из вершины* G, *положительно и делится на* p.

Доказательство. Каждое зеленое ребро, выходящее из G, соответствует одному из p отражений $g \in G$. Таким образом, ребра, выходящие из G, делятся на p классов. В каждом из них одинаковое число ребер, так как все отражения в группе G сопряжены и, следовательно, автоморфизмом графа можно перевести любой из этих классов в любой другой из этих классов. Это значит, что число зеленых ребер, выходящих из G, делится на p.

Одно зеленое ребро в графе существует, это ребро (G, G^x), где $x^2 = g \in G$ — отражение. Действительно, $G^x \cap G \ni g$, но $G^x \neq G$ (так как иначе группа G была бы нормальной подгруппой в $\widetilde{G} = \langle G, x\rangle$, чего не может быть по лемме 3). Значит, $G^x \cap G = \langle g\rangle_2$, и лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Предположим, что из G выходит по крайней мере $2p$ зеленых ребер. Тогда граф имеет по крайней мере $2p+1$

вершину, т. е. $|K| > 2p$, и все доказано, так как по лемме 4 $|\widetilde{G}| \geq |K| \cdot |G| > 2p|G| = |G|^2$.

Согласно лемме 6 остается рассмотреть случай, когда из каждой вершины графа выходит ровно p зеленых ребер.

Пусть u — число вершин в каждой из компонент связности графа Y (лемма 5), а v — количество этих компонент связности. Тогда

$$p = (\text{число зеленых ребер выходящих из } G) = (v-1)u$$

(так как каждая вершина, не соединенная с G желтым ребром, соединена с G зеленым ребром).

Равенство $p = (v-1)u$ означает (в силу простоты числа p), что либо $v = 2$ и $u = p$, либо $v = p + 1$ и $u = 1$.

В первом случае $|K| = 2p$ и все доказано по лемме 4: $|\widetilde{G}| \geq 2p|G| = |G|^2$.

Во втором случае $|K| = p + 1$ и граф Γ представляет собой полный граф, все ребра которого зеленые. Группа $\widetilde{G}$ действует на этом графе, причем действие группы G на множестве вершин, отличных от G, изоморфно действию G сопряжениями на множестве своих подгрупп порядка два (этот изоморфизм сопоставляет группе G^h подгруппу $G^h \cap G$). В частности, сопряжение при помощи отражения g представляет собой перестановку вершин графа, которая оставляет на месте ровно две точки (G и группу G^h, для которой $G \cap G^h = \langle g \rangle$) и, следовательно, раскладывается в произведение $\frac{p-1}{2}$ независимых транспозиций. Эта перестановка нечетная, так как $p \in 3 + 4\mathbb{Z}$, что противоречит тому, что g является квадратом в $\widetilde{G}$. Теорема доказана.

§ 3. Корни высших степеней и другие открытые вопросы

Возникает вопрос: какова же на самом деле точная оценка?

Вопрос 1. *Бесконечно ли множество таких конечных групп G, что для некоторого $g \in G$ каждая группа, содержащая G в качестве подгруппы и элемент, квадрат которого равен g, имеет порядок не меньше, чем $2|G|^2$?*

Следующее утверждение показывает, что для диэдральных групп наша теорема не может быть усилена, а для ответа на вопрос 1 надо изучать группы, близкие к простым.

Утверждение 1. *Если конечная группа G и ее элемент g удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий:*

(а) *G не совпадает со своим коммутантом;*

(б) *G не совпадает с нормальным замыканием элемента g;*

(в) *в G есть нетривиальная нормальная подгруппа нечетного порядка*[1]*,*

то G вкладывается в группу H порядка, не превосходящего $|G|^2$, в которой элемент g является квадратом.

Доказательство. Следующая лемма показывает, что при выполнении условия (а) или (б) в качестве группы H можно взять не все сплетение $G \wr \mathbb{Z}_2$ (см. § 1), а его собственную подгруппу. Если же выполнено условие (в), то в качестве H можно взять собственную фактор-группу этого сплетения, как показывает лемма 8 (см. ниже).

[1] Из теоремы Фейта — Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка [19] следует, что свойство (в) эквивалентно наличию в G нетривиальной абелевой нормальной подгруппы нечетного порядка.

Лемма 7. *В сплетении $G \wr \mathbb{Z}_2$ подгруппа H, порожденная группой G, вложенной диагонально, и квадратным корнем $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ из элемента $g \in G$, имеет вид*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \mid g_1 g_2^{-1} \in [\langle\langle g \rangle\rangle, G] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix} \mid g_1 g_2^{-1} \in g\,[\langle\langle g \rangle\rangle, G] \right\},$$

где $[\langle\langle g \rangle\rangle, G]$ — взаимный коммутант нормального замыкания элемента g в группе G и группы G.

Доказательство. Эпиморфизм $\varphi : G \to G/\,[\langle\langle g \rangle\rangle, G]$ индуцирует гомоморфизм $\Phi : G \wr \mathbb{Z}_2 \to (G/\,[\langle\langle g \rangle\rangle, G]) \wr \mathbb{Z}_2$. Множество, стоящее в правой части доказываемого равенства, есть $\Phi^{-1}(\Phi(H))$. Поэтому достаточно доказать, что H содержит ядро гомоморфизма Φ. Но $\ker \Phi$ порождается (как подгруппа) элементами вида

$$\begin{pmatrix} [g^x, y] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix}, \quad \text{где } x, y \in G,$$

которые лежат в H, как показывают следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g^x \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & g^x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g^{-x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g^{xy} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [g^x, y] & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} [g^x, y] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Лемма 8. *Если N — нормальная абелева подгруппа группы G, то множество*

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mid x \in N \right\}$$

является нормальной подгруппой в сплетении $G \wr \mathbb{Z}_2$. Если порядок подгруппы N нечетный, то подгруппа K тривиально пересекается с группой G (вложенной в сплетение диагональным образом).

Обратно, каждая нетривиальная нормальная подгруппа этого сплетения, тривиально пересекающаяся с G, содержит нетривиальную абелеву нормальную подгруппу указанного вида.

Доказательство. То, что множество K является нормальной подгруппой, очевидно. Ясно, что

$$K \cap G = \{x \in N \mid x^2 = 1\},$$

поэтому K тривиально пересекается с G, если порядок подгруппы N нечетный.

Произвольная нетривиальная нормальная подгруппа X сплетения, как известно, нетривиально пересекается с базой (см, например, [20]). Пусть

$$1 \neq u = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in X.$$

Тогда

$$\left[u, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [x, y] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v \in X \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [x, y] \end{pmatrix} = w$$

и, следовательно,

$$vw = \begin{pmatrix} [x,y] & 0 \\ 0 & [x,y] \end{pmatrix} \in X \cap G = \{1\}, \quad \text{т. е. } [x,y] = 1.$$

Но в таком случае

$$X \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = t$$

и, стало быть,

$$ut = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \in X \cap G = \{1\}, \quad \text{т. е. } xy = 1.$$

Таким образом, пересечение подгруппы X с базой сплетения имеет вид

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \mid x \in N \right\},$$

где N — некоторое подмножество группы G. Отсюда, разумеется, вытекает, что множество N обязано быть абелевой нормальной подгруппой. Лемма доказана.

Эти леммы доказывают утверждение 1 и, кроме того, показывают, что если группа G не удовлетворяет ни одному из условий (а), (б) и (в) (например, если группа G является неабелевой простой), то сплетение $G \wr \mathbb{Z}_2$ не имеет ни собственных подгрупп, ни собственных фактор-групп, содержащих группу G и квадратный корень $\begin{pmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ из элемента g.

Перейдем теперь к корням высших степеней и решениям других уравнений. Отправной точкой нашего исследования послужила теорема Левина, которая в полном объеме выглядит так.

Теорема Левина [13]. *Сплетение $G \wr \mathbb{Z}_n$ группы G и циклической группы порядка n (имеющее порядок $n|G|^n$) содержит решения всех положительных уравнений степени n над группой G.*

Под *положительным уравнением степени n над группой G* понимается уравнение вида

$$g_1 x g_2 x \dots g_n x = 1, \quad \text{где } g_1, \dots, g_n \in G.$$

В связи с этим возникает вопрос: верно ли, что теорема Левина дает неулучшаемую оценку?

Вопрос 2. *Бесконечно ли множество таких конечных групп G, что каждая группа, содержащая G в качестве подгруппы и решение каждого положительного уравнения степени n над G, имеет порядок не меньше, чем $n|G|^n$?*

Можно выдвинуть и более смелую гипотезу.

Вопрос 3. *Бесконечно ли множество таких конечных групп G, что каждая группа H, содержащая G в качестве подгруппы, каждый элемент которой является n-й степенью в H, имеет порядок не меньше, чем $n|G|^n$?*

Что можно сказать об экономном присоединении решений других (т. е. неположительных) уравнений? Например, теорема Герстенхабера — Ротхауза [8] в комбинации с теоремой Мальцева о финитной аппроксимируемости конечно порожденных линейных групп [21] дает следующее утверждение.

Утверждение 2 [8, 20]. *Каждая конечная группа G может быть вложена в конечную группу H, содержащую решения всех невырожденных уравнений длины n над G.*

Под *невырожденным уравнением длины n над группой G* понимается уравнение вида

$$g_1 x^{\varepsilon_1} g_2 x^{\varepsilon_2} \dots g_n x^{\varepsilon_n} = 1, \quad \text{где } g_i \in G,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \ \text{ и } \ \sum \varepsilon_i \neq 0.$$

Доказательство теоремы Герстенхабера — Ротхауза красивое, но неконструктивное. Поэтому трудно написать не только неулучшаемую, но даже хоть какую-нибудь оценку на порядок группы H.

Вопрос 4. *Можно ли оценить $|H|$ через $|G|$ и n в утверждении 2?*

При $n = 1$ ответ на вопросы 2–4, очевидно, положительный. Невырожденное уравнение длины два имеет вид $g_1 x^{\varepsilon} g_2 x^{\varepsilon} = 1$, где $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, и линейной заменой переменных приводится к виду $x^2 = g$, поэтому основной результат этой работы дает ответ на «ослабленные вдвое» версии этих вопросов при $n = 2$. Что происходит при других n, нам неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бродский С. Д.* Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 84–103.
2. *Клячко Ант. А.* Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 3. С. 409–419. (См. также arXiv:math.GR/0406382).
3. *Клячко Ант. А., Прищепов М. И.* Метод спуска для уравнений над группами // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. 1995. Т. 50, № 4. С. 90–93.
4. *Clifford A., Goldstein R. Z.* Equations with torsion-free coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V. 43. P. 295–307.
5. *Edjvet M., Howie J.* The solution of length four equations over groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 326. P. 345–369.
6. *Edjvet M., Juhász A.* Equations of length 4 and one-relator products // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 2000. V. 129. P. 217–230.
7. *Fenn R., Rourke C.* Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // Enseign. Math., II Sèr. 1996. V. 42. P. 49–74.
8. *Gerstenhaber M., Rothaus O. S.* The solution of sets of equations in groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48. P. 1531–1533.
9. *Howie J.* The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. III: The word problem // Proc. Lond. Math. Soc. 1991. V. 62, N 3. P. 590–606.
10. *Juhász A.* On the solvability of a class of equations over groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 2003. V. 135, N 2. P. 211–217.
11. *Klyachko Ant. A.* A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V. 21. P. 2555–2575.
12. *Klyachko Ant. A.* Asphericity tests // Int. J. Algebra Comput. 1997. V. 7, N 4. P. 415–431.
13. *Levin F.* Solutions of equations over groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 603–604.
14. *Lyndon R. C.* Equations in groups // Bol. Soc. Bras. Math. 1980. V. 11, N 1. P. 79–102.
15. *Струнков С. П.* К теории уравнений на конечных группах // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59, № 6. С. 171–180.
16. *Frobenius G.* Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie // Berl. Sitz. 1903. S. 987–991.
17. *Hall Ph.* On a theorem of Frobenius // Proc. London Math. Soc. 1936. V. 40. P. 468–501.
18. *Solomon L.* The solutions of equations in groups // Arch. Math. 1969. V. 20, N 3. P. 241–247.
19. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V. 13, N 3. P. 755–1029.
20. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

21. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–422.

Статья поступила 20 января 2011 г.

Баранов Дмитрий Владимирович   Клячко Антон Александрович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, Москва 119991
`dimbaranov@mail.ru`, `klyachko@mech.math.msu.ru`