*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2012. Том 53, № 2*

*УДК 517.925.5+517.929*

# О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**И. И. Матвеева, И. А. Мельник**

**Аннотация.** Рассматривается задача Коши для одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности. Установлены свойства решений и доказано, что при достаточно большом числе дифференциальных уравнений последняя компонента решения является приближенным решением начальной задачи для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

**Ключевые слова:** система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, предельные теоремы, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

## Введение

Во многих задачах биологии и химии возникают системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности (см., например, [1–4] и приведенную там литературу). В частности, при моделировании многостадийного синтеза вещества используется система следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \tag{0.1}$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad F(t,x) = \begin{pmatrix} g(t,x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\theta \geq 0$, $\tau > 0$ (см., например, [3, 4]). В этом случае размерность $n$ системы определяется количеством стадий, $\tau > 0$ — время протекания процесса, $x_j(t)$ — концентрация вещества на $j$-й стадии. При очень большом числе стадий $n \gg 1$, естественно, возникает сложная задача нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$. Строгое математическое решение этой задачи дано Г. В. Демиденко в работе [3] (см. теоремы 1–4). Сформулируем полученный

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 10–01–00035), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127), а также СО РАН (междисциплинарный проект № 107).

результат. Предположим, что функция $g(t,v) \in C\big(\overline{\mathbb{R}}_2^{+}\big)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица

$$|g(t,v_1) - g(t,v_2)| \le L|v_1 - v_2|, \quad t \ge 0,\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Будем неограниченно увеличивать размерность системы (0.1) и рассматривать для каждой системы задачу Коши. Для простоты ограничимся случаем нулевых начальных условий $x|_{t=0} = 0$. Ясно, что при любом $n$ задача Коши однозначно разрешима на произвольном отрезке $[0,T]$. Рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши, получим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$. Справедлива следующая

**Теорема 1** (Г. В. Демиденко). *Последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0,T]$, $T > \tau$:*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

*Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом:*

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau, \end{cases} \tag{0.2}$$

*при этом*

$$\max_{t\in[0,T]} \big|x_n^n(t) - y(t)\big| \le \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n > n_0.$$

В силу теоремы 1 для нахождения $x_n(t)$ при $n \gg 1$ можно не решать задачу Коши для системы (0.1) большой размерности с большими коэффициентами, а решать только начальную задачу для одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Полученный результат дает строгое математическое обоснование метода для численного нахождения концентрации конечного продукта $x_n(t)$ при $n \gg 1$ с использованием уравнения с запаздывающим аргументом.

Теорема 1 послужила основой при получении аналогичных утверждений для различных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [5–17]). Г. В. Демиденко предложил ряд методов для доказательства прямых и обратных предельных теорем, устанавливающих связи между решениями классов систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности и обобщенными решениями уравнений с запаздывающим аргументом. С некоторыми из них можно познакомиться в обзорной статье [18].

Одним из эффективных и простым в применении является метод сравнения. Его идея заключается в том, чтобы исследуемую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \widetilde{A}_n(t)\tilde{x} + \widetilde{F}(t,\tilde{x}) \tag{0.3}$$

записывать как возмущение исходной системы (0.1), а затем сравнивать последние компоненты решений задач Коши для систем (0.1) и (0.3). Если при неограниченном увеличении числа уравнений из соответствующих оценок вытекает сходимость

$$\big|x_n^n(t) - \tilde{x}_n^n(t)\big| \to 0, \quad n \to \infty,\ t \in [0,T],$$

то в силу сформулированной теоремы 1 нахождение приближенных значений последней компоненты решения системы (0.3) при $\tilde{x}|_{t=0} = 0$, $n \gg 1$, сводится к решению задачи (0.2). В ряде случаев описанный метод позволяет очень просто доказывать предельные теоремы для различных систем дифференциальных уравнений большой размерности. Приведем некоторые примеры.

Рассмотрим систему следующего вида:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \widehat{A}_n \hat{x} + F(t, \hat{x}), \quad t > 0, \tag{0.4}$$

где

$$\widehat{A}_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau_{n-1}} & -\theta \end{pmatrix}, \quad F(t, \hat{x}) = \begin{pmatrix} g(t, \hat{x}_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\tau_j = \tau\bigl(1 + \frac{\alpha_j}{(n-1)^\gamma}\bigr)$, $0 \le \alpha_j \le a$, $j = 1, \dots, n-1$, $\theta \ge 0$, $\tau > 0$, $\gamma > 1$. Доказано [15, 16], что при $n \gg 1$ последняя компонента $\hat{x}_n(t)$ решения задачи Коши для системы (0.4) с нулевыми начальными условиями аппроксимируется решением начальной задачи (0.2). Отметим, что систему (0.4) можно рассматривать как возмущение системы (0.1) линейными членами. В [16] также с использованием метода сравнения доказаны предельные теоремы для класса систем, которые можно рассматривать как возмущение системы (0.1) нелинейными членами:

$$\begin{cases} \frac{d\check{x}_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau} \frac{\check{x}_1}{1+\rho \check{x}_1^\gamma} + g(t, \check{x}_n), \quad t > 0, \\ \frac{d\check{x}_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau} \frac{\check{x}_{j-1}}{1+\rho \check{x}_{j-1}^\gamma} - \frac{n-1}{\tau} \frac{\check{x}_j}{1+\rho \check{x}_j^\gamma}, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \frac{d\check{x}_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau} \frac{\check{x}_{n-1}}{1+\rho \check{x}_{n-1}^\gamma} - \theta \check{x}_n, \end{cases} \tag{0.5}$$

где $\theta \ge 0$, $\tau$, $\rho > 0$, $\gamma > 1$. Установлено, что при $n \gg 1$ последняя компонента $\check{x}_n(t)$ решения задачи Коши для системы (0.5) с нулевыми начальными условиями аппроксимируется решением той же начальной задачи (0.2). Отметим, что для получения аналогичных утверждений для систем (0.4) и (0.5) при $0 < \gamma \le 1$ необходимо провести рассуждения, как при доказательстве теоремы 1. Доказательства этих результатов опубликованы в работах [15, 17] соответственно.

В настоящей работе мы рассматриваем еще один класс систем нелинейных дифференциальных уравнений большой размерности и, используя описанный выше метод сравнения, устанавливаем предельную теорему. Полученные результаты анонсированы в [19].

Авторы выражают глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Г. В. Демиденко за полезные дискуссии и внимание к работе.

## § 1. Свойства решений задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\check{z}_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_1}{1+\rho\check{z}_1^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_2}{1+\rho\check{z}_2^\gamma} + g(t,\check{z}_n), \quad t>0, \\ \frac{d\check{z}_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_{j-1}}{1+\rho\check{z}_{j-1}^\gamma} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\check{z}_j}{1+\rho\check{z}_j^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_{j+1}}{1+\rho\check{z}_{j+1}^\gamma}, \\ \quad j=2,\dots,n-2, \\ \frac{d\check{z}_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_{n-2}}{1+\rho\check{z}_{n-2}^\gamma} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\check{z}_{n-1}}{1+\rho\check{z}_{n-1}^\gamma}, \\ \frac{d\check{z}_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_{n-1}}{1+\rho\check{z}_{n-1}^\gamma} - \theta\check{z}_n, \\ \check{z}|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\theta \geq 0$, $\tau_2 > \tau_1 > 0$, $\rho > 0$, $\gamma > 0$. Функция $g(t,v) \in C(\mathbb{R}_2)$ неотрицательна, ограничена $0 \leq g(t,v) \leq G$ и удовлетворяет условию Липшица по $v$. Очевидно, что исследуемая система переходит в систему (0.5) при $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 \to \infty$ и ее можно также рассматривать как возмущение системы (0.1) нелинейными членами.

Вначале заметим, что задача Коши (1.1) однозначно разрешима на всей полуоси $\{t \geq 0\}$. В этом нетрудно убедиться, следуя, например, схеме из [14]. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_1}{dt} = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\tilde{z}_1}{1+\rho|\tilde{z}_1|^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_2|}{1+\rho|\tilde{z}_2|^\gamma} + g(t,\tilde{z}_n), \quad t>0, \\ \frac{d\tilde{z}_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{j-1}|}{1+\rho|\tilde{z}_{j-1}|^\gamma} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\tilde{z}_j}{1+\rho|\tilde{z}_j|^\gamma} \\ \qquad\qquad + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_{j+1}|}{1+\rho|\tilde{z}_{j+1}|^\gamma}, \quad j=2,\dots,n-2, \\ \frac{d\tilde{z}_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-2}|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-2}|^\gamma} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\tilde{z}_{n-1}}{1+\rho|\tilde{z}_{n-1}|^\gamma}, \\ \frac{d\tilde{z}_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-1}|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-1}|^\gamma} - \theta\tilde{z}_n, \\ \tilde{z}|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

В силу условий на функцию $g(t,v)$ задача Коши (1.2) имеет единственное непродолжаемое решение $\tilde{z}(t)$. Покажем, что оно определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\tilde{z}(t)$ имеет интервал существования $(t_-, t_+)$, при этом $t_+ < \infty$. В этом случае $\|\tilde{z}(t)\| \to \infty$ при $t \to t_+$ (см., например, [20]). Обозначим

$$\varphi_1(t) = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{1}{1+\rho|\tilde{z}_1(t)|^\gamma}, \quad \psi_1(t) = \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_2(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_2(t)|^\gamma} + g(t,\tilde{z}_n(t)),$$

$$\varphi_j(t) = -\left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{1}{1+\rho|\tilde{z}_j(t)|^\gamma}, \quad j=2,\dots,n-1,$$

$$\psi_j(t) = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{j-1}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{j-1}(t)|^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{|\tilde{z}_{j+1}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{j+1}(t)|^\gamma}, \quad j=2,\dots,n-2,$$

$$\psi_{n-1}(t) = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-2}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-2}(t)|^\gamma},$$

$$\varphi_n(t) = -\theta, \quad \psi_n(t) = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{|\tilde{z}_{n-1}(t)|}{1+\rho|\tilde{z}_{n-1}(t)|^\gamma}.$$

Очевидно, для каждой компоненты $\tilde{z}_j(t)$ решения имеем

$$\frac{d\tilde{z}_j(t)}{dt} \equiv \varphi_j(t)\tilde{z}_j(t) + \psi_j(t), \quad j=1,\dots,n.$$

Следовательно,

$$\tilde{z}_j(t) \equiv \int\limits_0^t e^{\int\limits_\xi^t \varphi_j(\eta)d\eta} \psi_j(\xi)\, d\xi, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Поэтому если $t_+ < \infty$, то в силу определений функций $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, получаем, что $\|\tilde{z}(t)\| \le c < \infty$ при $0 \le t \le t_+$; противоречие.

Поскольку $\psi_j(t) \ge 0$, в силу (1.3) имеем $\tilde{z}_j(t) \ge 0$, $j = 1, \dots, n$, при $t \ge 0$. Следовательно, $|\tilde{z}_j(t)| \equiv \tilde{z}_j(t)$, и $\tilde{z}(t)$ является решением задачи Коши (1.1) при $t \ge 0$.

Замечание 1. Если в (1.1) функция $g(t, v)$ имеет вид

$$g(t, v) = \frac{\alpha}{1 + \beta v^\sigma}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \sigma > 1,$$

то при доказательстве разрешимости задачи Коши (1.1) в первом уравнении системы из вспомогательной задачи Коши (1.2) вместо функции $g(t, \tilde{z}_n)$ нужно поставить $g(t, |\tilde{z}_n|)$. Все остальные рассуждения проводятся без изменения.

Замечание 2. В [21] предложен способ доказательства разрешимости задачи Коши для общего класса нелинейных систем с начальными условиями на границе области определения систем.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\gamma > 1$. Будем неограниченно увеличивать число $n$ уравнений в (1.1) и рассмотрим последовательности $\{\check{z}_j^n(t)\}$, составленные из $j$-х компонент решений задач Коши вида (1.1). Ниже установим важные свойства для компонент $\check{z}_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n-1$, с использованием которых в следующем параграфе докажем предельную теорему.

**Теорема 2.** *Существует $n_0 > 0$ такое, что при всех $n > n_0$ для компонент $\check{z}_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n-1$, решения задачи Коши* (1.1) *имеют место оценки*

$$0 \le \check{z}_j^n(t) < \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}, \quad t \ge 0,\ \tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Очевидно, в силу непрерывности решения задачи Коши (1.1) при достаточно малых значениях $t \ge 0$ неравенства (1.4) выполнены. Покажем, что они справедливы при всех $t \ge 0$. Предположим, что это неверно. Тогда найдутся значение $t_* > 0$ и хотя бы один номер $k < n$ такие, что

$$\check{z}_j^n(t) < \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}, \quad j = 1, \dots, n-1,\ t \in [0, t_*), \tag{1.5}$$

$$\check{z}_k^n(t_*) = \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}. \tag{1.6}$$

Очевидно, что при этом $\frac{d\check{z}_k^n}{dt}\Big|_{t=t^*} \ge 0$.

Пусть $k$ — наибольший из номеров, для которых имеет место (1.6). Будем рассматривать $n$ такие, что выполнено неравенство

$$\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1} \le z_*,$$

где $z_* = \left(\frac{1}{\rho(\gamma-1)}\right)^{1/\gamma}$ — точка, в которой достигается максимум функции

$$f(z) = \frac{z}{1 + \rho z^\gamma}, \quad z \ge 0,$$

т. е.

$$n \geq n_1 = 1 + \frac{\tau G(1+\rho)}{z_*}.$$

Рассмотрим случай, когда $k = n-1$. В силу (1.1) имеем

$$0 \leq \frac{d\check{z}^n_{n-1}}{dt}\bigg|_{t=t^*} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{\check{z}^n_{n-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-1}(t_*)\big)^\gamma}$$
$$< \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_{n-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-1}(t_*)\big)^\gamma}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\check{z}^n_{n-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-1}(t_*)\big)^\gamma} = \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} < \frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma}, \tag{1.7}$$

что невозможно. Действительно, в силу непрерывности функции $\check{z}^n_{n-2}(t)$ и неравенства (1.5) получаем

$$\check{z}^n_{n-2}(t_*) \leq \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}.$$

Так как функция $f(z)$ возрастает на интервале $z \in \big(0, \frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)$, при $n > n_1$ имеем

$$\frac{\check{z}^n_{n-2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{n-2}(t_*)\big)^\gamma} \leq \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)},$$

что противоречит (1.7). Следовательно, случай $k = n-1$ невозможен.

Предположим теперь, что $1 < k < n-1$. Тогда

$$\frac{\check{z}^n_{k+1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k+1}(t_*)\big)^\gamma} < \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} = \frac{\check{z}^n_{k}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k}(t_*)\big)^\gamma}.$$

Поскольку $\check{z}^n_k(t)$ — одна из компонент решения задачи Коши (1.1), то

$$0 \leq \frac{d\check{z}^n_{k}}{dt}\bigg|_{t=t^*} = \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\check{z}^n_{k-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k-1}(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_{k}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k}(t_*)\big)^\gamma}\right)$$
$$- \frac{n-1}{\tau_2}\left(\frac{\check{z}^n_{k}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k}(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_{k+1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k+1}(t_*)\big)^\gamma}\right)$$
$$< \frac{n-1}{\tau_1}\left(\frac{\check{z}^n_{k-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k-1}(t_*)\big)^\gamma} - \frac{\check{z}^n_{k}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k}(t_*)\big)^\gamma}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\check{z}^n_{k}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k}(t_*)\big)^\gamma} = \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} < \frac{\check{z}^n_{k-1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{k-1}(t_*)\big)^\gamma},$$

что невозможно. Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить рассуждения, приведенные после (1.7).

Остается рассмотреть случай $k = 1$. Как выше, имеем

$$\frac{\check{z}^n_{2}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{2}(t_*)\big)^\gamma} < \frac{\tau G(1+\rho)}{(n-1)\big(1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma\big)} = \frac{\check{z}^n_{1}(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}^n_{1}(t_*)\big)^\gamma}.$$

В силу (1.1) получаем

$$0 \le \frac{d\check{z}_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} = -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_1^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_1^n(t_*)\big)^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_2^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_2^n(t_*)\big)^\gamma} + g\big(t_*, \check{z}_n^n(t_*)\big)$$

$$< -\frac{n-1}{\tau_1}\frac{\check{z}_1^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_1^n(t_*)\big)^\gamma} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{\check{z}_1^n(t_*)}{1+\rho\big(\check{z}_1^n(t_*)\big)^\gamma} + g\big(t_*, \check{z}_n^n(t_*)\big)$$

$$= -\frac{G(1+\rho)}{1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma} + g\big(t_*, \check{z}_n^n(t_*)\big) \le G\Bigg(1 - \frac{1+\rho}{1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma}\Bigg).$$

Правая часть этого неравенства отрицательна при $n > n_2 = 1 + \tau G(1+\rho)$. Следовательно, при таких $n$ приходим к противоречию.

Таким образом, при $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ оценки (1.4) выполнены.

Теорема доказана.

## § 2. Предельная теорема

В этом параграфе с использованием свойств решений задачи Коши (1.1), установленных в теореме 2, докажем предельную теорему, которая является аналогом теоремы 1 и результатов для решений систем (0.4) и (0.5), описанных во введении.

По аналогии с рассуждениями, проведенными для системы (0.5) в [16], теорема 2 позволяет сформулировать естественное предположение о свойствах последней компоненты $\check{z}_n(t)$ решения задачи Коши (1.1). Для этого рассмотрим правую часть нелинейной системы из (1.1) и в каждом из отношений $h_j = \frac{\check{z}_j}{1+\rho\check{z}_j^\gamma}$ воспользуемся оценками (1.4) для выражений, стоящих в знаменателе. Тогда

$$\frac{\check{z}_j}{1+\rho\big(\frac{\tau G(1+\rho)}{n-1}\big)^\gamma} \le h_j \le \check{z}_j, \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{2.1}$$

Выпишем теперь две системы почти линейных дифференциальных уравнений («нижнюю» и «верхнюю»), которые отличаются от системы из (1.1) тем, что вместо всех нелинейных слагаемых вида $h_j$ будем писать линейные слагаемые, стоящие слева и справа в (2.1) соответственно.

«Верхняя» система, соответствующая верхним оценкам в (2.1), имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = B_n z + F(t, z),$$

где

$$B_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau_1} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{\tau_1} & -\frac{n-1}{\tau_1} - \frac{n-1}{\tau_2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau_1} & -\theta \end{pmatrix}.$$

«Нижняя» система, соответствующая нижним оценкам в (2.1), имеет вид

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = \widehat{B}_n \hat{z} + F(t, \hat{z}),$$

где

$$\widehat{B}_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\hat\tau_1} & \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\frac{n-1}{\hat\tau_1} - \frac{n-1}{\hat\tau_2} & \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\frac{n-1}{\hat\tau_1} - \frac{n-1}{\hat\tau_2} & \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\frac{n-1}{\hat\tau_1} - \frac{n-1}{\hat\tau_2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\hat\tau_1} & -\theta \end{pmatrix},$$

$\hat\tau_j = \tau_j\bigl(1 + \frac{a}{(n-1)^\gamma}\bigr)$, $j = 1, 2$, $a = \rho(\tau G(1+\rho))^\gamma$. Для каждой из этих систем рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = B_n z + F(t, z), \quad t > 0, \\ z|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \frac{d\hat z}{dt} = \widehat{B}_n \hat z + F(t, \hat z), \quad t > 0, \\ \hat z|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Как известно [11, 15], для последних компонент $z_n(t)$ и $\hat z_n(t)$ решений каждой из этих задач Коши при достаточно больших $n \gg 1$ имеют место аппроксимации

$$z_n(t) \approx y(t), \quad \hat z_n(t) \approx y(t),$$

где $y(t)$ — решение начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau, \ \tau = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Очевидно также, что для каждой из задач (2.2) и (2.3) справедлив аналог теоремы 2. Поэтому возникает совершенно естественное предположение, что для последней компоненты решения задачи Коши (1.1) для «промежуточной» системы также имеет место аппроксимация

$$\check z_n(t) \approx y(t), \quad n \gg 1,$$

где $y(t)$ — решение той же начальной задачи (2.4). Доказательство этого факта дается в теореме, приведенной ниже.

Рассмотрим последовательность $\bigl\{\check z_n^n(t)\bigr\}$, составленную из последних компонент решений задач Коши вида (1.1). Имеет место

**Теорема 3.** *Пусть $T > \tau$ такое, что*

$$\frac{L(1 - e^{-\theta T})}{\theta}\frac{\tau}{\tau_1} < 1. \tag{2.5}$$

*Тогда последовательность $\bigl\{\check z_n^n(t)\bigr\}$ равномерно сходится на отрезке $[0, T]$:*

$$\check z_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

*Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи* (2.4).

Доказательство будем проводить, следуя схеме, описанной во введении. Будем неограниченно увеличивать число $n$ уравнений в (2.2) и рассмотрим последовательности $\bigl\{z_j^n(t)\bigr\}$, составленные из $j$-х компонент решений задач Коши вида (2.2). Оценим разность $\check z_n^n(t) - z_n^n(t)$. Для этого введем обозначения

$u_j^n(t) = \check{z}_j^n(t) - z_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n$. Нетрудно убедиться, что вектор-функция $u^n(t) = \bigl(u_1^n(t), \dots, u_n^n(t)\bigr)^T$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{du^n}{dt} = B_n u^n + G_1(t) + G_2(t), \tag{2.6}$$

где матрица $B_n$ совпадает с матрицей системы из (2.2),

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} g\bigl(t, \check{z}_n^n(t)\bigr) - g\bigl(t, z_n^n(t)\bigr) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G_2(t) = \rho(n-1) \begin{pmatrix} \frac{(\check{z}_1^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_1^n(t))^{\gamma})} - \frac{(\check{z}_2^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_2(1+\rho(\check{z}_2^n(t))^{\gamma})} \\ -\frac{(\check{z}_1^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_1^n(t))^{\gamma})} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \frac{(\check{z}_2^n(t))^{\gamma+1}}{1+\rho(\check{z}_2^n(t))^{\gamma}} - \frac{(\check{z}_3^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_2(1+\rho(\check{z}_3^n(t))^{\gamma})} \\ \vdots \\ -\frac{(\check{z}_{n-2}^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_{n-2}^n(t))^{\gamma})} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \frac{(\check{z}_{n-1}^n(t))^{\gamma+1}}{1+\rho(\check{z}_{n-1}^n(t))^{\gamma}} \\ -\frac{(\check{z}_{n-1}^n(t))^{\gamma+1}}{\tau_1(1+\rho(\check{z}_{n-1}^n(t))^{\gamma})} \end{pmatrix}.$$

В следующей вспомогательной лемме указаны оценки для функций $u_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n-1$.

**Лемма.** *Существует $n_0 > 0$ такое, что при всех $n > n_0$ для функций $u_j^n(t)$, $j = 1, \dots, n-1$, имеют место оценки*

$$\bigl|u_j^n(t)\bigr| < \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s \in [0,T]} \bigl|u_n^n(s)\bigr| + \frac{K}{(n-1)^{\gamma}}\left(j + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right), \quad t \geq 0, \tag{2.7}$$

*где $\tau = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$, $K = \frac{\rho(\tau_1+\tau_2)(\tau G(1+\rho))^{1+\gamma}}{\tau_1 \tau_2}$.*

Доказательство. При получении оценок (2.7) будем следовать схеме доказательства теоремы 2. Очевидно, в силу непрерывности функций $u_j^n(t)$ при достаточно малых $t \geq 0$ неравенства (2.7) выполнены. Покажем, что они справедливы при $t \geq 0$. Предположим, что это неверно. Тогда найдутся значение $t_* > 0$ и хотя бы один номер $i < n$ такие, что

$$\bigl|u_j^n(t)\bigr| < \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s \in [0,T]} \bigl|u_n^n(s)\bigr| + \frac{K}{(n-1)^{\gamma}}\left(j + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right), \ j = 1, \dots, n-1, \ t \in [0, t_*), \tag{2.8}$$

$$\bigl|u_i^n(t_*)\bigr| = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s \in [0,T]} \bigl|u_n^n(s)\bigr| + \frac{K}{(n-1)^{\gamma}}\left(i + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{2.9}$$

Пусть $i$ — наибольший из номеров, для которого выполнено (2.9). Выделим три случая: $i = 1$; $2 \leq i \leq n-2$; $i = n-1$.

Вначале рассмотрим случай $i = 1$. Возможны два варианта:

$$u_1^n(t_*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s \in [0,T]} \bigl|u_n^n(s)\bigr| + \frac{K}{(n-1)^{\gamma}}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) \tag{2.10}$$

или

$$u_1^n(t_*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s \in [0,T]} \bigl|u_n^n(s)\bigr| + \frac{K}{(n-1)^{\gamma}}\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{2.11}$$

Предположим, что имеет место (2.10). Тогда в силу (2.6)

$$0 \le \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} = -\frac{n-1}{\tau_1}u_1^n(t_*)+\frac{n-1}{\tau_2}u_2^n(t_*)+g\big(t_*,\check{z}_n^n(t_*)\big)-g\big(t_*,z_n^n(t_*)\big)+G_{2,1}(t_*),$$

где $G_{2,1}(t)$ — первая компонента вектор-функции $G_2(t)$. В силу выбора $t_*$ и номера $i$ для $u_2^n(t_*)$ выполнено неравенство (2.7). Используя результат теоремы 2, для компонент $G_{2,j}(t)$ вектор-функции $G_2(t)$ при $n > n_0$ получаем оценки

$$|G_{2,j}(t)| < \frac{K}{(n-1)^\gamma}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Следовательно,

$$0 \le \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} < -\frac{\tau}{\tau_1}\left(L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right)$$
$$+\frac{\tau}{\tau_2}\left(L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(2+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) + L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma} = 0.$$

Приходим к противоречию. Значит, если $i = 1$, то равенство (2.10) невозможно. Предположим, что выполнено (2.11). Тогда получаем

$$0 \ge \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} = -\frac{n-1}{\tau_1}u_1^n(t_*)+\frac{n-1}{\tau_2}u_2^n(t_*)+g\big(t_*,\check{z}_n^n(t_*)\big)-g\big(t_*,z_n^n(t_*)\big)+G_{2,1}(t_*).$$

Проводя рассуждения, как при рассмотрении случая (2.10), можем выписать оценку снизу:

$$0 \ge \frac{du_1^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} > \frac{\tau}{\tau_1}\left(L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right)$$
$$-\frac{\tau}{\tau_2}\left(L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(2+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) - L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| - \frac{K}{(n-1)^\gamma} = 0,$$

что опять приводит к противоречию. Следовательно, случай $i = 1$ невозможен.

Рассмотрим случай $2 \le i \le n-2$. Как выше, возможны два варианта:

$$u_i^n(t_*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(i+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) \tag{2.12}$$

либо

$$u_i^n(t_*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(i+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right). \tag{2.13}$$

Предположим, что имеет место (2.12). Тогда в силу (2.6)

$$0 \le \frac{du_i^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} = \frac{n-1}{\tau_1}\big(u_{i-1}^n(t_*)-u_i^n(t_*)\big) - \frac{n-1}{\tau_2}\big(u_i^n(t_*)-u_{i+1}^n(t_*)\big) + G_{2,i}(t_*).$$

С учетом выбора $t_*$ и номера $i$ для $u_{i+1}^n(t_*)$ выполнено (2.7). В силу непрерывности и условия (2.8) для функции $u_{i-1}^n(t)$ справедливо неравенство

$$\big|u_{i-1}^n(t_*)\big| \le \frac{\tau}{n-1}\left(L\max_{s\in[0,T]}\big|u_n^n(s)\big| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(i-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right).$$

Следовательно,

$$0 \le \frac{du_i^n}{dt}\bigg|_{t=t_*} < -\frac{\tau}{\tau_1}\frac{K}{(n-1)^\gamma} + \frac{\tau}{\tau_2}\frac{K}{(n-1)^\gamma} + \frac{K}{(n-1)^\gamma} = 0,$$

что невозможно. Аналогично показывается, что равенство (2.13) также невозможно.

Остается рассмотреть случай $i = n-1$. Как выше, возможны два варианта:

$$u_{n-1}^n(t_*) = \frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]} \left|u_n^n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right)$$

либо

$$u_{n-1}^n(t_*) = -\frac{\tau}{n-1}\left(L \max_{s\in[0,T]} \left|u_n^n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right).$$

Для определенности рассмотрим второе равенство. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \geq \left.\frac{du_{n-1}^n}{dt}\right|_{t=t_*} &= \frac{n-1}{\tau_1}\left(u_{n-2}^n(t_*) - u_{n-1}^n(t_*)\right) - \frac{n-1}{\tau_2}u_{n-1}^n(t_*) + G_{2,n-1}(t_*) \\ &\geq \frac{\tau}{\tau_1}\frac{K}{(n-1)^\gamma} + \frac{\tau}{\tau_2}\left(L \max_{s\in[0,T]} \left|u_n^n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) - \frac{K}{(n-1)^\gamma} \\ &= \frac{\tau}{\tau_2}\left(L \max_{s\in[0,T]} \left|u_n^n(s)\right| + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n+\frac{\tau}{\tau_2}\right)\right) > 0, \end{aligned}$$

что невозможно. Следовательно, оценки (2.7) выполнены при $t \geq 0$.

Лемма доказана.

Используя лемму, ниже получим оценки для $u_n^n(t)$. Пусть $n_0 > 0$ такое, что при всех $n > n_0$ выполнены оценки (1.4) и (2.7). В силу определения для $u_n^n(t)$ имеем тождество

$$\frac{du_n^n(t)}{dt} \equiv \frac{n-1}{\tau_1}u_{n-1}^n(t) - \theta u_n^n(t) + G_{2,n}(t),$$

где $G_{2,n}(t)$ — последняя компонента вектор-функции $G_2(t)$. Таким образом,

$$u_n^n(t) \equiv \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\left(\frac{n-1}{\tau_1}u_{n-1}^n(s) + G_{2,n}(s)\right)ds.$$

Применяя оценки (1.4) и (2.7), получаем

$$\left|u_n^n(t)\right| < \frac{1-e^{-\theta t}}{\theta}\left(\frac{\tau}{\tau_1}L \max_{s\in[0,T]} \left|u_n^n(s)\right| + \frac{\tau}{\tau_1}\frac{K}{(n-1)^\gamma}\left(n-1+\frac{\tau}{\tau_2}\right) + \frac{K}{(n-1)^\gamma}\right).$$

Отсюда, если выполнено неравенство (2.5), то для $u_n^n(t)$ справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]} \left|u_n^n(t)\right| < \left(1 - \frac{L(1-e^{-\theta T})}{\theta}\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{-1}\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\frac{\tau K}{\tau_1(n-1)^\gamma}\left(n+\frac{\tau-\tau_1}{\tau_2}\right).$$

В силу полученного неравенства имеем равномерную сходимость

$$u_n^n(t) = \check{z}_n^n(t) - z_n^n(t) \to 0, \quad n\to\infty,\ t\in[0,T],$$

где $T$ определяется неравенством (2.5). Как было отмечено выше, последовательность $\left\{z_n^n(t)\right\}$ равномерно сходится к решению $y(t)$ начальной задачи (2.4). Отсюда вытекает равномерная сходимость

$$\check{z}_n^n(t) \to y(t), \quad n\to\infty,\ t\in[0,T].$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Для некоторых систем вида (0.1) и (1.1) проводились численные исследования (см., например, работы [3, 22, 23]).

Замечание 4. Используя метод сравнения, описанный во введении, и опираясь на схему рассуждений, указанную перед теоремой 3, можно получить предельные теоремы для более общих классов нелинейных систем.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
2. *Хидиров Б. Н.* Об одном подходе к моделированию регуляторных механизмов живых систем // Мат. моделирование. 2004. Т. 16, № 7. С. 77–91.
3. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
4. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
5. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А.* О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 538–552.
6. *Demidenko G. V., Khropova Yu. E., Kotova T. V.* On one class of infinite-order systems of differential equations and on delay differential equations // Proc. Fifth Intern. conf. bioinformatics of genome regulation and structure (Novosibirsk, Russia, July 16–22 2006). Novosibirsk: Inst. Cytology Genetics, 2006. V. 3. P. 29–32.
7. *Demidenko G. V., Khropova Yu. E.* On properties of solutions of one delay differential equation // Proc. Fifth Intern. conf. bioinformatics of genome regulation and structure (Novosibirsk, Russia, July 16–22 2006). Novosibirsk: Inst. Cytology Genetics, 2006. V. 3. P. 38–42.
8. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
9. *Мудров А. В.* О связи систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 2. С. 57–69.
10. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Мудров А. В.* О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 34–46.
11. *Демиденко Г. В., Мельник И. А., Хропова Ю. Е.* Уравнения с запаздывающим аргументом в задачах многостадийного синтеза вещества. Новосибирск, 2009. 26 с. (Препринт/Ин-т математики; № 233).
12. *Матвеева И. И., Попов А. М.* О свойствах решений одной системы, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 3. С. 86–94.
13. *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
14. *Demidenko G. V., Likhoshvai V. A., Mel'nik I. A.* On properties of solutions to equations of multistage substance synthesis // J. Anal. Appl. 2010. V. 8, N 1. P. 47–61.
15. *Demidenko G. V., Kotova T. V.* Limit properties of solutions to one class of systems of differential equations with parameters // J. Anal. Appl. 2010. V. 8, N 2. P. 63–74.
16. *Котова Т. В., Мельник И. А.* О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметрами. Новосибирск, 2010. 17 с. (Препринт/Ин-т математики; № 253).
17. *Мельник И. А.* Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений, моделирующей многостадийный синтез вещества // Вестн. Тамбовск. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, № 5. С. 1254–1259.
18. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер. Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 42–53.
19. *Матвеева И. И., Мельник И. А.* О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений большой размерности. Новосибирск, 2011. 17 с. (Препринт/Ин-т математики; № 261).
20. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
21. *Иванов В. В.* Разрешимость задачи Коши с начальными условиями на границе // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 487–490.

**22.** *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Штокало Д. Н.* Об исследовании нелинейных моделей многостадийного синтеза вещества. Новосибирск, 2010. 37 с. (Препринт/Ин-т математики; № 246).

**23.** *Ващенко Г. В., Новиков Е. А.* Параллельная реализация явного метода Эйлера с контролем точности вычислений // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2011. Т. 4, № 1. С. 70–76.

*Статья поступила 21 марта 2011 г.*

Матвеева Инесса Изотовна, Мельник Ирина Алексеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
matveeva@math.nsc.ru, sibirochka@ngs.ru