Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.956.8:517.956.328:539.3(4)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА С ТОНКОЙ СТЯЖКОЙ

С. А. Назаров

Аннотация. Построена асимптотика собственных чисел и вектор-функций задачи теории упругости для анизотропного тела, к поверхности которого присоединена тонкая (диаметром h) стяжка-стержень. В спектре выделены две серии собственных чисел с устойчивыми асимптотиками. Первая серия образована собственными числами $O(h^2)$, отвечающими поперечным колебаниям стержня с жестко защемленными торцами, а вторая порождена продольными колебаниями и закручиванием стержня, а также собственными колебаниями тела без стяжки. Проверена теорема о сходимости для первой серии и получены оценки погрешностей для обеих серий.

Ключевые слова: сочленение массивного стержня с тонким стержнем, спектр упругого тела, асимптотика собственных чисел.

§ 1. Постановка задачи и описание результатов

1.1. Упругое тело с тонкой стяжкой. Пусть Ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с гладкой (для простоты) границей $\partial\Omega$ и компактным замыканием $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Пусть еще Υ — отрезок прямой, соединяющий две точки $P^\pm \subset \partial\Omega$, лежащий вне Ω и подходящий к поверхности $\partial\Omega$ под ненулевыми углами (рис. 1(a)). Введем систему декартовых координат $x = (y, z)$, поместив ее начало $\mathcal{O}$ в середину отрезка и направив ось z вдоль упомянутой прямой. После масштабирования можно считать, что $\Upsilon = \{x : y = 0 \in \mathbb{R}^2,\ |z| < 1\}$.

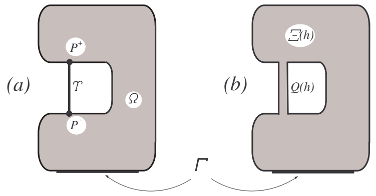

Рис. 1. Сочленение тела со стержнем (b) и изображающая его гибридная область (a).

Обозначим через ω область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей и компактным замыканием и введем тонкий цилиндрический стержень

$$Q_h = \{x : \eta := h^{-1}y \in \omega, |z| < l := 1\}. \quad (1.1)$$

Соответственно тело с тонкой стяжкой (см. рис. 1(b)) определено равенством $\Xi(h) = \Omega \cup Q'_h$, где Q'_h — удлиненный стержень: в формуле (1.1) полудлина стержня l увеличена до $l' > 1$. Сама упругая стяжка занимает объем $Q(h) = Q'_h \setminus \overline{\Omega}$ и, вообще говоря, отличается от множества (1.1). Сечения стержня обозначаем через $\omega_h(z^0) = \{x \in Q'_h : z = z^0\}$, а числа l' и $h_0 \in (0, 1]$ зафиксируем так, чтобы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00348).

при $h \in (0, h_0]$ торцы $\overline{\omega_h(\pm l')}$ принадлежали телу Ω. Не ограничивая общности, считаем, что начало координат $\eta \in \mathbb{R}^2$ совмещено с центром тяжести фигуры ω.

1.2. Задача теории упругости. Столбец $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^\top$, где $\top$ — знак транспонирования, представляет собой вектор смещений точки $x \in \Xi(h)$ при деформации тела со стяжкой. Столбец деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), 2^{1/2}\varepsilon_{12}(u), 2^{1/2}\varepsilon_{23}(u), 2^{1/2}\varepsilon_{31}(u), \varepsilon_{33}(u))^\top \qquad (1.2)$$

можно вычислить по формуле $\varepsilon(u; x) = \mathscr{D}(\nabla_x)u(x)$, в которой $\nabla_x = \operatorname{grad}$, а $\mathscr{D}(\nabla_x)$ — (6×3)-матрица дифференциальных операторов первого порядка,

$$\mathscr{D}(\xi)^\top = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 2^{-1/2}\xi_2 & 0 & 2^{-1/2}\xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 2^{-1/2}\xi_1 & 2^{-1/2}\xi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\xi_2 & 2^{-1/2}\xi_1 & \xi_3 \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Кроме того, $\varepsilon_{jk}(u) = \frac{1}{2}\bigl(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\bigr)$ — декартовы компоненты тензора деформаций, а множители $2^{1/2}$ и $2^{-1/2}$ введены в определения (1.2) и (1.3) для того, чтобы уравнять естественные нормы названного тензора второго ранга и шестимерного столбца деформаций (ср. [1, § 2.1]). Столбец напряжений $\sigma(u)$, имеющий аналогичное (1.2) строение, связан со столбцом деформаций *линейным законом Гука* $\sigma(u; x) = A\varepsilon(u; x)$, где A — симметричная и положительно определенная вещественная числовая матрица размером 6×6, составленная из модулей упругости материала (см. [2; 1, § 2.1]). Таким образом, упругое сочленение $\Xi(h)$ *анизотропное, но однородное* (см. п. 4.4 по поводу доступных обобщений).

Задача о собственных колебаниях упругого тела $\Xi(h)$ выглядит следующим образом:

$$L(\nabla_x)u^h(x) := \mathscr{D}(-\nabla_x)^\top A\mathscr{D}(\nabla_x)u^h(x) = \rho\Lambda u^h(x), \quad x \in \Xi(h), \qquad (1.4)$$

$$N(x, \nabla_x)u^h(x) := \mathscr{D}(n(x))^\top A\mathscr{D}(\nabla_x)u^h(x) = 0, \quad x \in \Sigma(h) := \partial\Xi(h) \setminus (\gamma(h) \cup \Gamma), \qquad (1.5)$$

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \qquad (1.6)$$

Здесь n — единичный вектор (столбец) внешней нормали к поверхности $\partial\Xi(h) \setminus \gamma(h)$, $\gamma(h) = \partial\Omega \cap \partial Q'_h$ — объединение двух ребер, на которых эта нормаль не определена, $\Sigma(h) = \partial\Omega \cap \overline{Q'_h}$ — множество, по которому стяжка прикреплена к телу, а Γ — защемленная часть поверхности тела Ω, причем $P^\pm \notin \overline{\Gamma}$. Плотность $\rho = 1$ упругого материала берем в качестве эталона и тем самым делаем все величины безразмерными.

Обобщенная формулировка задачи (1.4)–(1.6) заключается в отыскании числа Λ и нетривиальной вектор-функции $u^h \in \mathring{H}^1(\Xi(h); \Gamma)^3$, удовлетворяющих интегральному тождеству [3]

$$a(u^h, v^h; \Xi(h)) = \Lambda(u^h, v^h)_{\Xi(h)}, \quad v^h \in \mathscr{H}^h := \mathring{H}^1(\Xi(h); \Gamma)^3. \qquad (1.7)$$

Подпространство $\mathring{H}^1(\Xi(h); \Gamma)^3$ составлено из вектор-функций, принадлежащих классу Соболева $H^1(\Xi(h))^3$ и подчиненных условию Дирихле (1.6). Билинейная форма

$$a(u^h, v^h; \Xi(h)) = (A\mathscr{D}(\nabla_x)u^h, \mathscr{D}(\nabla_x)v^h)_{\Xi(h)} \qquad (1.8)$$

при $u^h = v^h$ является удвоенной упругой энергией сочленения $\Xi(h)$. Под $(\cdot\,,\cdot)_\Xi$ подразумевается скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Xi)^m$, скалярном ($m=1$) или векторном ($m>1$); индекс m указывает количество компонент вектор-функции, но в обозначениях норм или скалярных произведений не пишется. Ввиду неравенства Корна (см., например, [4, 5]) билинейную форму (1.8) можно назначить скалярным произведением в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}^h$. Таким образом, благодаря компактности вложения $H^1(\Xi(h)) \subset L_2(\Xi(h))$ спектр задачи (1.7) (или (1.4)–(1.6) в дифференциальной форме) является дискретным и образует неограниченную монотонную последовательность

$$0 < \Lambda_1^h \le \Lambda_2^h \le \ldots \le \Lambda_m^h \le \ldots \to +\infty, \tag{1.9}$$

а соответствующие собственные векторы $u^h_{(1)}, u^h_{(2)}, \ldots, u^h_{(m)}, \ldots \in \mathscr{H}^h$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$\big(u^h_{(m)}, u^h_{(p)}\big)_{\Xi(h)} = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}, \tag{1.10}$$

где $\delta_{m,p}$ — символ Кронекера. Подчеркнем, что последовательность (1.9) и другие в статье составлены при учете кратностей собственных чисел.

1.3. Обсуждение результатов. Уже классическим стал результат о спектре следующей смешанной[1)] краевой задачи для оператора Лапласа Δ:

$$-\Delta u^h(x) = \Lambda^h u^h(x),\ x \in \Xi(h), \quad \partial_n u^h(x) = 0,\ x \in \Sigma(h), \quad u^h(x) = 0,\ x \in \Gamma. \tag{1.11}$$

Именно, пределы при $h \to +0$ собственных чисел из последовательности (1.9), отвечающей задаче (1.11), образуют объединение последовательностей

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_m \le \ldots \to +\infty, \tag{1.12}$$

$$0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \mu_m \le \ldots \to +\infty \tag{1.13}$$

двух предельных задач: задачи в области Ω

$$-\Delta v(x) = \lambda v(x),\ x \in \Omega, \quad \partial_n v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad v(x) = 0,\ x \in \Gamma,$$

и задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\partial_z^2 w(z) = \mu w(z),\ z \in \Upsilon, \quad w(\pm 1) = 0.$$

Помимо равенства $\big\{\lim \Lambda_m^h\big\}_{m \in \mathbb{N}} = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, выражающего упомянутый ранее факт, известны асимптотические формулы для собственных чисел и функций задачи (1.11). Сошлемся на публикации [6, 7], инициировавшие исследования задачи (1.11), а также в некотором смысле завершающую работу [8], где и построены полные асимптотические разложения во всевозможных ситуациях.

Полученные в данной статье результаты показывают, что асимптотическое строение спектра упругой задачи (1.4)–(1.6) существенно отличается от скалярного случая. Так, в § 3 установлено соотношение

$$\lim_{h \to +0} h^{-2} \Lambda_m^h = \lambda_m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

---

1) Цитированные далее работы обычно имеют дело с задачей Неймана, однако для удобства сравнения с задачей (1.4)–(1.6) назначили условие Дирихле на части Γ поверхности $\partial\Omega$.

где λ_m — собственные числа первой предельной задачи для стержня, выведенной в п. 2.1 на основе процедуры понижения размерности (см., например, [1, гл. 5, 7]) и представляющей собой задачу Дирихле для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале $\Upsilon = (-1, 1)$. Формула (1.14) описывает эффект концентрации спектра задачи (1.4)–(1.6): все собственные числа со скоростью $O(h^2)$ стремятся к нулю. В п. 4.2 (теорема 4.1) этот результат уточнен и установлена оценка

$$\left|\Lambda_m^h - h^2\lambda_m\right| \le C_m h^{5/2}. \tag{1.15}$$

Для объединенной последовательности (1.13) собственных чисел двух других предельных задач на интервале Υ и в области Ω, указанных в п. 2.2 и п. 2.3 соответственно, проверено (теорема 4.4) соотношение

$$\left|\Lambda_{N^h(n)}^h - \mu_n\right| \le C_n h^{1/2}. \tag{1.16}$$

Подчеркнем особо, что формула (1.16) не влечет за собой какую-либо сходимость: номер $N^h(n)$ фигурирующего в ней члена последовательности (1.9) зависит от параметра h, что согласуется с асимптотикой (1.15). Наконец, в п. 4.4 обсуждаются возможные обобщения результатов и формулируются открытые вопросы.

§ 2. Предельные задачи

2.1. Первая предельная задача. Сводка результатов по асимптотическому анализу тонких упругих стержней. Для сужения собственного вектора u на стяжку $Q(h)$ примем анзац, обычный в линейной теории тонких стержней (см., например, [1, гл. 5]):

$$u^h(x) = h^{-2}U^{-2}(z) + h^{-1}U^{-1}(\eta, z) + h^0U^0(\eta, z) + h^1U^1(\eta, z) + h^2U^2(\eta, z) + \dots. \tag{2.1}$$

Здесь

$$U^{-2}(z) = \sum_{i=1}^{2} w_i(z)e_i, \quad U^{-1}(\eta, z) = \left(w_3(z) + \sum_{i=1}^{2} \eta_i\partial_z w_i(z)\right)e_3 + w_4(z)\theta(\eta), \tag{2.2}$$

$\eta = h^{-1}y \in \mathbb{R}^2$ — растянутые координаты, e_j — орт оси x_j, $\theta(\eta) = 2^{-1/2}(\eta_1e_2 - \eta_2e_1)$ — поворот вокруг оси $z = x_3$, $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^\top$ — вектор-функция, подлежащая определению, причем ее компоненты w_1 и w_2 связаны с (приближенными) прогибами стержня в нормальных направлениях, w_3 — с продольным смещением, и w_4 — с закручиванием стержня.

Предвосхищая результат формального асимптотического анализа, укажем, что функции w_1 и w_2 в анзаце (2.1), (2.2) могут быть ненулевыми только при малых собственных числах задачи (1.4)–(1.6), для которых примем следующий анзац:

$$\Lambda^h = h^2\lambda + \dots. \tag{2.3}$$

В координатах η и z оператор $L(\nabla_x)$ из левой части (1.4) допускает расщепление

$$L(\nabla_x) = h^{-2}L^0(\nabla_\eta) + h^{-1}L^1(\nabla_\eta, \partial_z) + h^0L^2(\partial_z), \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} L^0 = -\mathscr{D}_\eta^\top A\mathscr{D}_\eta, \quad L^1 = -\mathscr{D}_\eta^\top A\mathscr{D}_z - \mathscr{D}_z^\top A\mathscr{D}_\eta, \quad L^2 = -\mathscr{D}_z^\top A\mathscr{D}_z, \\ \mathscr{D}_\eta = \mathscr{D}(\partial/\partial\eta_1, \partial/\partial\eta_2, 0), \quad \mathscr{D}_z = \mathscr{D}(0, 0, \partial/\partial_z). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Аналогично

$$N(x,\nabla_x)=h^{-1}N^0(\eta,\nabla_\eta)+h^0N^1(\eta,\nabla_\eta,\partial_z), \tag{2.6}$$

$$N^0=\mathscr{D}_n^\top A\mathscr{D}_\eta,\quad N^1=\mathscr{D}_n^\top A\mathscr{D}_z,\quad \mathscr{D}_n=\mathscr{D}(n_1,n_2,0). \tag{2.7}$$

Здесь фигурируют компоненты единичной нормали $n=(n_1,n_2,0)^\top$ к цилиндрической части поверхности стяжки. Подставим соотношения (2.1), (2.3) и (2.4), (2.6) в задачу (1.4), (1.5), суженную на стержень $Q(h)$ и его боковую поверхность. Собирая слагаемые с одинаковыми множителями h^p, приходим к рекуррентной последовательности краевых задач Неймана на сечении стержня с параметром $z\in\Upsilon$:

$$L^0U^k=F^k:=-L^1U^{k-1}-L^2U^{k-2}+\delta_{k,2}\lambda \text{ на } \omega,\quad N^0U^k=G^k:=-N^1U^{k-1} \text{ на } \partial\omega, \tag{2.8}$$

где $k=-2,\dots,2$ и $U^p=0$ при $p<-2$. Нетрудно убедиться в том, что вектор-функции (2.2) удовлетворяют задачам (2.8) при $k=-2$ и $k=-1$. Кроме того, в случае $k=0$ согласно формулам (2.2) и (2.5), (2.7) имеем

$$\begin{gathered}
F^0=\mathscr{D}_\eta^\top A\mathscr{D}_zU^{-1}+\mathscr{D}_z^\top A(\mathscr{D}_\eta U^{-1}+\mathscr{D}_zU^{-2})=\mathscr{D}_\eta^\top A\mathscr{D}_zU^{-1},\\
G^0=-\mathscr{D}_n^\top A\mathscr{D}_zU^{-1},\\
\mathscr{D}_zU^{-1}(\eta,z)=\mathscr{Y}(\eta)\mathbf{D}(\partial_z)w(z),\quad \mathbf{D}(\partial_z)=\operatorname{diag}\left(\partial_z^2,\partial_z^2,\partial_z^1,\partial_z^1\right),\\
\mathscr{Y}(\eta)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\eta_1\\0&0&0&0&\eta_2\\0&0&0&0&1\\0&0&-\eta_2/2&\eta_1/2&0\end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Таким образом, решение задачи (2.8) при $k=0$ приобретает вид

$$U^0(\eta,z)=\mathscr{X}(\eta)\mathbf{D}(\partial_z)w(z), \tag{2.10}$$

где $\mathscr{X}$ — (3×4)-матрица-функция, удовлетворяющая (матричной, а не векторной, как (2.8)) задаче на сечении

$$-\mathscr{D}_\eta^\top A\mathscr{D}_\eta\mathscr{X}=\mathscr{D}_\eta^\top A\mathscr{Y}\ \text{ на } \omega,\quad \mathscr{D}_n^\top A\mathscr{D}_\eta\mathscr{X}=-\mathscr{D}_n^\top A\mathscr{Y}\ \text{ на } \partial\omega. \tag{2.11}$$

При помощи формулы интегрирования по частям проверяем условия разрешимости этой задачи:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\omega_1(z)}F_p^0(\eta,z)\,d\eta+\int\limits_{\partial\omega_1(z)}G_p^0(\eta,z)\,ds_\eta=0,\quad p=1,2,3,\\
\int\limits_{\omega_1(z)}\theta(\eta)^\top F^0(\eta,z)\,d\eta+\int\limits_{\partial\omega_1(z)}\theta(\eta)^\top G^0(\eta,z)\,ds_\eta=0.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

При $k=1$ правые части равенств (2.8) выглядят так:

$$F^1=\mathscr{D}_\eta^\top A\mathscr{D}_zU^0+D_z^\top A(\mathscr{D}_\eta U^0+\mathscr{D}_zU^{-1}),\quad G^1=-\mathscr{D}_n^\top A\mathscr{D}_zU^0. \tag{2.13}$$

В [9, п. 4.2; 1, п. 5.3.4] проверено, что первые два ($p=1,2$) условия разрешимости (2.12) задачи (2.8), $k=0$, с правыми частями (2.13) выполнены автоматически, а другие два принимают вид двух нижних строк следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{L}(\partial_z)w(z):=\mathbf{D}(-\partial_z)^\top\mathbf{A}\mathbf{D}(\partial_z)w(z)=\lambda E'(\omega)w(z),\quad z\in(-1,1). \tag{2.14}$$

Здесь $E(\omega) = \operatorname{diag}(|\omega|, |\omega|, 0, 0)$, $|\omega|$ — площадь фигуры ω и

$$\mathbf{A} = \int\limits_{\omega_1(z)} (\mathscr{D}_\eta \mathscr{X}(\eta) + \mathscr{Y}(\eta))^\top A(\mathscr{D}_\eta \mathscr{X}(\eta) + \mathscr{Y}(\eta))\, d\eta. \tag{2.15}$$

Две верхние строки системы 2.14 представляют собой два первых ($p = 1, 2$) условия разрешимости (2.12) задачи (2.8), $k = 2$, в которой правые части имеют вид

$$F^2 = \mathscr{D}_\eta^\top A \mathscr{D}_z U^1 + \mathscr{D}_z^\top A(\mathscr{D}_\eta U^1 + \mathscr{D}_z U^0) + \lambda U^{-2}, \quad G^2 = -\mathscr{D}_n^\top A \mathscr{D}_z U^1. \tag{2.16}$$

Подчеркнем, что все преобразования [9, § 2; 1, п. 5.3.4] упомянутых условий разрешимости опираются на соотношения (2.11) и формулу для U^{-1} в списке (2.9).

В [9, п. 2.6; 1, п. 5.3.4] также установлено, что $\mathbf{A}$ — симметричная положительно определенная (4×4)-матрица. Поскольку матрица $\mathbf{D}(\partial_z)$ из второй строки (2.9) диагональная, знак транспонирования при первом сомножителе в средней части (2.14) можно не писать и он оставлен только для того, чтобы подчеркнуть схожесть строения систем (2.14) и (1.4).

Снабдим систему уравнений (2.14) граничными условиями

$$w_q(\pm 1) = 0,\ q = 1, \ldots, 4, \quad \partial_z w_i(\pm 1) = 0,\ i = 1, 2. \tag{2.17}$$

Итак, сформирована первая предельная спектральная задача для стержня.

Лемма 2.1. *Задача* (2.14), (2.17) *обладает последовательностью собственных чисел* (1.12), *а соответствующие собственные векторы* $w_{(m)} = (w_{(m)1}, \ldots, w_{(m)4})^\top$ *можно подчинить условиям ортогональности и нормировки*

$$|\omega|\big(w'_{(m)}, w'_{(p)}\big)_\Upsilon = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N}, \tag{2.18}$$

где $w'_{(m)} = (w_{(m)1}, w_{(m)2})^\top$ *— усеченный вектор* $w_{(m)}$.

Замечание 2.1. Поскольку в правой части 2.14 расположена вырожденная диагональная матрица $E'(\omega)$, проверка леммы 2.1 требует дополнительных построений. В гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathring{H}^2(\Upsilon)^2 \times \mathring{H}^1(\Upsilon)^2$ введем скалярное произведение $\langle w, v\rangle = (\mathbf{A}\mathbf{D}(\partial_z)w, \mathbf{D}(\partial_z)v')_\Upsilon$, а также положительный, непрерывный и симметрический, а значит, самосопряженный оператор $\mathbf{T}$ при помощи формулы $\langle \mathbf{T}w, v\rangle = |\omega|(w', v')_\Upsilon$, $w, v \in \mathbf{H}$. Обобщенная постановка задачи (2.14), (2.17), т. е. интегральное тождество

$$(\mathbf{A}\mathbf{D}(\partial_z)w, \mathbf{D}(\partial_z)v')_\Upsilon = \lambda|\omega|(w', v')_\Upsilon, \quad v \in \mathbf{H}, \tag{2.19}$$

равносильна абстрактному уравнению $\mathbf{T}w = \tau w$ в $\mathbf{H}$. Связь $\tau = \lambda^{-1}$ спектральных параметров переделывает последовательность

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \ldots \geq \tau_m \geq \ldots \to +0 \tag{2.20}$$

собственных чисел компактного оператора $\mathbf{T}$ в последовательность (1.12) собственных чисел задачи (2.19). Напомним, что согласно [10, теоремы 10.1.5, 10.2.2] спектр оператора состоит из дискретного спектра (2.20) и существенного спектра $\{\tau = 0\}$. ⊠

2.2. Вторая предельная задача на стержне. Помимо серии малых собственных чисел (2.3) задачи (1.4)–(1.6) возникает серия собственных чисел, представимых в виде

$$\Lambda^h = \mu + \ldots. \tag{2.21}$$

Процедура нахождения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений в целом повторяет вывод системы (2.14). Тем не менее имеются и различия. Из-за модификации асимптотического анзаца для собственных чисел условиями разрешимости задачи (2.8) при $k = 0$ становятся равенства

$$|\omega|\mu w_i(z) = 0, \quad i = 1, 2, \ z \in (-1, 1).$$

Следовательно, в формулах (2.1) и (2.2) приходится положить $w_1 = w_2 = 0$ и тем самым укоротить их следующим образом:

$$u^h(x) = h^{-1}U^{-1}(\eta, z) + h^0U^0(\eta, z) + h^1U^1(\eta, z) + \ldots, \tag{2.22}$$

$$U^{-1}(\eta, z) = w_3(z)e_3 + w_4(z)\theta(\eta). \tag{2.23}$$

Кроме того, в правой части первой формулы (2.13) появляется дополнительное слагаемое μU^{-1}. В результате условия разрешимости (2.12) задачи (2.8), $k = 1$, записываются как система двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\partial_z \mathbf{A}''\partial_z w''(z) = \mu E''(\omega)w''(z), \quad z \in (-1, 1). \tag{2.24}$$

При этом $w'' = (w_3, w_4)^\top$ — укороченный вектор, дополняющий w' до w, $\mathbf{A}''$ — правый нижний (2×2)-блок матрицы $\mathbf{A}$, $E''(\omega) = \operatorname{diag}\left(|\omega|, \frac{1}{2}\int\limits_\omega |\eta|^2\, d\eta\right)$ — диагональная (2×2)-матрица (при замене ею правого нижнего (2×2)-блока матрицы $E'(\omega)$ из (2.14) возникает неособенная (4×4)-матрица $E(\omega)$). Задача (2.8) при $k = 2$ остается невостребованной: при обосновании асимптотики в п. 4.3 точность, обеспеченная анзацем (2.22), оказывается достаточной.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.24), снабженная граничными условиями

$$w''(\pm 1) = 0, \tag{2.25}$$

представляет собой вторую предельную спектральную задачу для стержня. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2.2. Задача (2.24), (2.25) *обладает последовательностью собственных чисел*

$$0 < \mu_1^\Upsilon \le \mu_2^\Upsilon \le \ldots \le \mu_m^\Upsilon \le \ldots \to +\infty, \tag{2.26}$$

а соответствующие собственные векторы $w''_{(m)} = (w_{(m)3}, w_{(m)4})^\top$ *можно подчинить условиям ортогональности и нормировки* $(E''(\omega)w''_{(m)}, w''_{(p)})_\Upsilon = \delta_{m,p}$, $m, p \in \mathbb{N}$.

2.3. Предельная задача на теле. Включение задачи

$$L(x, \nabla_x)v(x) = \mu v(x), \ x \in \Omega, \quad N(x, \nabla_x)v(x) = 0, \ x \in \partial\Omega \setminus \Gamma, \quad v(x) = 0, \ x \in \Gamma, \tag{2.27}$$

в список предельных не может вызвать недоумения. Справедливо неравенство Корна

$$\|v; H^1(\Omega)\| \le c_\Omega \|\mathscr{D}(\nabla_x)v; L_2(\Omega)\|, \quad v \in \mathring{H}^1(\Omega; \Gamma)^3 \tag{2.28}$$

(см. [4, 5] и др.). Поэтому собственные числа задачи (2.27) составляют последовательность

$$0 < \mu_1^\Omega \le \mu_2^\Omega \le \ldots \le \mu_m^\Omega \le \ldots \to +\infty. \tag{2.29}$$

Соответствующие собственные вектор-функции v^m можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(v_{(m)}, v_{(p)})_\Omega = \delta_{m,p}, \quad m, p \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

§ 3. Теорема о сходимости

3.1. Весовое анизотропное неравенство Корна. Пусть $u^h \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Xi(h);\Gamma)^3$. В дополнение к неравенству Корна (2.28) напишем следствие

$$\|r^{-1}u^h; L_2(\Omega)\| \le c\|u^h; H^1(\Omega)\| \tag{3.1}$$

одномерного неравенства Харди

$$\int\limits_0^d |U(r)|^2 dr \le 4\int\limits_0^d r^2 \left|\frac{dU}{dr}(r)\right|^2 dr, \quad U \in C^1[0,d],\ U(d)=0,\ d\in(0,+\infty]. \tag{3.2}$$

Здесь $r(x)$ — расстояние от x до ближайшей из точек $P^\pm$. Рассмотрим стержень $\mathbf{Q}_h = \{x \in Q_h' : |z| < 1+2\mathbf{l}h\} \subset Q_h$, а постоянную $\mathbf{l}$ подберем так, чтобы сечения $\omega_h(\pm 1 \pm \mathbf{l}h)$ попали вовнутрь тела Ω. Введем гладкую срезающую функцию $\mathbf{X}_h$, $\mathbf{X}_h(z) = 1$ при $|z| \le 1$ и $\mathbf{X}_h(z) = 0$ при $|z| \ge 1+\mathbf{l}h$; можно считать, что $|\partial_z^k \mathbf{X}_h(z)| \le c_k h^{-k}$, $k = 0,1,\dots$. Поскольку $r(x) \le ch$ при $x \in \mathbf{Q}_h \setminus Q_h$, верна формула

$$\begin{aligned}
&|\|\mathscr{D}(\nabla_x)(\mathbf{X}_h u^h); L_2(\mathbf{Q}_h)\|^2 - \|\mathscr{D}(\nabla_x)u^h; L_2(\mathbf{Q}_h)\|^2| \\
&\qquad \le c(\|\nabla_x u^h; L_2(\mathbf{Q}_h\setminus Q_h)\|^2 + h^{-2}\|u^h; L_2(\mathbf{Q}_h\setminus Q_h)\|^2) \\
&\qquad \le c(\|\nabla_x u^h; L_2(\mathbf{Q}_h\setminus Q_h)\|^2 + \|r^{-1}u^h; L_2(\mathbf{Q}_h\setminus Q_h)\|^2) \le c\|u^h; H^1(\mathbf{Q}_h)\|^2
\end{aligned}$$

(множитель h^{-2} возник из-за дифференцирования срезки, но погашен допустимым весовым множителем r^{-2}). Согласно [1, теорема 3.4.6] (см. первоисточники [11–14]) на тонком стержне $\mathbf{Q}_h$ с защемленными торцами $\omega_h(\pm 1 \pm 2\mathbf{l}h)$ (произведение $\mathbf{X}_h u^h$ обращается в нуль при $z = \pm 1 \pm 2\mathbf{d}h$) справедливо *весовое анизотропное* неравенство Корна

$$\lvert\!\lvert \mathbf{u}^h; \mathbf{Q}_h \rvert\!\rvert_h \le c\|\mathscr{D}(\nabla_x)\mathbf{u}^h; L_2(\mathbf{Q}_h)\|, \tag{3.3}$$

в котором постоянная c не зависит от параметра h и, разумеется, вектор-функции $\mathbf{u}^h = \mathbf{X}_h u^h \in \overset{\circ}{H}{}^1(\mathbf{Q}_h; \omega_h(\pm 1 \pm 2\mathbf{l}h))^3$, а норма из левой части (3.3) задана так:

$$\begin{aligned}
\lvert\!\lvert \mathbf{u}^h; \mathbf{Q}_h \rvert\!\rvert_h = \Bigg(\int\limits_{\mathbf{Q}_h} \Bigg(\sum_{i=1,2}\Bigg(\left|\frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial y_i}\right|^2 + h^2\varrho_h^{-2}\Bigg(\left|\frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{u}_3^h}{\partial y_i}\right|^2\Bigg) + h^2\varrho_h^{-4}\left|\mathbf{u}_i^h\right|^2\Bigg) \\
+ h^2\varrho_h^{-2}\Bigg(\left|\frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial y_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{u}_2^h}{\partial y_1}\right|^2\Bigg) + \left|\frac{\partial \mathbf{u}_z^h}{\partial z}\right|^2 + \varrho_h^{-2}\left|\mathbf{u}_3^h\right|^2\Bigg)\,dx\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь $\varrho_h(z) = 1 - |z| + h$ — весовой множитель, равный $O(h)$ вблизи концов стержня и $O(1)$ на удалении от них. Далее удобно использовать еще один весовой множитель $r_h(x) = \operatorname{dist}(x, P^\pm) + h$ и норму

$$\lvert\!\lvert u^h; \Omega \rvert\!\rvert_h = \big(\|\nabla_x u^h; L_2(\Omega)\|^2 + \big\|r_h^{-1}u^h; L_2(\Omega)\big\|^2\big)^{1/2}, \tag{3.5}$$

согласованную с оценками (2.28) и (3.1). Поскольку $\mathbf{u} = \mathbf{X}_h u = u$ на стяжке $Q(h)$, установлено следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Для вектор-функции* $u^h \in \mathring{H}^1(\Omega;\Gamma)^3$ *выполнено неравенство*

$$\left|\!\left| u^h;\Xi(h)\right|\!\right|_h \le c\|\mathscr{D}(\nabla_x)\mathbf{u}^h;L_2(\Xi(h))\|, \tag{3.6}$$

где норма $\left|\!\left| u^h;\Xi(h)\right|\!\right|_h$ *определена как сумма норм* (3.4) *и* (3.5), *а множитель* c *не зависит от* $h\in(0,1]$ *и* u.

Распределение весовых множителей во введенных нормах является асимптотически точным (проверку см., например, в книге [1] и обзоре [15]).

3.2. Выделение сходящихся последовательностей. В п. 4.2 будет доказано, что при любом $m\in\mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\Lambda_m^h \le c_m h^2, \quad h\in(0,h_m), \tag{3.7}$$

где c_m и h_m — некоторые положительные величины (зависящие от порядкового номера m). Пусть $u^h_{(m)}$ — собственная вектор-функция задачи (1.4)–(1.6), отвечающая собственному числу Λ_m^h и нормированная согласно формуле (1.10). В силу интегрального тождества (1.7) имеем

$$c_m h^2 \ge \Lambda_m^h = \big(A\mathscr{D}(\nabla_x)u^h_{(m)},\mathscr{D}(\nabla_x)u^h_{(m)}\big)_{\Xi(h)} \ge c_A\big\|\mathscr{D}(\nabla_x)u^h_{(m)};L_2(\Xi(h))\big\|^2,$$

где $c_A>0$, а значит, при учете оценки (3.6) находим, что

$$\big\|u^h_{(m)};L_2(\Omega)\big\| \le c\left|\!\left| u^h_{(m)};\Omega\right|\!\right|_h \le ch, \quad \left|\!\left| u^h_{(m)};\mathbf{Q}_h\right|\!\right|_h \le ch. \tag{3.8}$$

Здесь и далее мажоранты по-прежнему зависят от номера m собственного числа, однако это не отражено в их обозначении.

Определим функции

$$w^h_{(m)i}(z) = hX_h(z)\bar u^h_{(m)i}(z),\ i=1,2, \quad w^h_{(m)3}(z) = X_h(z)\bar u^h_{(m)3}(z), \tag{3.9}$$

где составляющие $\bar u^h_{(m)j}$ заданы формулой

$$\bar u^h_j(z) = |\omega_h(z)|^{-1}\int\limits_{\omega_h(z)} u^h_j(y,z)\,dy, \quad j=1,2,3, \tag{3.10}$$

$X_h\in C_c^\infty(\Upsilon)$ — срезающая функция, $X_h(z)=1$ при $|z|\le 1-2lh$, $X_h(z)=0$ при $|z|\ge 1-lh$, $|\partial_z^p X_h(z)|\le c_p h^{-p}$, $p=0,1,2,\dots$, а величина $d>0$ подобрана так, чтобы $X_h=0$ вне стяжки $Q(h)$. Введем еще одну функцию

$$w^h_{(m)4}(z) = X_h(z)\bigg(\frac12\int\limits_{\omega_h(z)}|y|^2\,dy\bigg)^{-1}\int\limits_{\omega_h(z)}\theta(y)^\top u^h_{(m)}(y,z)\,dy. \tag{3.11}$$

Отметим, что множителями при интегралах в правых частях (3.10) и (3.11) служат элементы (4×4)-матрицы $E(\omega)^{-1}$.

Учитывая введенные ранее определения, получаем при $i=1,2$, что

$$\begin{aligned}\big\|w^h_{(m)i};H^1(\Upsilon)\big\|^2 &\le ch^2\bigg(\int\limits_{\Upsilon}\big(\big|\bar u^h_{(m)i}(z)\big|^2+\big|\partial_z\bar u^h_{(m)i}(z)\big|^2\big)\,dz + h^{-2}\int\limits_{\Upsilon(h)}\big|\bar u^h_{(m)i}(z)\big|^2\,dz\bigg)\\ &\le ch^2\int\limits_{\Upsilon}\bigg(|\omega_h(z)|^{-1}\int\limits_{\omega_h(z)}\big((1+\varrho_h(z)^{-2})\big|u^h_{(m)i}(z)\big|^2+\big|\partial_z u^h_{(m)i}(z)\big|^2\big)\,dy\\ &+|\omega_h(z)|^{-2}|\partial\omega_h(z)|h^2\int\limits_{\partial\omega_h(z)}\big|u^h_{(m)i}(z)\big|^2\,ds_y\bigg)\,dz \le ch^{-2}\left|\!\left| u^h_{(m)};\mathbf{Q}_h\right|\!\right|_h^2 \le c.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Эта выкладка нуждается в пояснениях. Первый множитель h^{-2} в (3.12) возник из-за дифференцирования срезки X_h, однако благодаря сужению интеграла на $\Upsilon(h) = (-1+lh, -1+2lh) \cup (1-2lh, 1-lh)$ (только на этих коротких интервалах производная $\partial_z X_h$ отлична от нуля) названный множитель удалось заменить весом $\varrho_h(z)^{-2}$, фигурирующим в норме (3.4). Кроме того, были применены правило дифференцирования интегралов с переменными пределами (соответственно $|\partial\omega|$ — периметр фигуры ω) и следовое неравенство

$$h \int\limits_{\partial\omega_h} |v(y)|^2 \, ds_y \le c \int\limits_{\omega_h} (h^2 |\nabla_y v(y)|^2 + |v(y)|) \, dy. \tag{3.13}$$

В (3.13) распределение степеней параметра h фиксируется растяжением координат $y \mapsto \eta$. В конце выкладки (3.12) использованы формула (3.4) для анизотропной нормы и оценка (3.8).

Такие же преобразования с понятными изменениями показывают, что

$$\left\| w^h_{(m)j}; H^1(\Upsilon) \right\|^2 \le c h^{-2} \left\| u^h_{(m)}; \mathbf{Q}_h \right\|_h^2 \le c, \quad j = 3, 4. \tag{3.14}$$

Следовательно, существует бесконечно малая положительная последовательность $\{h_p\}$, вдоль которой верны сходимости

$$h^{-2} \Lambda^{h_p}_m \to \lambda^0_m, \quad w^{h_p}_{(m)} \to w^0_{(m)} \ \text{ слабо в } H^1(\Upsilon)^4 \ \text{ и сильно в } L_2(\Upsilon)^4. \tag{3.15}$$

Подчеркнем, что $w^h_{(m)}(\pm 1) = 0 \in \mathbb{R}^4$, а значит, $w^0_{(m)} \in \mathring{H}^1(\Upsilon)^4$. Этот же факт можно выразить включением $w^0_{(m)} \in V^1_0(\Upsilon)^4$, где $V^l_\beta(\Upsilon)$ — весовое пространство Кондратьева [16] с нормой

$$\left\| w; V^l_\beta(\Upsilon) \right\| = \left(\sum_{q=0}^{l} \left\| \varrho_0^{\beta-l+q} \partial_z^q w; L_2(\Upsilon) \right\|^2 \right)^{1/2},$$

причем $\beta \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1, \dots$, а $\varrho_0(z) = 1 - |z|$ — расстояние до концов отрезка Υ. Эквивалентность обычной $\|\cdot; H^1(\Upsilon)\|$ и весовой $\left\|\cdot; V^1_0(\Upsilon)\right\|$ норм в пространстве $\mathring{H}^1(\Upsilon)$ обеспечено одномерным неравенством Харди, получающимся из неравенства (3.2) с $d = +\infty$ заменой $r \mapsto \varrho = 1/r$. Поскольку подынтегральное выражение (3.4) содержит множители $h^2 \varrho_h(z)^{-4}$ и $h^2 \varrho_h(z)^{-2}$ при $\mathbf{u}^h_i(z)$ и $\partial_z \mathbf{u}^h_i(z)$ соответственно, незначительные изменения в выкладке (3.13) приводят к неравенствам $\left\| w^h_{(m)i}; V^1_{-1}(\Upsilon) \right\| \le c$, $i = 1, 2$. В результате, разрежая при необходимости последовательность $\{h_p\}$, обнаруживаем, что

$$w^{h_p}_{(m)i} \ \to \ w^0_{(m)i} \ \text{ слабо в } V^1_{-1}(\Upsilon), \quad i = 1, 2. \tag{3.16}$$

Подчеркнем, что включение функции $\mathbf{w}_i \in H^2(\Upsilon)$ в пространство $V^1_{-1}(\Upsilon)$ означает, что для нее выполнены граничные условия (2.17) при $i = 1, 2$.

Напишем еще несколько соотношений:

$$\left| \left(u^h_{(m)}, u^h_{(m)} \right)_\Omega \right| \le c \left\| u^h_{(m)}; \Omega \right\|_h^2 \le c h^2, \quad \left| \left(u^h_{(m)3}, u^h_{(m)3} \right)_{Q(h)} \right| \le c \left\| u^h_{(m)}; Q(h) \right\|_h^2 \le c h^2,$$

$$\begin{aligned} &\left| \left(u^h_{(m)i}, u^h_{(m)i} \right)_{Q(h)} - \left(X_h u^h_{(m)i}, X_h u^h_{(m)i} \right)_{Q(h)} \right| \\ &\qquad \le c h^4 \left\| \varrho_h^{-2} u^h_{(m)i}; L_2(Q(h)) \right\|^2 \le c h^2 \left\| u^h_{(m)}; Q(h) \right\|_h^2 \le c h^4, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\big(X_h u^h_{(m)i}, X_h u^h_{(m)i}\big)_{Q_h} = \big(w^h_{(m)i}, w^h_{(m)i}\big)_{Q_h} + \big(X_h u^h_{(m)i} - w^h_{(m)i}, X_h u^h_{(m)i} - w^h_{(m)i}\big)_{Q_h},$$

$$\begin{aligned}\big\|X_h u^h_{(m)i} - w^h_{(m)i}; L_2(Q(h)\big\|^2 \le ch^2 \big\|\nabla_y\big(X_h u^h_{(m)i} - w^h_{(m)i}\big); L_2(Q_h)\big\|^2 \\ = ch^2\big\|X_h\nabla_y u^h_{(m)i}; L_2(Q_h)\big\|^2 \le c\big|u^h_{(m)}; Q(h)\big|^2_h \le ch^2.\end{aligned}$$

Первая пара — следствие оценок (3.8). Кроме того, в пятом дополнительно использовано неравенство Пуанкаре с малым множителем $O(h^2)$, так как средние по сечению ω_h у разностей $X_h u^h_{(m)i} - w^h_{(m)i}$ нулевые. Определение средних также учтено в четвертом соотношении. В третьем дополнительный множитель h^4 получен введением под норму веса ϱ_h^{-2}, имеющего порядок h^{-2} на носителе функции $1 - X_h^2$. Перечисленные факты и отмеченная в формуле (3.15) сильная сходимость в $L_2(\Upsilon)$ преобразуют условие нормировки (1.10) собственной функции $u^h_{(m)}$ в равенство

$$|\omega|\big(w^{0\prime}_{(m)}, w^{0\prime}_{(m)}\big)_\Upsilon = 1. \tag{3.18}$$

3.3. Предельный переход в интегральном тождестве. В обобщенной постановке (1.7) спектральной задачи (1.4)–(1.6) выберем специальную пробную функцию $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Xi(h);\Gamma)^3$, имитирующую асимптотическую конструкцию (2.1). Именно, зафиксируем какую-нибудь вектор-функцию $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_4)^\top \in C_c^\infty(\Upsilon)^4$ и определим выражения $\mathbf{V}^{-2}$, $\mathbf{V}^{-1}$ и $\mathbf{V}^0$ по формулам (2.2) и (2.10), а $\mathbf{V}^1$ — как решение задачи (2.8) с номером $k = 1$ и правыми частями $\mathbf{F} = \mathbf{F}^1 - \mathbf{f}^1$, $\quad \mathbf{G} = \mathbf{G}^1$, где $\mathbf{F}^1$ и $\mathbf{G}^1$ заданы равенствами (2.13), в которых выражения U^0 и U^{-1} заменены выражениями $\mathbf{V}^0$ и $\mathbf{V}^{-1}$ соответственно, и

$$\mathbf{f}^1(y,z) = |\omega|^{-1}e_3\mathbf{L}_3(\partial_z)\mathbf{v}(z) + \bigg(\frac12\int\limits_\omega |\eta|^2\,d\eta\bigg)^{-1}\theta(\eta)\mathbf{L}_4(\partial_z)\mathbf{v}(z), \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_3(\partial_z)\mathbf{v}(z) &= \int\limits_\omega \mathbf{F}^1_3(\eta,z)\,d\eta + \int\limits_{\partial\omega}\mathbf{G}^1_3(\eta,z)\,ds_\eta,\\ \mathbf{L}_4(\partial_z)\mathbf{v}(z) &= \int\limits_\omega \theta(\eta)^\top\mathbf{F}^1(\eta,z)\,d\eta + \int\limits_{\partial\omega}\theta(\eta)^\top\mathbf{G}^1(\eta,z)\,ds_\eta.\end{aligned} \tag{3.20}$$

При этом $\mathbf{L}_3$ и $\mathbf{L}_4$ — столбцы (4×4)-матрицы $\mathbf{L}$ дифференциальных операторов, введенной соотношениями (3.14), (3.15). Равенства (3.20) обусловлены построениями, которые проведены в п. 2.1, и к тому же обеспечивают условия разрешимости обсуждаемой задачи.

Положим

$$v(x) = h^{-3}\mathbf{V}^{-2}(z) + h^{-2}\mathbf{V}^{-1}(\eta,z) + h^{-1}\mathbf{V}^0(\eta,z) + \mathbf{V}^1(\eta,z) \tag{3.21}$$

(ср. анзац (2.1), умноженный на h^{-1}) и заметим, что при малом $h \in (0, h_\mathbf{v})$ (верхняя грань $h_\mathbf{v} > 0$ зависит от $\mathbf{v}$) носитель вектор-функции (3.21) лежит в $\overline{Q(h)}$, т. е. v можно продолжить нулем на тело Ω. Из формулы Грина и соотношений (1.4)–(1.6) вытекает равенство

$$\Lambda^h_m\big(u^h_{(m)}, v\big)_{\Xi(h)} = \big(u^h_{(m)}, Lv\big)_{\Xi(h)} + \big(u^h_{(m)}, Nv\big)_{\partial\Xi(h)}, \tag{3.22}$$

в котором множества $\Xi(h)$ и $\partial\Xi(h)$ можно заменить множествами Q_h и $\partial Q_h \cap \partial\Xi(h)$. Имеем

$$\begin{aligned}&\big|\big(u^h_{(m)}, v\big)_{Q(h)} - h^{-3}\big(\big(u^h_{(m)1}, \mathbf{v}_1\big)_{Q(h)} + \big(u^h_{(m)2}, \mathbf{v}_2\big)_{Q(h)}\big)\big| \\ &\quad\le c_{\mathbf{v}} h^{-3}\Bigg(\sum_{i=1}^{2}\big(h\big\|u^h_{(m)i} - \bar u^h_{(m)i}; L_2(Q(h))\big\| + h^2\big\|u^h_{(m)i}; L_2(Q(h))\big\|\big) \\ &\qquad + h^1\big\|u^h_{(m)3}; L_2(Q(h))\big\|\Bigg)|\omega_h|^{1/2} \le c_{\mathbf{v}} h^{-1} \big| u^h_{(m)}; Q(h) \big|_h \le c_{\mathbf{v}}.\end{aligned}$$

При этом оценены три последних члена из (3.21) и учтено, что у компонент $\mathbf{V}^{-1}_i$ нулевое среднее по сечению, так как начало координат η помещено в центр тяжести фигуры ω (ср. вторую формулу (2.2)). Последнее обстоятельство позволило вычесть среднее $\bar u^h_{(m)i}$ и применить неравенство Пуанкаре с малым множителем ch^2. Кроме того, $X_h v = v$ при $h > 0$, и потому на место $\bar u^h_{(m)i}$ можно поставить $h^{-1}w^h_{(m)}$. Итак, благодаря сходимостям (3.15) левая часть (3.22) при $h_p \to +0$ имеет предел

$$\lim\left(h_p^{-2}\Lambda_m^{h_p}\sum_{i=1}^{2} h_p^{-1}\int\limits_{\Upsilon}\int\limits_{\omega_{h_p}} u^{h_p}_{(m)i}(y,z)\mathbf{v}_i(z)\,dydz\right) = \lambda^0_m|\omega|\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Upsilon} w^0_{(m)}(z)\mathbf{v}_i(z)\,dz.$$

Рассмотрим скалярные произведения в правой части (3.22). При учете расщеплений (2.3), (2.6) находим, что

$$\begin{aligned}Lv &= h^{-5}L^0\mathbf{V}^{-2} + h^{-4}(L^0\mathbf{V}^{-1} + L^1\mathbf{V}^{-2}) + h^{-3}(L^0\mathbf{V}^0 + L^1\mathbf{V}^{-1} + L^2\mathbf{V}^{-2}) \\ &\quad + h^{-2}(L^0\mathbf{V}^1 + L^1\mathbf{V}^0 + L^2\mathbf{V}^{-1}) + h^{-1}(L^1\mathbf{V}^1 + L^2\mathbf{V}^0) + L^2\mathbf{V}^1, \qquad (3.23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Nv &= h^{-4}N^0\mathbf{V}^{-2} + h^{-3}(N^0\mathbf{V}^{-1} + N^1\mathbf{V}^{-2}) \\ &\quad + h^{-2}(N^0\mathbf{V}^0 + N^1\mathbf{V}^{-1}) + h^{-1}(N^0\mathbf{V}^1 + N^1\mathbf{V}^0) + N^1\mathbf{V}^1. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

Согласно построениям из п. 2.1 аннулируются первые тройки слагаемых из правых частей (3.23) и (3.24). Кроме того, выражение $\mathbf{V}^1$ было найдено так, чтобы соблюсти равенства

$$L^0\mathbf{V}^1 + L^1\mathbf{V}^0 + L^2\mathbf{V}^{-1} = -\mathbf{f}^1, \quad N^0\mathbf{V}^1 + N^1\mathbf{V}^0 = 0, \qquad (3.25)$$

а $\mathbf{f}^1$ — вектор-функция (3.19). Наконец, вспоминая комментарий к формуле (2.16), получаем

$$-\int\limits_{\omega} e_i^\top(L^1\mathbf{V}^1 + L^2\mathbf{V}^0)\,d\eta - \int\limits_{\partial\omega} e_i^\top N^1\mathbf{V}^1\,ds_\eta = \mathbf{L}_i(\partial_z)\mathbf{v}, \quad i = 1,2. \qquad (3.26)$$

В результате благодаря определениям (3.9)–(3.11) верна формула

$$h^{-2}\big(u^h_{(m)}, \mathbf{f}^1\big)_{Q(h)} + h^{-1}\sum_{i=1}^{2}\big(u^h_{(m)i}, \mathbf{L}_i(\partial_z)\mathbf{v}\big)_{Q(h)} = \big(w^h_{(m)}, \mathbf{L}(\partial_z)\mathbf{v}\big)_{\Upsilon}.$$

Теперь обрабатываем остатки и обнаруживаем, что в силу соотношений (3.25), (3.20), (3.26) и (3.8), (3.4), а также следового неравенства (3.13) выполнена оценка

$$\begin{aligned}
&\bigl|\bigl(u^h_{(m)}, Lv\bigr)_{\Xi(h)} + \bigl(u^h_{(m)}, Nv\bigr)_{\partial\Xi(h)} - \bigl(w^h_{(m)}, \mathbf{L}(\partial_z)\mathbf{v}\bigr)_{\Upsilon}\bigr| \\
&\qquad\le c_{\mathbf{v}}\Biggl(\sum_{i=1}^{2}\bigl(h^{-1}\bigl\|u^h_{(m)i} - \bar{u}^h_{(m)i}; L_2(Q(h))\bigr\| \\
&\qquad + h^{-1}\bigl\|u^h_{(m)i}; L_2(Q(h))\bigr\| + h^{-1/2}\bigl\|u^h_{(m)i} - \bar{u}^h_{(m)i}; L_2(\partial Q(h)\cap\partial\Xi(h))\bigr\|\bigr) \\
&\qquad + h^{-2}\bigl\|u^h_{(m)3}; L_2(Q(h))\bigr\| + h^{-3/2}\bigl\|u^h_{(m)3}; L_2(\partial Q(h)\cap\partial\Xi(h))\bigr\|\Biggr)|\omega_h|^{1/2} \\
&\qquad\qquad \le c_{\mathbf{v}}\bigl|\!\bigl|\!\bigl| u^h_{(k)}; Q(h)\bigr|\!\bigl|\!\bigr|_h \le c_{\mathbf{v}} h.
\end{aligned}$$

Подводя итог проделанным вычислениям, видим, что предел равенства (3.22) вдоль некоторой бесконечно малой положительной последовательности $\{h_p\}$ принимает вид интегрального тождества

$$\lambda^0_m|\omega|\bigl(w^0_{(m)3}, \mathbf{v}_3\bigr)_{\Upsilon} = \bigl(w^0_{(m)}, \mathbf{Lv}\bigr)_{\Upsilon}, \tag{3.27}$$

в котором $\mathbf{v}$ — произвольная функция из $C^\infty_c(\Upsilon)^4$. Поскольку $w^0_{(m)} \in V^0_{-2}(\Upsilon)^2 \times V^0_{-1}(\Upsilon)^2$ (см. высказывание (3.16)), по замыканию тождество (3.27) переносится на пробные функции

$$\mathbf{v} \in V^4_2(\Upsilon)^2 \times V^3_2(\Upsilon) \subset V^2_0(\Upsilon)^2 \times V^1_0(\Upsilon) = \mathring{H}^2(\Upsilon)^2 \times \mathring{H}^1(\Upsilon). \tag{3.28}$$

По той же причине результаты [17; 18, § 4.2] о поднятии гладкости решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками (концы интервала Υ можно считать таковыми) показывают, что для $w^0_{(m)}$ выполнены включения (3.28). Итак, λ^0_m — собственное число задачи (2.19), а $w^0_{(m)}$ — соответствующая собственная вектор-функция, нормированная условием (3.18).

3.4. Теорема о сходимости. Сформулируем утверждение, доказательство которого будет завершено в п. 4.2 (непроверенными остались оценка (3.7) и равенство $\lambda^0_m = \lambda_m$).

Теорема 3.2. *Последовательности* (1.9) *и* (1.12) *собственных чисел задач* (1.4)–(1.6) *и* (2.14), (2.17) *находятся в отношении* (1.14).

§ 4. Обоснование асимптотики

4.1. Абстрактное уравнение. Поступая аналогично замечанию 2.1, назначим скалярным произведением $\langle u^h, v^h\rangle_h$ в пространстве $\mathscr{H}^h$ билинейную форму (1.8) и введем компактный, положительный и симметрический, а значит, самосопряженный оператор T^h:

$$\langle T^h u^h, v^h\rangle_h = (u^h, v^h)_{\Xi(h)}, \quad u^h, v^h \in \mathscr{H}^h. \tag{4.1}$$

При этом интегральное тождество (1.7) становится эквивалентным абстрактному уравнению

$$T^h u^h = \tau^h u^h \quad \text{в } \mathscr{H}^h \tag{4.2}$$

с новым спектральным параметром $\tau^h = (\Lambda^h)^{-1}$.

Основным инструментом в данном параграфе служит следующее классическое утверждение, известное как лемма «о почти собственных» числах и векторах; его доказательство можно найти в [19, 10].

Лемма 4.1. *Пусть $V^h \in \mathscr{H}^h$ и $t^h \in (0,+\infty)$ таковы, что*

$$\|V^h;\mathscr{H}^h\| = 1, \quad \|T^h V^h - t^h V^h;\mathscr{H}^h\| = \delta^h \in (0,t^h). \tag{4.3}$$

Тогда на сегменте $[t^h - \delta^h, t^h + \delta^h]$ найдется хотя бы одно собственное число оператора T^h. Более того, при любом $\delta_* \in (\delta, t^h)$ справедливо соотношение

$$\Big\|V^h - \sum a_k^h \mathscr{U}_{(k)}^h;\mathscr{H}^h\Big\| \le 2\frac{\delta^h}{\delta_*^h}, \tag{4.4}$$

где суммирование распространено на те собственные числа τ_k^h оператора T^h, которые попадают на сегмент $[t^h - \delta_*^h, t^h + \delta_*^h]$, $\mathscr{U}_{(k)}^h$ — соответствующие собственные векторы, подчиненные условию $\langle \mathscr{U}_{(j)}^h, \mathscr{U}_{(k)}^h\rangle_h = \delta_{j,k}$, а коэффициенты a_k^h удовлетворяют равенству $\sum |a_k^h|^2 = 1$.

4.2. Первая серия собственных чисел (низкочастотный диапазон спектра). Пусть λ_m — собственное число задачи (2.14), (2.17) с кратностью $\varkappa_m$, т. е. в последовательности (1.12)

$$\lambda_{m-1} < \lambda_m = \ldots = \lambda_{m+\varkappa_m-1} < \lambda_{m+\varkappa_m}. \tag{4.5}$$

Построим $\varkappa_m$ экземпляров приближенных решений уравнения (4.2), а именно положим $t_p^h = t_m^h = h^{-2}\lambda_m^{-1}$ и $V_{(p)}^h(x) = \|W_{(p)}^h;\mathscr{H}^h\|^{-1} W_{(p)}^h(x)$, где $p = m,\ldots,m+\varkappa_m - 1$ и

$$\begin{aligned} W_{(p)}^h(x) &= h^{-2}X_h(z)U_{(p)}^{-2}(z) + h^{-1}X_h(z)U_{(p)}^{-1}(\eta,z) \\ &\quad + X_h(z)U_{(p)}^0(\eta,z) + hX_h(z)U_{(p)}^1(\eta,z) \end{aligned} \tag{4.6}$$

(ср. выражения (2.1) и (3.21)). При этом $U_{(p)}^{-2}$, $U_{(p)}^{-1}$ и $U_{(p)}^0$ определены формулами (2.2) и (2.10) по собственной вектор-функции $w_{(p)}$ задачи (2.14), (2.17), удовлетворяющей условиям ортогональности и нормировки (2.18), а $U_{(p)}^1$ — решение задачи (2.8) с правыми частями (2.13). Срезка X_h приписана сомножителями при слагаемых в правой части (4.6) для того, чтобы можно было гладко продолжить $W_{(p)}^h$ нулем со стяжки $Q(h)$ на тело Ω. Найдем указанные в (4.3) величины δ_p^h. Согласно формуле (4.1) имеем

$$\begin{aligned} \delta_p^h &= \sup\big|\langle T^h V_{(p)}^h - t_m^h V_{(p)}^h, v^h\rangle_h\big| \\ &= \|W_{(p)}^h;\mathscr{H}^h\|^{-1} h^{-2}\lambda_m^{-1} \sup\big|a\big(W_{(p)}^h, v^h; Q(h)\big) - h^2\lambda_m\big(W_{(p)}^h, v^h\big)_{Q(h)}\big| \\ &= \|W_{(p)}^h;\mathscr{H}^h\|^{-1} h^{-2}\lambda_m^{-1} \sup\big|\big(LW_{(p)}^h - h^2\lambda_m W_{(p)}^h, v^h\big)_{Q(h)} \\ &\qquad + \big(NW_{(p)}^h, v^h\big)_{\partial Q(h)\cap\partial\Xi(h)}\big|. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь точная верхняя граница вычисляется по всем пробным функциям $v^h \in \mathscr{H}^h$, для которых $\|v^h;\mathscr{H}^h\| = 1$, причем $\|\!| v^h; Q(h)|\!\|_h \le c$ согласно теореме 3.1. Сначала оценим норму $\|W_{(p)}^h;\mathscr{H}^h\|$, точнее, займемся скалярным произведением $\langle W_{(p)}^h, W_{(q)}^h\rangle_h$. В силу граничных условий (2.17) верны соотношения

$$\big|\partial_z^j w_{(p)i}(z)\big| \le c_{jp}\varrho_0(z)^{(2-j)_+}, \quad \big|\partial_z^j w_{(p)2+i}(z)\big| \le c_{jp}\varrho_0(z)^{(1-j)_+}, \tag{4.8}$$

где $j = 0,1,2,\ldots$, $i = 1,2$, и $(n)_+ = \frac{1}{2}(n + |n|)$ — положительная часть числа $n \in \mathbb{R}$. При учете формул (1.3), (2.5) и (2.10) находим, что

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(\nabla_x)W_{(p)}^h(x) &= \big(\mathscr{D}(0,0,\partial_z)X_h(z)\big)\big(h^{-2}U_{(p)}^{-2}(z) + h^{-1}U_{(p)}^{-1}(\eta,z) + \ldots\big) \\ &+ X_h(z)\big(h^{-2}\big(\mathscr{D}_z U_{(p)}^{-2}(z) + \mathscr{D}_\eta U_{(p)}^{-1}(\eta,z)\big) + h^{-1}\big(\mathscr{D}_z U_{(p)}^{-1}(\eta,z) + \mathscr{D}_\eta U_{(p)}^0(\eta,z)\big) + \ldots\big). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Многоточием обозначены младшие члены, которые имеют такое же строение, как главные, и обрабатываются аналогично. Норма в $L_2(Q(h))^3$ первой группы слагаемых в правой части (4.9) не превосходит $ch^{1/2}$. Дело в том, что носитель матрицы-функции $\mathscr{D}(0,0,\partial_z)X_h$, имеющей порядок h^{-1}, расположен на малых сегментах $[-1,-1+2hl]$ и $[1-2hl,1]$, где благодаря неравенствам (4.8) и определению асимптотических членов выполнены оценки $\left|U^j_{(p)}(\eta,z)\right| \le c\varrho_0(z)^{(-j)_+} \le ch^{(-j)_+}$. Во второй группе слагаемых имеем

$$\mathscr{D}_z U^{-2}_{(p)} + \mathscr{D}_\eta U^{-1}_{(p)} = 0, \quad \mathscr{D}_z U^{-1}_{(p)} + \mathscr{D}_\eta U^{0}_{(p)} = (\mathscr{Y} + \mathscr{D}_\eta \mathscr{X})\mathbf{D}(\partial_z)w_{(p)}$$

в силу формул (2.2) и (2.10), (2.9). Ясно, что $L_2(Q(h))$-нормы остальных членов не превосходят ch. Кроме того, устранение срезки X_h при второй группе привносит ту же погрешность $O(h^{1/2})$, что и вся первая группа. В итоге приходим к оценке

$$\left|\big\langle W^h_{(p)}, W^h_{(q)}\big\rangle_h - \frac{1}{h^2}\int\limits_{\Upsilon}\big(A(\mathscr{Y}+\mathscr{D}_\eta\mathscr{X})\mathbf{D}(\partial_z)w_{(p)}, (\mathscr{Y}+\mathscr{D}_\eta\mathscr{X})\mathbf{D}(\partial_z)w_{(q)}\big)_{\omega_h} dz\right| \le ch^{1/2}.$$

Вспоминая определение (2.15) матрицы $\mathbf{A}$ и соотношения (2.19), (2.18) для собственных функций $w_{(p)}$ и $w_{(q)}$, находим окончательно, что

$$\left|\big(A\mathscr{D}(\nabla_x)W^h_{(p)}, \mathscr{D}(\nabla_x)W^h_{(q)}\big)_{\Xi(h)} - \lambda_m\delta_{p,q}\right| \le \mathbf{c}h^{1/2}, \quad C \ge \left\|W^h_{(p)};\mathscr{H}^h\right\| \ge c > 0. \tag{4.10}$$

Теперь рассмотрим последнюю пару скалярных произведений в (4.7). Благодаря построениям, проведенным в п. 2.1 (ср. преобразования (3.23) и (3.24)), справедливы равенства

$$\begin{gathered}
LW^h_{(p)} - h^2\lambda_m W^h_{(p)} = [L,X_h]\big(h^{-2}U^{-2}_{(p)} + h^{-1}U^{-1}_{(p)} + U^0_{(p)} + hU^1_{(p)}\big) \\
+ X_h\big(\underbrace{L^1U^1_{(p)} + L^2U^0_{(p)} - \lambda_m U^{-2}_{(p)}}\,+ h\big(L^2U^1_{(p)} - \lambda_m\big(U^{-1}_{(p)} + hU^0_{(p)} + h^2U^1_{(p)}\big)\big)\big), \\
NW^h_{(p)} = [N,X_h]\big(h^{-2}U^{-2}_{(p)} + h^{-1}U^{-1}_{(p)} + U^0_{(p)} + hU^1_{(p)}\big) + hX_h\,\underbrace{N^1U^1_{(p)}},
\end{gathered} \tag{4.11}$$

где $[L,X_h]$ и $[N,X_h]$ — коммутаторы дифференциальных операторов со срезающей функцией. Выражения, выделенные снизу фигурными скобками в (4.11), обозначим через f^1 и g^1 соответственно. Согласно асимптотической процедуре из п. 2.1 имеем

$$\int\limits_\omega f^1_i(\eta,z)\,d\eta + \int\limits_{\partial\omega} g^1_i(\eta,z)\,ds_\eta = 0, \quad i=1,2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
|(X_hf^1,v^h)_{Q(h)} + h(X_hg^1,v^h)_{\partial Q(h)\cap\partial\Xi(h)}| = \big|\big(X_hf^1, v^h - e_1\overline{v}^h_1 - e_2\overline{v}^h_2\big)_{Q(h)} \\
+ h\big(X_hg^1, v^h - e_1\overline{v}^h_1 - e_2\overline{v}^h_2\big)_{\partial Q(h)\cap\partial\Xi(h)}\big| \le ch\, \big\| v^h; Q(h) \big\|_h.
\end{aligned}$$

Понятно, что

$$h\big|\big(X_hL^2U^1_{(p)} - \lambda_m\big(U^{-1}_{(p)} + hU^0_{(p)} + h^2U^1_{(p)}\big), v^h\big)_{Q(h)}\big| \le ch\big\| v^h; Q(h)\big\|_h.$$

Слагаемые, содержащие коммутаторы, обрабатываются так же, как и первая группа членов в (4.9), т. е. при учете неравенств (4.8) и расположения носителей производных срезки. Единственное нововведение — формула

$$\|v^h; L_2(\{x\in Q(h): |z| > 1-2hl\})\| \le ch\big\| v^h; Q(h)\big\|_h,$$

где коэффициент h приобретен благодаря весовым множителям $h^2\varrho_h^{-4}$ при $|\mathbf{u}_i|^2$, $i=1,2$, и ϱ_h^{-2} при $|\mathbf{u}_3|^2$ в норме (3.4). Обозначая многоточием сумму асимптотических членов при коммутаторах и принимая во внимание следовое неравенство (3.13), видим, что

$$|([L,X_h](\dots),v^h)_{Q(h)}+([N,X_h](\dots),v^h)_{\partial Q(h)\cap\partial\Xi(h)}|\le ch^{1/2}\|v^h;Q(h)\|_h.$$

Итак, вычисления показывают, что величина (4.7) не превосходит $c_m h^{-2}h^{1/2} = c_m h^{-3/2}$, а значит, по лемме 4.1 существует собственное число τ_j^h оператора T^h, удовлетворяющее оценке $\left|\tau_j^h-h^{-2}\lambda_m^{-1}\right|\le c_m h^{-3/2}$. Отсюда следуют, во-первых, неравенство $\tau_j^h\le c_m h^{-2}$ и, во-вторых, соотношение (1.15) для элемента $\Lambda_j^h=\left(\tau_j^h\right)^{-1}$ последовательности (1.9).

Убедимся в том, что при малом h в $(C_m h^{5/2})$-окрестности точки $h^2\lambda_m$ имеются не менее $\varkappa_m$ собственных чисел $\Lambda_j^h,\dots,\Lambda_{j+\varkappa_m-1}^h$ задачи (1.4)–(1.6). Тогда будет установлено соотношение (3.7), так как, перебирая первые $m+\varkappa_m-1$ членов последовательности (1.12), приходим к формуле $j\ge m$, т. е. $\Lambda_m^h\le\Lambda_j^h\le h^2\lambda_m+c_m h^{5/2}$.

Воспользуемся второй частью леммы 4.1, взяв в ней $\delta_*^h=C_m h^{5/2}$. Найдутся такие столбцы коэффициентов $a_{(p)}^h=\left(a_{(p)j}^h,\dots,a_{(p)j+\mathfrak{x}_m^h-1}^h\right)^\top$, при которых вектор-функции $V_{(m)}^h,\dots,V_{(m+\varkappa_j-1)}^h$ подчинены неравенству (4.4); здесь $p=m,\dots,m+\varkappa_m-1$, а $\mathfrak{x}_j^h$ — полная кратность спектра оператора T^h на сегменте $[h^2\lambda_m-C_m h^{5/2},h^2\lambda_m+C_m h^{5/2}]$. Поскольку собственные векторы $\mathscr{U}_{(k)}^h$ оператора ортонормированы, выводим из соотношения (4.4) формулу

$$\begin{aligned}(a_{(q)}^h)^\top a_{(p)j}^h-\delta_{p,q}&=\left\langle\sum a_{(p)j}^h\mathscr{U}_{(p)j}^h,\sum a_{(q)l}^h\mathscr{U}_{(q)l}^h\right\rangle_h-\delta_{p,q}\\&=\left\langle V_{(p)}^h-\sum a_{(p)j}^h\mathscr{U}_{(p)j}^h,V_{(q)}^h\right\rangle_h-\left\langle\sum a_{(p)j}^h\mathscr{U}_{(p)j}^h,V_{(q)}^h-\sum a_{(q)l}^h\mathscr{U}_{(q)l}^h\right\rangle_h\\&\quad+\left\|W_{(p)}^h;\mathscr{H}^h\right\|^{-1}\left\|W_{(q)}^h;\mathscr{H}^h\right\|^{-1}\left\langle W_{(p)}^h,W_{(q)}^h\right\rangle_h-\delta_{p,q}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Модули первых двух скалярных произведений в правой части (4.12) не превосходят $2\delta^h(\delta_*^h)^{-1}=2c_mC_m^{-1}$, а третье в силу (4.10) отличается от $\delta_{p,q}$ на величину $O(h^{1/2})$. Значит, при большом C_m и малом h столбцы $a_{(m)}^h,\dots,a_{(m+\varkappa_m-1)}^h\in\mathbb{R}^{\mathfrak{x}_m^h}$ «почти ортонормированы», что возможно только в случае $\varkappa_m\le\mathfrak{x}_m^h$. Если случилось, что $\varkappa_m<\mathfrak{x}_m^h$, то собственное число $\Lambda_{m+\varkappa_m}^h$ оказывается меньше $h^2\lambda_m+C_m h^{5/2}$, а значит, согласно результатам из § 3 предел $\lambda_{m+\varkappa_m}^0=\lim h^{-2}\Lambda_{m+\varkappa_m}^h\le\lambda_m$ является собственным числом задачи (2.14), (2.17), а вычисленный по формулам (3.9)–(3.11) и (3.15) предел $w_{m+\varkappa_m}^0$ — собственной вектор-функцией, которая удовлетворяет условиям нормировки и ортогональности (2.18) (благодаря сильной сходимости в $L_2(\Upsilon)^4$ и несколько измененным выкладкам (3.17) соотношения (2.18) вытекают из условий (1.10)). Сделанный вывод противоречит определению последовательности (1.12) и формуле (4.5). В итоге получаем, что $\varkappa_m=\mathfrak{x}_m^h$ и, более того, $m=j$ при малом h.

Теорема 4.1. *Для каждого* $m\in\mathbb{N}$ *существуют положительные величины* h_m *и* c_m,C_m, *при которых в случае* $h\in(0,h_m)$ *собственные числа* Λ_m^h *и* λ_m *задач* (1.4)–(1.6) *и* (2.14), (2.17) *связаны неравенством* (1.15). *Кроме того, если число* λ_m *имеет кратность* $\varkappa_m$ (*см.* *соотношение* (4.5)), *то найдутся такие ортонормированные столбцы* $b_{(q)}^h=\left(b_{(q)m}^h,\dots,b_{(q)m+\varkappa_m-1}^h\right)^\top\in\mathbb{R}^{\varkappa_m}$, $q=m,\dots,m+\varkappa_m-1$, *что собственные вектор-функции* $u^h_{(m)},\dots,u^h_{(m+\varkappa_m-1)}$, *подчиненные требованиям* (1.10), *удовлетворяют оценке*

$$\left\| u^h_{(q)} - b^h_{(q)m}W^h_{(m)} - \ldots - b^h_{(q)m+\varkappa_m-1}W^h_{(m+\varkappa_m-1)}; \Xi(h) \right\|_h \le C_m h^{1/2}, \qquad (4.13)$$

где $q = m,\dots,m+\varkappa_m-1$, *и* $W^h_{(p)}$ *— асимптотические конструкции* (4.6).

Доказательство. Осталось вывести формулу (4.13) для собственных вектор-функций. Для этого опять-таки применяется вторая часть леммы 4.1, в которой берем $\delta^h_* = \frac{1}{3}h^{-2}\min\{\lambda^{-1}_{m-1}-\lambda^{-1}_m, \lambda^{-1}_m - \lambda^{-1}_{m+\varkappa_m}\}$. По проверенному ранее соответствующий сегмент $[h^{-2}\lambda^{-1}_m - \delta^h_*, h^{-2}\lambda^{-1}_m + \delta^h_*]$ при малом h содержит только собственные числа $\tau^h_m,\dots,\tau^h_{m+\varkappa_m-1}$, и лемма 4.1 предоставляет столбцы $a^h_{(m)},\dots,a^h_{(m+\varkappa_m-1)} \in \mathbb{R}^{\varkappa_m}$. Остается переделать «почти ортогональную» $(\varkappa_m\times\varkappa_m)$-матрицу $(a^h_{(m)},\dots,a^h_{(m+\varkappa_m-1)})$ в ортогональную матрицу $(b^h_{(m)},\dots,b^h_{(m+\varkappa_m-1)})$, для чего можно воспользоваться простой алгебраической леммой 7.1.7 в [1] (см. также [20, § 2]). ⊠

4.3. Вторая серия собственных чисел (среднечастотный диапазон спектра). Объединим последовательности (2.26) и (2.29) в одну последовательность (1.13) и выберем в ней собственное число μ_j с кратностью κ_j, т. е.

$$\mu_{j-1} < \mu_j = \ldots = \mu_{j+\kappa_j-1} < \mu_{j+\kappa_j}. \qquad (4.14)$$

Для того чтобы применить лемму 4.1, построим приближенные решения абстрактного уравнения (4.2). В соответствии с (2.21) положим $t^h = \mu_j^{-1}$. Кроме того, в случае $\mu^\Upsilon_p = \mu_j$ аналогично (2.22) и (4.6) определим вектор-функцию $V^h_{(p)} = \|W^h_{(p)};\mathscr{H}^h\|^{-1}W^h_{(p)}$, где

$$W^h_{(p)}(x) = h^{-1}X_h(z)U^{-1}_{(p)}(\eta,z) + X_h(z)U^0_{(p)}(\eta,z), \qquad (4.15)$$

а $U^{-1}_{(p)}$ и $U^0_{(p)}$ образованы по формулам (2.23) и (2.10) по собственной вектор-функции $w''_{(p)}$ предельной задачи (2.24), (2.25). Если $\mu^\Omega_q = \mu_j$, то в формуле для $V^h_{(q)}$ возьмем

$$W^h_{(q)}(x) = \mathscr{X}_h(x)v_{(q)}(x), \qquad (4.16)$$

где $v_{(q)}$ — собственная вектор-функция предельной задачи (2.27) на теле Ω, а $\mathscr{X}_h$ — гладкая срезающая функция, равная единице на множестве $\{x\in\Omega : r \ge 2\ell h\}$ и нулю в (ℓh)-окрестностях точек $P^\pm$, а также на стяжке $Q(h)$. Как и ранее, очередной шаг в процедуре оправдания асимптотики — оценка величин δ^h_p и δ^h_q, возникающих в формуле (4.3). Неравенство $\delta^h_p \le c_j h^{1/2}$ выводится при помощи в значительной степени упрощенных выкладок из п. 4.2, которые здесь не воспроизводятся (подробности см. в [1, § 7.3]). Обработаем выражение (4.16). Заметив, что носители вектор-функций (4.16) и (4.15) не пересекаются, проверим аналоги соотношений (4.10) и (4.7) для выражений (4.16), порожденных двумя собственными вектор-функциями $v_{(q)}$ и $v_{(k)}$ задачи (3.22), подчиненных условиям ортогональности и нормировки (2.30). Поскольку носители производных срезки $\mathscr{X}_h$ расположены в $(2h\ell)$-окрестностях $\mathscr{V}^\pm_h$ точек $P^\pm$, находим, что

$$\begin{aligned}\left|a\big(W^h_{(q)},W^h_{(k)};\Xi(h)\big) - a(v_{(q)},v_{(k)};\Omega)\right|& \\ \le c_\Omega h^{-1}\sum_\pm \big(\|v_{(q)};H^1(\Omega\cap\mathscr{V}^\pm_h)\| &+ \|v_{(k)};H^1(\Omega\cap\mathscr{V}^\pm_h)\|\big)^2. \qquad (4.17)\end{aligned}$$

Заметив, что $v_{(q)}$ и $v_{(k)}$ — гладкие вектор-функции в области Ω, заключаем, что последние нормы имеют порядок $O(h^{3/2})$, т. е. схожие с (4.10) оценки действительно выполнены. При оценивании величины δ_q следует учесть неравенства (3.6) и (3.1) для пробной функции: весовой множитель r_h^{-1}, присутствующий в норме (3.5), позволяет погасить большой множитель h^{-1}, возникающий при дифференцировании срезки $\mathscr{X}_h$ (он же появился в правой части (4.17)). Остальные вычисления следуют стандартной схеме — опустим их и сформулируем результат.

Теорема 4.2. *Пусть μ_j — удовлетворяющий соотношению* (4.14) *член объединения* (1.13) *последовательностей* (2.26) *и* (2.29) *собственных чисел предельных задач* (2.24), (2.25) *и* (2.27). *Тогда в последовательности* (1.9) *собственных чисел исходной задачи* (1.4)–(1.5) *найдутся члены* $\Lambda^h_{N^h(j)},\dots,\Lambda^h_{N^h(j)+\kappa_j-1}$, *подчиненные неравенству* (1.16).

4.4. Варианты и обобщения. Не вызывает осложнений переход к неоднородному упругому телу со слабо искривленной стяжкой $Q_h=\{x:\eta:=h^{-1}y\in\varkappa_z\omega,\ |z|<l:=1\}$, где $\{\varkappa_z\}_{z\in\Upsilon'}$ — семейство диффеоморфизмов в $\mathbb{R}^2$, гладко зависящих от параметра $z\in\Upsilon'=[-l',l']$. Необходимые изменения в выкладках можно найти, например, в [1, гл. 5, 7]. Аналогичный результат верен и в случае тонкого стержня с периодически изменяющимся сечением (ср. [13; 1, гл. 6]). Доступны и другие геометрические обобщения, в частности тело с несколькими стяжками или выступающими стержнями. Гладкость границы $\partial\omega$ не нужна (достаточна липшицевость), а гладкость границы $\partial\Omega$ имеет принципиальное значение лишь около точек $P^{\pm}$.

Условие защемления (1.6) можно убрать и при помощи незначительной модификации схемы изучить свободные колебания упругого сочленения $\Xi(h)$, у которого появляется невозмущаемое шестикратное собственное число $\Lambda=0$ с собственным подпространством, состоящим из жестких смещений $a+b\times x$ (a и b — постоянные столбцы в $\mathbb{R}^3$, а крестом обозначено векторное произведение). При этом предельные задачи (2.11), (2.17) и (2.24), (2.25) для стержня остаются без изменений, а предельная задача (2.27) для тела Ω теряет краевое условие Дирихле на Γ, приобретая тем самым шестикратное собственное число $\lambda=0$. Новые эффекты возникают, если к телу прикреплены несколько стержней, внешние торцы которых жестко защемлены. При этом у сочленения появляется шесть собственных чисел, асимптотические представления которых не описываются теоремами 4.1 и 4.2. Более того, порядки возмущений нулевого собственного числа существенно зависят от расположения стержней (см. [21, 15] и [22–24]).

Можно построить полные асимптотические ряды для собственных чисел из первой серии (теорема 4.1) и соответствующих собственных вектор-функций. Вблизи точек $P^{\pm}$ прикрепления стяжки к телу возникает явление трехмерного степенного пограничного слоя, описываемое посредством задачи теории упругости на объединении полупространства и полуцилиндра (см. [22–25] и др.). Вопрос о построении младших асимптотических членов для других серий собственных чисел (теорема 4.2) остается полностью открытым. Весьма вероятно, что асимптотическое моделирование задачи (1.4)–(1.6) при помощи самосопряженных расширений дифференциальных операторов (см., например, [26, 25] и др.) позволяет воспроизводить асимптотику спектра на более широком диапазоне, чем теорема 4.1.

Постоянные в оценках (1.15) и (1.16) точности приближения неизвестным образом зависят от порядкового номера m собственного числа. Метод прямого и обратного сведений (см. [1, гл. 7, 20] и др.) дает возможность выяснить зависимость упомянутых постоянных от m и других атрибутов предельных спектров (1.12) и (2.26), (2.29). Этот метод требует длинных и сложных вычислений и поэтому в данной статье не применяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научн. кн., 2002.

2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.

3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

4. *Nečas J.* Les méthodes in théorie des équations elliptiques. Paris; Prague: Masson-Acad., 1967.

5. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.

6. *Beale J. T.* Scattering frequencies of resonators // Commun. Pure Appl. Math. 1973. V. 26, N 4. P. 549–563.

7. *Арсеньев А. А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 3. С. 718–724.

8. *Гадыльшин Р. Р.* О собственных значениях «гантели с тонкой ручкой» // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 2. С. 45–110.

9. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 3. С. 97–131.

10. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

11. *Назаров С. А.* Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1992. Т. 8, № 2. С. 19–24.

12. *Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G.* Korn's inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants // Asymptotic Anal. 1994. V. 8. P. 1–14.

13. *Назаров С. А.* Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы математического анализа. СПб: изд-во СПбГУ, 1997. Вып. 17. С. 101–152.

14. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Неравенство Корна для произвольной системы тонких искривленных стержней // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1319–1331.

15. *Назаров С. А.* Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 1. С. 37–110.

16. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.

17. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd 76. S. 29–60.

18. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

19. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.

20. *Назаров С. А.* Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Научн. кн., 2003. Вып. 25. С. 99–188.

21. *Nazarov S. A.* Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 3. P. 219–243.

22. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptotic Anal. 1995. V. 11. P. 343–415.

23. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Fields in non-degenerate 1D-3D elastic multistructures // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2001. V. 54. P. 177–212.

24. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon Press, 1999.

25. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 2004. Вып. 24. С. 95–214.

26. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1 // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1995. Вып. 18. С. 3–78.

Статья поступила 5 февраля 2011 г.

Назаров Сергей Александрович
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В. О., 61, Санкт-Петербург 199178
srgnazarov@yahoo.co.uk