Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 512.8

О ЧИСЛЕ СООТНОШЕНИЙ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим

Аннотация. Рассматриваются конечно порожденные группы, построенные из циклических при помощи свободных и прямых произведений, и изучается вопрос о наименьшем числе соотношений в заданной системе порождающих. Этот вопрос связан с известной проблемой скачка соотношений. Доказано, что если m и n не являются взаимно простыми, то группа $H_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z})$ не может быть задана тремя соотношениями в стандартной системе порождающих. Аналогичный результат получен для групп $G_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m) * (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$. С другой стороны, установлено, что при взаимно простых m и n образ группы $H_{m,n}$ в любой нильпотентной группе задается тремя соотношениями.

Ключевые слова: конечно определенная группа, минимальное число соотношений, модуль соотношений, скачок соотношений.

Введение

Хорошо известно, что группа может быть задана разными системами порождающих и определяющих соотношений. Возникает вопрос о сравнении этих представлений. С одной стороны, мы можем найти представление с наименьшим числом порождающих, но при этом соотношения могут быть весьма сложными. С другой стороны, добиваясь простоты соотношений, мы увеличиваем число порождающих. Очевидно, что наименьшее число порождающих $d(G)$ группы G не меньше ранга группы $H_1(G) = G/[G,G]$, т. е.

$$\operatorname{rk} H_1(G) \leq d(G).$$

Легко привести примеры групп, для которых это неравенство является строгим.

Если зафиксировать некоторую систему порождающих и изучать вопрос о минимальном числе соотношений в этой системе, то можно считать, что G имеет представление F/R, где F — свободная группа, а R — ее нормальная подгруппа. Тогда вопрос о наименьшем числе соотношений сводится к вопросу о наименьшем числе элементов, порождающих R как нормальную подгруппу. Действие F сопряжениями на R индуцирует действие G на абелевой группе $R_{\mathrm{ab}} = R/[R,R]$. Относительно этого действия R_{ab} является $\mathbb{Z}[G]$-модулем, который называется *модулем соотношений группы* G. Очевидно, что ранг $\mathbb{Z}[G]$-модуля R_{ab} не превосходит числа элементов, необходимых для порождения R как нормальной

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1.10726), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.5191) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00642).

подгруппы группы F. Следовательно, ранг этого модуля дает нижнюю оценку минимального числа соотношений, необходимых для представления G в данной системе порождающих. Конечное представление F/R, у которого ранг модуля R_{ab} меньше наименьшего числа элементов, требуемых для порождения R как нормальной подгруппы F, называется *представлением со скачком соотношений.* Проблема скачка соотношений состоит в определении того, существует ли представление со скачком соотношений. Вопрос о существовании конечно определенных групп со скачком соотношений остается открытым. С другой стороны, Бествина и Бради [1] построили конечно порожденную группу, которая не является конечно определенной, но у которой модуль соотношений конечно порожден. Поэтому можно говорить, что эта группа имеет *бесконечный скачок* соотношений.

Кандидатами на роль групп со скачком соотношений являются группы вида $H_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z})$, изучавшиеся в [2]. Эти группы имеют стандартное представление:

$$H_{m,n} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^m = z^n = [x, y] = [z, t] = 1\rangle,$$

т. е. задаются четырьмя порождающими и четырьмя соотношениями. Вместе с тем в [3] доказано, что при $(m, n) = 1$ модуль соотношений группы $H_{m,n}$ имеет ранг 3. Другими возможными кандидатами на роль групп со скачком соотношений являются группы из работы [4], где группа Q_m определялась как HNN-расширение группы $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$, при котором сопряжение проходной буквой переводит порождающий первого множителя в порождающий второго. Тогда очевидное представление группы $\Gamma_{m,n} = Q_m * Q_n$ имеет 4 порождающих и 4 соотношения, но если m и n взаимно просты, то модуль соотношений, соответствующий этому представлению, имеет ранг 3.

Проблема скачка соотношений тесно связана со знаменитой $D(2)$-гипотезой из гомотопической топологии. Напомним, что пространство X обладает свойством $D(n)$, если $H_i(\widetilde{X}) = 0$ при $i > n$, где $\widetilde{X}$ — универсальная накрывающая X и $H^{n+1}(X, \mathscr{M}) = 0$ для любой локальной системы коэффициентов $\mathscr{M}$ на X. Уолл [5] установил, что если $n \neq 2$, то (конечный) CW-комплекс имеет гомотопический тип (конечного) n-комплекса тогда и только тогда, когда он обладает свойством $D(n)$. Утверждение о том, что конечный 3-комплекс имеет гомотопический тип конечного 2-комплекса тогда и только тогда, когда он обладает свойством $D(2)$, называется $D(2)$-*гипотезой.* В [4] по каждой группе $\Gamma_{m,n}$ строится некоторый 3-комплекс, который является контрпримером к $D(2)$-гипотезе при условии, что $(m, n) = 1$ и группа $\Gamma_{m,n}$ обладает скачком соотношений.

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий для некоторых представлений доказать, что число соотношений при заданной системе порождающих нельзя уменьшить. Используя этот метод, докажем, что если m и n не взаимно просты, то группа $H_{m,n}$ не может быть задана тремя соотношениями в стандартных порождающих. Аналогичный результат получен для групп

$$G_{m,n} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^m = y^m = z^n = t^n = [x, y] = [z, t] = 1\rangle.$$

Последний результат в некотором смысле дополняет результат из [6], где изучались группы вида

$$G_{m_1,n_1,m_2,n_2} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^{m_1} = y^{n_1} = z^{m_2} = t^{n_2} = [x, y] = [z, t] = 1\rangle$$

и найдены условия на m_1, n_1, m_2, n_2, при которых группа G_{m_1,n_1,m_2,n_2} задается пятью соотношениями в тех же порождающих. К сожалению, предложенный метод не работает при взаимно простых m и n. На сложность этого случая указывает такой результат (см. предложение 1): при взаимно простых m и n образ группы $H_{m,n}$ в любой нильпотентной группе задается тремя соотношениями. Аналогичный результат устанавливается и для групп $\Gamma_{m,n}$.

Авторы благодарят Романа Михайлова за информацию о проблеме скачка соотношений и за полезные обсуждения.

§ 1. Некоторые примеры

Символом $d(G)$ будем обозначать наименьшее число порождающих группы G. Если группа H действует на G, то символом $d_H(G)$ будем обозначать наименьшее число H-орбит, порождающих G. Если G — конечно определенная группа, то *дефицитом* конечного представления F/R группы G называется $d(F) - d_F(R)$, где F действует на нормальной подгруппе R сопряжением. *Дефицитом* $\operatorname{def}(G)$ группы G называется супремум по всем дефицитам конечных представлений группы G. Известно, что дефицит любого конечного представления группы G ограничен сверху значением $\operatorname{rk}(H_1(G)) - d(H_2(G))$.

Рассмотрим некоторые примеры представлений, в которых удается уменьшить число соотношений. Наиболее простым является представление

$$(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z} = \langle a, b, c \mid\mid a^2 = b^3 = [c, a] = [c, b] = 1\rangle.$$

Нетрудно проверить, что эта группа может быть задана тремя соотношениями:

$$\langle a, b, c \mid\mid a^2 b^3 = a^2[c, a] = b^3[c, b] = 1\rangle.$$

Заметим, что в этом представлении соотношение $a^2b^3 = 1$ можно заменить соотношением $[a, c][b, c] = 1$.

Рассмотрим представления свободных произведений. Если имеем два конечных представления

$$\langle \mathscr{X}_1 \mid\mid \mathscr{R}_1\rangle, \quad \langle \mathscr{X}_2 \mid\mid \mathscr{R}_2\rangle \tag{1}$$

групп G_1 и G_2 соответственно, то свободное произведение $G_1 * G_2$ задается представлением

$$\langle \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2 \mid\mid \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2\rangle. \tag{2}$$

При этом по теореме Грушко — Неймана справедливо равенство $d(G_1 * G_2) = d(G_1) + d(G_2)$. С другой стороны, Рапопорт [7] доказала, что существуют представления типа (1) такие, что нормальная подгруппа R_i, порожденная множеством $\mathscr{R}_i$ в $F_i = \langle \mathscr{X}_i\rangle$, не является нормальным замыканием менее чем $|\mathscr{R}_i|$ элементов, однако нормальная подгруппа R, порожденная в $F = \langle \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2\rangle$ множеством $\mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2$, является нормальным замыканием менее чем $|\mathscr{R}_1| + |\mathscr{R}_2|$ элементов. Следовательно, дефицит группы не обладает свойством аддитивности при переходе к свободному произведению. Явные примеры таких представлений можно найти в работе [6], в которой изучались группы вида

$$G_{m_1,n_1,m_2,n_2} = (\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{n_1}) * (\mathbb{Z}_{m_2} \times \mathbb{Z}_{n_2}), \quad m_i, n_i \in \mathbb{N},$$

и было доказано, что если числа m_i, n_i, $i = 1, 2$, таковы, что найдутся числа r_i, q_i, $i = 1, 2$, для которых выполняются условия

$$r_i > 1, \quad r_i^{m_i} - 1 = n_i q_i, \quad (q_1, q_2) = 1, \quad r_i \equiv 1 (\operatorname{mod} n_i), \quad (m_i, n_i) \neq 1, \tag{3}$$

то G_{m_1,n_1,m_2,n_2} имеет следующее представление:

$$\langle x, y, z, t \mid\mid x^{m_1} = z^{m_2} = 1,\ xyx^{-1} = y^{-r_1},\ ztz^{-1} = t^{-r_2},\ y^{n_1} = t^{n_2}\rangle,$$

где число соотношений на единицу меньше по сравнению со стандартным представлением

$$G_{m_1,n_1,m_2,n_2} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^{m_1} = y^{n_1} = z^{m_2} = t^{n_2} = [y, x] = [t, z] = 1\rangle,$$

полученным по формуле (2). Условиям этой теоремы удовлетворяют группы

$$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) * (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3), \quad (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6) * (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3),$$

а также бесконечная серия групп $(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_1}) * (\mathbb{Z}_{p_2} \times \mathbb{Z}_{p_2})$, где p_1 и p_2 — различные простые числа.

Возникает естественный

Вопрос. *Пусть $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, но m_1 и m_2 не обязательно простые числа. Верно ли, что если m_1 и m_2 взаимно просты, то условия теоремы выполнены?*

Напомним некоторые результаты из [4]. Рассмотрим группу $Q_n = \langle x, t \mid\mid \rho_n = x^n = 1\rangle$, где

$$\rho_n(x, t) = (txt^{-1})x(txt^{-1})^{-1}x^{-n-1}.$$

Если ввести новый порождающий $b = txt^{-1}$, то

$$Q_n = \langle x, b, t \mid\mid [b, x] = x^n = b^n = 1,\ b = txt^{-1}\rangle,$$

т. е. Q_n является HNN-расширением группы $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ с проходной буквой t.

Обозначим $q_n = (n + 1)^n - 1$ и $c_n = nq_n$. Если $(q_m, q_n) = 1$, то группа $\Gamma_{m,n} = Q_m * Q_n$ имеет представление

$$Q_m * Q_n = \big\langle x_m, t_m, x_n, t_n \mid\mid \rho_m(x_m, t_m) = \rho_n(x_n, t_n) = x_m^m = x_n^n = 1\big\rangle,$$

а модуль соотношений R_{ab} этого представления порождается как $\mathbb{Z}[\Gamma_{m,n}]$-модуль образами ρ_m, ρ_n и $x_m^m x_n^n$. Более того, при попарно взаимно простых $m_1, m_2, \dots, m_r$ модуль соотношений группы $Q_{m_1} * Q_{m_2} * \dots * Q_{m_r}$ имеет ранг $r + 1$.

§ 2. Представления с неуменьшаемым числом соотношений

В настоящем параграфе мы рассматриваем некоторые группы, полученные из циклических при помощи свободных и прямых произведений. Будет доказано, что при некоторых условиях число соотношений в данной системе порождающих не может быть уменьшено.

Вначале введем необходимые обозначения. Символом $\gamma_i G$, $i = 1, 2, \dots,$ будем обозначать члены нижнего центрального ряда группы G, где $\gamma_1 G = G$, а $\gamma_{i+1} G = [\gamma_i G, G]$ при $i = 1, 2, \dots$. Под коммутаторами понимаем следующие выражения:

$$[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh, \quad [g, h, f] = [[g, h], f], \quad g, h, f \in G.$$

На протяжении этого параграфа символом $F = \langle x, y, z, t\rangle$ будем обозначать свободную группу ранга 4.

Теорема. *Пусть m и n — натуральные числа, для которых $(m,n) \neq 1$. Тогда*

1) группа $H_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z})$ в стандартных порождающих не может быть задана четырьмя порождающими и тремя соотношениями;

2) группа $G_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m) * (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ в стандартных порождающих не может быть задана четырьмя порождающими и пятью соотношениями.

Доказательство. Положим $d = (m,n)$. По условию $d > 1$.

1. Предположим, что группа

$$G = H_{m,n} = F/R = \langle x,y,z,t \mid\mid x^m = z^n = [x,y] = [z,t] = 1\rangle,$$

где $R = \langle \mathscr{R}\rangle^F$, $\mathscr{R} = \{x^m, z^n, [x,y], [z,t]\}$, имеет представление с тремя соотношениями:

$$G = F/R = \langle x,y,z,t \mid\mid A = B = C = 1\rangle,$$

т. е. $R = \langle \mathscr{R}\rangle^F = \langle \mathscr{R}_1\rangle^F$, где $\mathscr{R}_1 = \{A,B,C\}$, A,B,C — слова от порождающих x,y,z,t и обратных к ним.

Не уменьшая общности, можно считать, что $A = x^m a$, $B = z^n b$ и элементы a,b,C лежат в коммутанте F'. Действительно, рассматривая фактор-группу

$$R/(R \cap F') \simeq \langle x^m\rangle \times \langle z^n\rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

видим, что образы элементов A,B,C — это слова от x^m, z^n. Здесь и далее обозначаем элементы группы и их образы в фактор-группе одними и теми же символами. Применяя преобразования Тице, можно привести их к виду $x^m, z^n, 1$, а это и означает, что A,B,C имеют требуемый вид.

Рассмотрим фактор-группу $F/\gamma_3 F$ и найдем образ в ней группы $\langle \mathscr{R}_1\rangle^F$. Чтобы найти порождающие $\langle \mathscr{R}_1\rangle^F$, будем сопрягать элементы из $\mathscr{R}_1$ порождающими группы G. Имеем

$$A^y \equiv y^{-1}x^m y a^y \equiv y^{-1} y x^m [x^m, y] a^y \equiv x^m a [x,y]^m = A[x,y]^m (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

Отсюда получаем, что $A^{-1}A^y \equiv [x,y]^m \in \langle \mathscr{R}_1\rangle^F (\operatorname{mod} \gamma_3 F)$. Сопрягая далее элементом z, получим

$$A^z \equiv z^{-1}x^m z a^z \equiv z^{-1} z x^m [x^m, z] a^z \equiv x^m a [x,z]^m = A[x,z]^m (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

Следовательно, $A^{-1}A^z \equiv [x,z]^m \in \langle \mathscr{R}_1\rangle^F (\operatorname{mod} \gamma_3 F)$. Сопрягая, наконец, элементом t, получим

$$A^t \equiv t^{-1}x^m t a^t \equiv t^{-1} t x^m [x^m, t] a^t \equiv x^m a [x,t]^m = A[x,t]^m (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

Следовательно, $A^{-1}A^t \equiv [x,t]^m \in \langle \mathscr{R}_1\rangle^F (\operatorname{mod} \gamma_3 F)$.

Таким образом, показали, что в фактор-группе $\langle \mathscr{R}_1\rangle^F/(\langle \mathscr{R}_1\rangle^F \cap \gamma_3 F)$ лежат коммутаторы $[x,y]^m$, $[x,z]^m$, $[x,t]^m$.

Аналогично, сопрягая B последовательно элементами x,y,t, можно показать, что в фактор-группе $\langle \mathscr{R}_1\rangle^F/(\langle \mathscr{R}_1\rangle^F \cap \gamma_3 F)$ лежат коммутаторы $[z,x]^n$, $[z,y]^n$, $[z,t]^n$. Установлено, что образ подгруппы $\langle \mathscr{R}_1\rangle^F$ по модулю $\gamma_3 F$ имеет вид

$$\langle \mathscr{R}_1\rangle^F/(\langle \mathscr{R}_1\rangle^F \cap \gamma_3 F) = \langle A,B,C,[x,y]^m,[x,z]^m,[x,t]^m,[z,x]^n,[z,y]^n,[z,t]^n\rangle.$$

Заметим, что подгруппа, порожденная элементами $[x,z]^m$ и $[x,z]^n$, порождается одним элементом $[x,z]^d$. Поэтому можем считать, что

$$\langle \mathscr{R}_1\rangle^F/(\langle \mathscr{R}_1\rangle^F \cap \gamma_3 F) = \langle A,B,C,[x,y]^m,[x,z]^d,[x,t]^m,[z,y]^n,[z,t]^n\rangle.$$

Учитывая, что элемент C лежит в коммутанте F', можно считать, что по модулю $\gamma_3 F$ он имеет вид

$$C \equiv [t,z]^{\alpha_1}[t,y]^{\alpha_2}[t,x]^{\alpha_3}[z,y]^{\alpha_4}[z,x]^{\alpha_5}[y,x]^{\alpha_6}(\mathrm{mod}\,\gamma_3 F),$$

где $0 \le \alpha_1$, $\alpha_4 < n$, $0 \le \alpha_3, \alpha_6 < m$, $0 \le \alpha_5 < d$, $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что коммутаторы $[y,x]$ и $[t,z]$ не могут одновременно лежать в подгруппе $\langle \mathscr{R}_1 \rangle^F$. Это и приведет к противоречию с тем, что $\langle \mathscr{R} \rangle^F = \langle \mathscr{R}_1 \rangle^F$. Если $[y,x] \in \langle \mathscr{R}_1 \rangle^F$, то по модулю $\gamma_3 F$ справедливо равенство

$$[y,x] \equiv [t,z]^{na_1}[t,x]^{ma_3}[z,y]^{na_4}[z,x]^{da_5}[y,x]^{ma_6}C^k(\mathrm{mod}\,\gamma_3 F)$$

для некоторых целых $a_1, a_3, a_4, a_5, a_6, k$. Вспоминая выражение для C, перепишем последнее равенство в таком виде:

$$[y,x] \equiv [t,z]^{na_1+k\alpha_1}[t,y]^{k\alpha_2}[t,x]^{ma_3+k\alpha_3}[z,y]^{na_4+k\alpha_4} \times [z,x]^{da_5+k\alpha_5}[y,x]^{ma_6+k\alpha_6}(\mathrm{mod}\,\gamma_3 F).$$

Отсюда $k\alpha_2 = 0$, а потому $\alpha_2 = 0$ и имеем систему

$$\begin{cases} 1 = ma_6 + k\alpha_6, \\ 0 = na_1 + k\alpha_1, \\ 0 = ma_3 + k\alpha_3, \\ 0 = na_4 + k\alpha_4, \\ 0 = da_5 + k\alpha_5. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что m и k взаимно просты, а потому d и k взаимно просты. Тогда из второго уравнения вытекает, что α_1 делится на d.

Аналогично рассмотрим равенство

$$\begin{aligned}[t,z] &\equiv [t,z]^{nb_1}[t,x]^{mb_3}[z,y]^{nb_4}[z,x]^{db_5}[y,x]^{mb_6}C^l \\ &\equiv [t,z]^{nb_1+l\alpha_1}[t,x]^{mb_3+l\alpha_3}[z,y]^{nb_4+l\alpha_4}[z,x]^{db_5+l\alpha_5}[y,x]^{mb_6+l\alpha_6}(\mathrm{mod}\,\gamma_3 F),\end{aligned}$$

которое должно выполняться для некоторых целых $b_1, b_3, b_4, b_5, b_6, l$. Это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} 1 = nb_1 + l\alpha_1, \\ 0 = mb_3 + l\alpha_3, \\ 0 = nb_4 + l\alpha_4, \\ 0 = db_5 + l\alpha_5, \\ 0 = mb_6 + l\alpha_6, \end{cases}$$

но так как n и α_1 делятся на $d > 1$, первое равенство невозможно. Таким образом, эти две системы не могут быть разрешимыми одновременно.

2. Доказательство этого случая проводится аналогично. Пусть

$$G = G_{m,n} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^m = y^m = z^n = t^n = [x,y] = [z,t] = 1 \rangle.$$

Обозначим через $R = \langle x^m, y^m, z^n, t^n, [x,y], [z,t] \rangle^F$ нормальную подгруппу группы F. Тогда $G = F/R = F/\langle \mathscr{R} \rangle^F$, где $\mathscr{R} = \{x^m, y^m, z^n, t^n, [x,y], [z,t]\}$.

Предположим, что G имеет представление с пятью соотношениями:

$$G = \langle x, y, z, t \mid\mid A = B = C = D = E = 1 \rangle,$$

где A, B, C, D, E — слова от порождающих x, y, z, t и обратных к ним. Это означает, что R как нормальная подгруппа порождается пятью элементами: $R = \langle \mathscr{R}_1 \rangle^F$, где $\mathscr{R}_1 = \{A, B, C, D, E\}$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$A = x^m a, \quad B = y^m b, \quad C = z^n c, \quad D = t^n g, \quad E$$

и элементы a, b, c, g, E лежат в коммутанте F'.

Рассмотрим фактор-группу $F/\gamma_3 F$. Так же, как и выше, проверяем, что образ подгруппы $\langle \mathscr{R}_1 \rangle^F$ имеет вид

$$\langle A, B, C, D, E, [x,y]^m, [x,z]^d, [x,t]^d, [y,z]^d, [y,t]^d, [z,t]^n \rangle.$$

Так как E лежит в коммутанте F', по модулю $\gamma_3 F$ он имеет вид

$$E \equiv [t,z]^{\alpha_1} [t,y]^{\alpha_2} [t,x]^{\alpha_3} [z,y]^{\alpha_4} [z,x]^{\alpha_5} [y,x]^{\alpha_6} (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

При этом можно считать, что справедливы неравенства

$$0 \le \alpha_1 < n, \quad 0 \le \alpha_6 < m, \quad 0 \le \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 < d.$$

Учитывая, что коммутатор $[y,x]$ лежит в $\langle \mathscr{R}_1 \rangle^F$, для некоторых целых $a_1, \ldots, a_6$ и k должно быть выполнено равенство

$$[y,x] \equiv [t,z]^{na_1} [t,y]^{da_2} [t,x]^{da_3} [z,y]^{da_4} [z,x]^{da_5} [y,x]^{ma_6} E^k (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

Перепишем его в виде

$$[y,x] \equiv [t,z]^{na_1 + k\alpha_1} [t,y]^{da_2 + k\alpha_2} [t,x]^{da_3 + k\alpha_3} [z,y]^{da_4 + k\alpha_4} \\ [z,x]^{da_5 + k\alpha_5} [y,x]^{ma_6 + k\alpha_6} (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} 0 = na_1 + k\alpha_1, \\ 0 = da_2 + k\alpha_2, \\ 0 = da_3 + k\alpha_3, \\ 0 = da_4 + k\alpha_4, \\ 0 = da_5 + k\alpha_5, \\ 1 = ma_6 + k\alpha_6. \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что m и k должны быть взаимно простыми, а потому и d и k взаимно просты. Тогда из первого равенства вытекает, что α_1 делится на d.

Аналогично, принимая во внимание, что коммутатор $[t,z]$ лежит в $\langle \mathscr{R}_1 \rangle^F$, заключаем, что для некоторых целых $b_1, \ldots, b_6$ и l должно быть выполнено равенство

$$[t,z] \equiv [t,z]^{nb_1} [t,y]^{db_2} [t,x]^{db_3} [z,y]^{db_4} [z,x]^{db_5} [y,x]^{mb_6} E^l (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

Перепишем его в таком виде:

$$[t,z] \equiv [t,z]^{nb_1 + l\alpha_1} [t,y]^{db_2 + l\alpha_2} [t,x]^{db_3 + l\alpha_3} [z,y]^{db_4 + l\alpha_4} \\ \times [z,x]^{db_5 + l\alpha_5} [y,x]^{mb_6 + l\alpha_6} (\operatorname{mod} \gamma_3 F).$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} 1 = nb_1 + l\alpha_1, \\ 0 = db_2 + l\alpha_2, \\ 0 = db_3 + l\alpha_3, \\ 0 = db_4 + l\alpha_4, \\ 0 = db_5 + l\alpha_5, \\ 0 = mb_6 + l\alpha_6. \end{cases}$$

Заметим, что эта система неразрешима. Действительно, как замечено выше, d делит α_1, а по предположению d делит n. Следовательно, правая часть первого равенства делится на $d > 1$, а потому первое равенство не выполняется. Теорема полностью доказана.

§ 3. Число соотношений в нильпотентных группах

В этом параграфе покажем, что при взаимно простых m и n группы $H_{m,n}$ и $\Gamma_{m,n}$ задаются тремя соотношениями по модулю некоторого члена нижнего центрального ряда.

В свободной группе $F = \langle x, y, z, t\rangle$ рассмотрим две нормальные подгруппы

$$M = \langle x^p, z^q, [x, y] \cdot [z, t]\rangle^F, \quad N = \langle x^p, z^q, [x, y], [z, t]\rangle^F,$$

где p и q — взаимно простые натуральные числа, большие 1. Ясно, что M содержится в N. Справедливо

Предложение 1. *Для всякого натурального s имеет место равенство*

$$F/(M\gamma_s F) = F/(N\gamma_s F).$$

Иными словами, образ группы

$$H_{p,q} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^p = z^q = [x, y] = [z, t] = 1\rangle$$

в любой нильпотентной группе определяется тремя соотношениями.

Доказательство. Рассмотрим нильпотентную группу $G = F/(K\gamma_s F)$, где $K = \langle x^p, z^q\rangle^F$. Ясно, что $K \leq M$. Очевидно, что элементы x, y, $[x, y] \cdot [z, t]$ лежат в периодической подгруппе (здесь и далее обозначаем образы порождающих x, y, z, t в группе G теми же символами). Хорошо известно, что всякая конечная нильпотентная группа является прямым произведением своих силовских подгрупп. В частности, элемент $[x, y]$ перестановочен с элементом $[z, t]$, так как они являются p- и q-элементами соответственно.

Предположим, что порядки коммутаторов равны

$$\mathrm{ord}[x, y] = p^n, \quad \mathrm{ord}[z, t] = q^m, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Тогда найдутся целые числа a и b, удовлетворяющие равенству $ap^n + bq^m = 1$. Воспользовавшись этим равенством, получим

$$([x, y] \cdot [z, t])^{ap^n} = [z, t]^{ap^n} = [z, t]^{1-bq^m} = [z, t].$$

Следовательно, $[z, t] \in M\gamma_s F$, а потому $M\gamma_s F = N\gamma_s F$. Предложение доказано.

Вопрос. *Можно ли доказанное предложение обобщить на случай метабелевых групп? Иными словами, справедливо ли равенство*

$$F/(MF'') = F/(NF'')?$$

Для группы $\Gamma_{2,3}$ справедливо

Предложение 2. *Пусть группа G имеет представление*

$$\langle x, y, z, t \mid\mid x^2 = 1,\ (yxy^{-1})x(yxy^{-1})^{-1} = x^3,\ z^3 = 1,\ (tzt^{-1})z(tzt^{-1})^{-1} = z^4\rangle,$$

т. е. $G = \Gamma_{2,3} = Q_2 * Q_3$, где

$$Q_2 = \langle x, y \mid\mid x^2 = 1,\ (yxy^{-1})x(yxy^{-1})^{-1} = x^3\rangle,$$
$$Q_3 = \langle z, t \mid\mid z^3 = 1,\ (tzt^{-1})z(tzt^{-1})^{-1} = z^4\rangle.$$

Тогда по модулю $\gamma_4 G$ группа G может быть задана тремя соотношениями:

$$x^2 = z^3 = [y, x, x][z, t, t] = 1.$$

Доказательство. Заметим вначале, что соотношение

$$(yxy^{-1})x(yxy^{-1})^{-1} = x^3$$

в группе Q_2 эквивалентно соотношению

$$[x^{-1}, y^{-1}, x^{-1}] = 1.$$

Действительно,

$$(yxy^{-1})x(yxy^{-1})^{-1} = x^3 \Leftrightarrow (yxy^{-1})x(yxy^{-1})^{-1} = x$$
$$\Leftrightarrow (yxy^{-1})x(yxy^{-1})^{-1}x^{-1} = 1 \Leftrightarrow yxy^{-1}(x^{-1}x)xyx^{-1}y^{-1}x^{-1} = 1$$
$$\Leftrightarrow [x^{-1}, y^{-1}, x^{-1}] = 1.$$

По модулю $\gamma_4 G$ последнее соотношение можно переписать в виде $[y, x, x] = 1$.

Аналогично в группе Q_3 соотношение $(tzt^{-1})z(tzt^{-1})^{-1} = z^4$ эквивалентно соотношению $[z^{-1}, t^{-1}, z^{-1}] = 1$, которое по модулю $\gamma_4 G$ можно переписать в виде $[t, z, z] = 1$.

Таким образом,

$$G/\gamma_4 G = \langle x, y, z, t \mid\mid x^2 = z^3 = [y, x, x] = [t, z, z] = 1,\ \gamma_4 G = 1\rangle.$$

Рассмотрим группу

$$\overline{G} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^2 = z^3 = [y, x, x][t, z, z] = 1\rangle$$

и ее фактор-группу

$$\overline{G}/\gamma_4\overline{G} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^2 = z^3 = [y, x, x][t, z, z] = 1,\ \gamma_4 G = 1\rangle,$$

которая нильпотентна и в которой выполнены соотношения

$$[y, x, x]^2 = 1, \quad [t, z, z]^3 = 1.$$

Следовательно,

$$[t, z, z] = ([y, x, x][t, z, z])^4, \quad [y, x, x] = ([y, x, x][t, z, z])^3,$$

а потому $G/\gamma_4 G = \overline{G}/\gamma_4\overline{G}$. Предложение доказано.

Вопрос. *Можно ли группу G/G'' задать тремя соотношениями в классе метабелевых групп?*

Замечание. Аналогичным образом можно показать, что группа

$$\Gamma_{m,n} = \langle x, y, z, t \mid\mid x^m = 1,\ (yxy^{-1})x(yxy^{-1})^{-1} = x^{m+1},\ z^n = 1,\\ (tzt^{-1})z(tzt^{-1})^{-1} = z^{n+1}\rangle$$

при взаимно простых m и n может быть задана тремя соотношениями по модулю $\gamma_4\Gamma_{m,n}$. Более общо, используя аналогичные методы, можно рассмотреть группу

$$\Gamma_{m_1,m_2,\dots,m_r} = \big\langle x_1, y_1, \dots, x_r, y_r \mid\mid x_i^{m_i} = 1,\\ \big(y_i x_i y_i^{-1}\big) x_i \big(y_i x_i y_i^{-1}\big)^{-1} = x_i^{m_i+1},\ i = 1, 2, \dots, r\big\rangle,$$

где $(m_i, m_j) = 1$ при $i \neq j$, и показать, что она задается $r+1$ соотношениями

$$x_i^{m_i} = 1,\ i = 1, 2, \dots, r, \quad \prod_{i=1}^{r} [y_i, x_i, x_i] = 1$$

по модулю $\gamma_4\Gamma_{m_1,m_2,\dots,m_r}$.

Обобщением фактор-группы R/R', возникающей из представления F/R, является фактор-группа $\frac{M\cap N}{[M,N]}$, где M и N — нормальные подгруппы свободной группы F. Хорошо известно (см., например, [8, следствие 1.47]), что если $M = \langle g\rangle^F$ и $N = \langle h\rangle^F$ для некоторых элементов g, h из F, то фактор-группа $\frac{M\cap N}{[M,N]}$ является свободной абелевой группой. Следующий пример показывает, что это утверждение перестает быть справедливым, если обе группы M и N являются нормальными замыканиями более чем одного элемента.

Пример. Пусть $F = \langle x, y, z, t\rangle$ — свободная группа и

$$N = \langle x^2, z^3, [x, y], [z, t]\rangle^F$$

— ее нормальная подгруппа. Ясно, что

$$F/N = \langle x, y, z, t \mid\mid x^2 = z^3 = [x, y] = [z, t] = 1\rangle.$$

Рассмотрим подгруппу $M = \langle F', x, y, z\rangle \leq F$ и фактор-группу $N/[N, M]$. Покажем, что в этой фактор-группе имеет место соотношение $[x, y]^2 = 1$. Для этого заметим, что N порождается множеством элементов

$$\mathscr{R} = \{x^2, z^3, [x, y], [z, t], [x^2, w], [z^3, w], [x, y, w], [z, t, w],\ w \in F\},$$

а M — множеством элементов $\mathscr{R}_1 = \{x, y, z, h,\ h \in F'\}$. Взаимный коммутант $[N, M]$ порождается элементами $[a, b]$, $a \in N$, $b \in M$. Поэтому соотношениями группы $N/[N, M]$ будут слова вида $[a, b]$, при этом можно считать, что $a \in \mathscr{R}, b \in \mathscr{R}_1$. Рассмотрим пару соотношений

$$[x^2, y] = 1, \quad [x, y, x] = 1.$$

Первое можно представить так: $[x, y]^x[x, y] = 1$, т. е. $[x, y]^x = [x, y]^{-1}$. Второе соотношение равносильно такому: $[x, y]^x = [x, y]$. Следовательно, из двух исходных соотношений следует, что $[x, y]^2 = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bestvina M., Brady N.* Morse theory and finiteness conditions of groups // Invent. Math. 1997. V. 129. P. 445–470.
2. *Epstein D. B. A.* Finite presentations of groups and 3-manifolds // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1961. V. 12. P. 205–212.
3. *Gruenberg K. W., Linnell P. A.* Generation gaps and abelianized defects of free products // J. Group Theory. 2008. V. 11, N 5. P. 587–608.
4. *Bridson M., Tweedale M.* Deficiency and abelianized deficiency of some virtually free groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2007. V. 143, N 2. P. 257–264.
5. *Wall C. T. C.* Finiteness conditions for CW-complexes // Ann. Math. 1965. V. 81, N 1. P. 56–69.
6. *Hog C., Lustig M., Metzler W.* Presentation classes, 3-manifolds and free products // Geometry and topology (College Park, MD, 1983/84). Berlin: Springer-Verl., 1985 (Lect. Notes Math.; V. 1167). P. 154–167.
7. *Rapaport E. S.* On the defining relations of a free product // Pacific J. Math. 1964. V. 14, N 4. P. 1389–1393.
8. *Mikhailov R., Passi I. B. S.* Lower central and dimension series of groups. Berlin: Springer-Verl., 2009. (Lect. Notes Math.; V. 1952).

Статья поступила 27 июля 2011 г.

Бардаков Валерий Георгиевич, Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
bardakov@math.nsc.ru, neshch@math.nsc.ru