Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 515.162

О СЛОЖНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМ КРАЕМ

А. Ю. Веснин, Е. А. Фоминых

Аннотация. Определяются непересекающиеся классы $\mathscr{H}_{p,q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и $p \geq q \geq 1$, ориентируемых гиперболических 3-многообразий с геодезическим краем. Если $M \in \mathscr{H}_{p,q}$, то его сложность $c(M)$ и эйлерова характеристика $\chi(M)$ связаны формулой $c(M) = p - \chi(M)$. Известно, что классы $\mathscr{H}_{q,q}$, $q \geq 1$, и $\mathscr{H}_{2,1}$ содержат бесконечные серии многообразий, для каждого из которых найдено точное значение сложности. Приведена бесконечная серия многообразий класса $\mathscr{H}_{3,1}$ и найдены точные значения сложности этих многообразий. Метод доказательства основан на вычислении ε-инвариантов многообразий.

Ключевые слова: сложность многообразия, гиперболическое многообразие.

К 100-летию со дня рождения
академика Александра Даниловича Александрова

1. Введение

Пусть M — компактное 3-многообразие с непустым краем ∂M. Напомним [1], что компактный двумерный подполиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M, если многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$. Исследование спайнов 3-многообразий привело к возникновению понятия сложности $c(M)$ многообразия M [1].

Хорошо известно, что лишь конечное число неприводимых гранично неприводимых 3-многообразий без существенных колец могут иметь одну и ту же сложность. Поэтому табулирование 3-многообразий заданной сложности и получение точных значений сложности для больших классов 3-многообразий дают естественный подход к проблеме их классификации.

Задача вычисления сложности трехмерных многообразий является весьма трудной. К настоящему времени точные значения сложности известны только для табличных многообразий [2–4], для нескольких бесконечных серий гиперболических многообразий с краем [5–8], для нескольких бесконечных серий линзовых пространств и для обобщенных пространств кватернионов [9, 10]. Обсуждению этих результатов посвящен обзор [11].

В разд. 2 приводятся основные сведения о сложности многообразий с краем и об ε-инварианте. В разд. 3 определяются непересекающиеся классы $\mathscr{H}_{p,q}$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00642 (Веснин) и 11–01–00605 (Фоминых)), а также Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–921.2012.1 (Веснин) и НШ–1414.2012.1 (Фоминых)).

$p, q \in \mathbb{N}$, ориентируемых гиперболических 3-многообразий с геодезическим краем. Из [7, 8] следует, что классы $\mathscr{H}_{q,q}$, $q \in \mathbb{N}$, и $\mathscr{H}_{2,1}$ содержат бесконечные серии многообразий, для каждого из которых известно точное значение сложности. В разд. 4 приводится бесконечная серия многообразий с непустым краем. Доказывается, что эти многообразия принадлежат классу $\mathscr{H}_{3,1}$, и с использованием ε-инварианта находятся точные значения их сложности (теорема 4.1). В силу теоремы жесткости Мостова [12] объем является инвариантом гиперболизуемого 3-многообразия; мы приводим значения объемов обсуждаемых многообразий. Напомним, что в [13, 14] продемонстрировано, что асимптотические формулы объемов многообразий могут быть успешно использованы для получения нижних оценок сложности для бесконечных серий замкнутых гиперболических 3-многообразий.

2. Сложность многообразий с краем

В этом разделе напомним основные понятия теории сложности 3-многообразий. Компактный полиэдр P называется *почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф K_4 с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу K_4, называются *истинными вершинами* полиэдра P. Спайн 3-многообразия называется *почти простым*, если он является почти простым полиэдром. Будем говорить, что *сложность* $c(M)$ компактного 3-многообразия M равна n, если M имеет почти простой спайн с n истинными вершинами и не имеет почти простых спайнов с меньшим числом истинных вершин.

Идея измерять сложность 3-многообразий числом истинных вершин их минимальных почти простых спайнов вполне естественна. Эта характеристика хороша тем, что она аддитивна по отношению к связным суммам многообразий. Однако она имеет и недостатки. Во-первых, почти простой спайн определяет 3-многообразие не единственным образом. Во-вторых, существует бесконечное число 3-многообразий, имеющих почти простой спайн с данным числом вершин. Поэтому в классе почти простых спайнов выделяются подклассы так называемых простых и специальных спайнов.

Компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой его точки $x \in P$ гомеоморфен либо окружности (такая точка x называется *неособой*), либо окружности с диаметром (такая точка x называется *тройной точкой*), либо графу K_4 (такая точка x, как и выше, называется *истинной вершиной*). Компоненты связности объединения всех неособых точек и объединения всех тройных точек называются соответственно 2-*компонентами* и *тройными линиями* полиэдра P. Простой полиэдр называется *специальным*, если его тройные линии являются открытыми 1-клетками, а его 2-компоненты — открытыми 2-клетками. Спайн 3-многообразия называется *простым* или *специальным*, если он является простым или специальным полиэдром соответственно.

Как доказано в [1], многообразие однозначно определяется своим специальным спайном, и для любого целого n существует лишь конечное число специальных спайнов с n истинными вершинами. Следующая теорема показывает, что в некоторых случаях почти простой спайн многообразия можно заменить специальным без увеличения числа истинных вершин.

Теорема 2.1 [1]. *Пусть компактное неприводимое гранично неприводимое 3-многообразие M таково, что $M \neq D^3, S^3, RP^3, L_{3,1}$ и все собственные кольца в M несущественны. Тогда для любого почти простого спайна P многообразия*

M можно найти его специальный спайн P_1 с меньшим или тем же самым числом истинных вершин.

Как правило, при вычислении сложности 3-многообразия трудной частью является доказательство того, что число истинных вершин найденного спайна минимально. В этой работе для доказательства минимальности числа истинных вершин будем использовать метод из [8], основанный на вычислении ε-инварианта 3-многообразия. Напомним его определение (см. [1, разд. 8.1.3]). Пусть P — специальный спайн компактного 3-многообразия M. Обозначим через $\mathscr{F}(P)$ множество всех его простых подполиэдров, включая P и пустое множество. Сопоставим каждому простому полиэдру $Q \subset P$ его ε-вес $w_\varepsilon(Q) = (-1)^{V(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-V(Q)}$, где $V(Q)$ — число истинных вершин в Q, $\chi(Q)$ — его эйлерова характеристика, а $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$ — решение уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$. Тогда ε-инвариант $t(M)$ многообразия M задается формулой $t(M) = \sum\limits_{Q \in \mathscr{F}(P)} w_\varepsilon(Q)$.

Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи $\{F_r\}_{r\in\mathbb{Z}}$, определяемых по правилам $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_r - F_{r-1} - F_{r-2} = 0$. Ниже при вычислении ε-инвариантов многообразий нам понадобится формула (1), которую легко доказать по индукции для любого $r \in \mathbb{Z}$:

$$\varepsilon^r = F_r \cdot \varepsilon + F_{r-1}. \tag{1}$$

3. Новое разбиение гиперболических многообразий на классы

3.1. Классы $\mathscr{H}_{p,q}$. Обозначим через $\mathscr{H}$ класс всех связных ориентируемых гиперболических 3-многообразий, имеющих непустой компактный край, являющийся вполне геодезическим. Напомним, что компактное 3-многообразие M является *гиперболическим*, если его внутренность $\mathrm{Int}M$ обладает полной гиперболической метрикой конечного объема. Известно (см. [15]), что любое гиперболическое 3-многообразие неприводимо, имеет несжимаемый край и не содержит существенных колец. Поэтому в силу теоремы 2.1 справедлива

Лемма 3.1. *Если $M \in \mathscr{H}$, то 3-многообразие M имеет специальный спайн с числом истинных вершин, равным сложности $c(M)$ 3-многообразия M.*

Разобьем множество $\mathscr{H}$ на подмножества $\mathscr{H}_{p,q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, по следующему правилу. Будем полагать, что 3-многообразие $M \in \mathscr{H}$ принадлежит $\mathscr{H}_{p,q}$, если выполнены следующие условия:

(1) число компонент края ∂M многообразия M равно q;

(2) многообразие M имеет специальный спайн с p 2-компонентами и не имеет специальных спайнов с меньшим числом 2-компонент.

Очевидно, что если пары параметров (p, q) и (p', q') различны, то $\mathscr{H}_{p,q} \cap \mathscr{H}_{p',q'} = \varnothing$.

Естественно возникает вопрос: для всех ли значений p и q множества $\mathscr{H}_{p,q}$ непустые? В [7, лемма 2.1] замечено, что для любого связного компактного 3-многообразия M и для любого его специального спайна P справедлив следующий факт: число 2-компонент в P не меньше числа компонент края ∂M. Таким образом, имеет место следующее свойство множеств $\mathscr{H}_{p,q}$.

Лемма 3.2. *Если $p, q \in \mathbb{N}$ таковы, что $p < q$, то $\mathscr{H}_{p,q} = \varnothing$.*

Значит, далее всегда можем считать, что $p \geq q$. Следующая лемма показывает, что информация о том, в каком из подмножеств $\mathscr{H}_{p,q}$ лежит 3-многообразие M, существенно упрощает вычисление его сложности $c(M)$.

Лемма 3.3. *Если $M \in \mathscr{H}_{p,q}$, то $c(M) = p - \chi(M)$, где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика.*

Доказательство. По лемме 3.1 многообразие M имеет специальный спайн P с числом истинных вершин, равным сложности $c(M)$. Спайн P содержит $2c(M)$ тройных линий (являющихся открытыми 1-клетками) и p 2-компонент (являющихся открытыми 2-клетками), поскольку $M \in \mathscr{H}_{p,q}$. Его эйлерова характеристика $\chi(P)$ равна $p - c(M)$. Наконец, $\chi(M) = \chi(P)$, так как $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$. $\square$

Напомним примеры бесконечных серий гиперболических 3-многообразий с геодезическим краем, сложность которых известна. Эти примеры лежат в классах $\mathscr{H}_{q,q}$, $q \in \mathbb{N}$, и $\mathscr{H}_{2.1}$. Основным результатом данной работы (см. следующий раздел) является построение бесконечного семейства 3-многообразий, лежащих в классе $\mathscr{H}_{3,1}$, и получение точной формулы для их сложности.

3.2. Многообразия классов $\mathscr{H}_{q,q}$. В [6, 7] Фрижерио, Мартелли и Петронио ввели в рассмотрение классы многообразий $\mathscr{M}_{g,\ell}$, где $g \geq 2$ и $\ell \geq 0$. По определению 3-многообразие M лежит в классе $\mathscr{M}_{g,\ell}$, если оно имеет специальный спайн с $g + \ell$ истинными вершинами и его край ∂M состоит из замкнутой ориентируемой поверхности рода g и ℓ торов.

Теорема 3.1 [6, 7]. *Пусть $M \in \mathscr{M}_{g,\ell}$. Тогда многообразие M является гиперболическим и его сложность выражается формулой $c(M) = g + \ell$.*

Отметим, что основная трудность доказательства теоремы 3.1 связана с доказательством того, что многообразия класса $\mathscr{M}_{g,\ell}$ гиперболические, т. е. $\mathscr{M}_{g,\ell} \subset \mathscr{H}$. Формула $c(M) = g + \ell$ — прямое следствие этого факта. Действительно, если $\mathscr{M}_{g,\ell} \subset \mathscr{H}$, то из определения класса $\mathscr{M}_{g,\ell}$ следует, что $\mathscr{M}_{g,\ell} \subset \mathscr{H}_{p,\ell+1}$, где $p \leq \ell + 1$. Далее, в силу леммы 3.2 имеем $\mathscr{M}_{g,\ell} \subset \mathscr{H}_{\ell+1,\ell+1}$. Тогда формула $c(M) = g + \ell$ для сложности многообразия $M \in \mathscr{M}_{g,\ell}$ вытекает из леммы 3.3, поскольку $\chi(M) = 1 - g$.

В [6, 7] доказано, что при фиксированном ℓ мощность множества $\mathscr{M}_{g,\ell}$ растет как g^g. В частности, для каждого $\ell \geq 0$ Фрижерио, Мартелли и Петронио предъявили алгоритм построения однопараметрического семейства гиперболических 3-многообразий с краем, зависящих от параметра g, которые, как мы уже знаем, будут лежать в классе $\mathscr{H}_{\ell+1,\ell+1}$.

3.3. Серия многообразий класса $\mathscr{H}_{2,1}$. Бесконечное семейство ориентируемых гиперболических 3-многообразий с компактным краем построено Паолюци и Циммерманом в [16]. Каждое многообразие $M_{n.k}$, $n \geq 4$, $0 \leq k \leq n-1$, $(n, 2-k) = 1$ из [16] имеет одну компоненту края, и его эйлерова характеристика $\chi(M_{n,k})$ равна $2 - n$. Ранее известные примеры многообразий с одной компонентой края и сложности n, изучавшиеся в [6], имели эйлерову характеристику $1-n$. Сложность многообразий $M_{n.k}$ исследовалась в [8], где получены следующие результаты.

Теорема 3.2 [8]. *Пусть целые $n \geq 4$ и k таковы, что $0 \leq k \leq n-1$ и $(n, 2-k) = 1$. Тогда многообразие $M_{n,k}$ обладает следующими свойствами:*

(1) *$M_{n,k} \in \mathscr{H}_{2,1}$;*
(2) *$c(M_{n,k}) = n$;*
(3) *$\chi(M_{n,k}) = 2 - n$;*
(4) *$t(M_{n,k}) = (-1)^n \varepsilon^{2-2n} + \varepsilon^{1-n} + 1$.*

Известно [16], что многообразия $M_{n,k}$ и $M_{n',k'}$ гомеоморфны (или, что эквивалентно, изометричны) тогда и только тогда, когда $n = n'$ и $k \equiv k'$ по модулю n. Отметим, что каждое из многообразий $M_{3,k}$, $k = 0, 1$, строится из двух усеченных тетраэдров, полученных из тетраэдра с двугранными углами $\pi/12$; объемы многообразий равны $\operatorname{vol} M_{3,k} = 6,4519898\ldots$, а $\partial M_{3,k}$ — замкнутая поверхность рода два. Каждое из многообразий $M_{4,k}$, $k = 1, 3$, строится из усеченного октаэдра, полученного из октаэдра, все двугранные углы которого равны $\pi/6$; объемы многообразий равны $\operatorname{vol} M_{4,k} = 11,448775\ldots$, а $\partial M_{4,k}$ — замкнутая поверхность рода три. Значения объемов многообразий $M_{n,k}$, где $0 \le k \le n-1$ и $(n, 2-k) = 1$, для $n \le 82$ приведены в [17].

4. Серия многообразий класса $\mathscr{H}_{3,1}$

4.1. Построение многообразий. В этом разделе построим серию многообразий, аналогичных многообразиям Паолюци — Циммермана, а именно, такие многообразия $M_{n,k}$, для которых $(n, 2-k) = 2$.

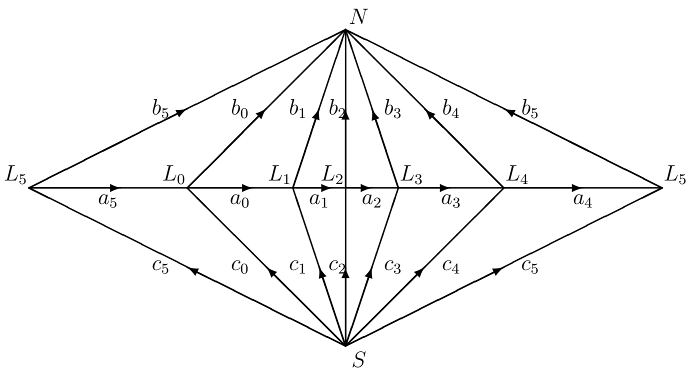

Рис. 1. Бипирамида $\mathscr{B}_6$.

Пусть $n \ge 4$ четно и $\mathscr{B}_n$ — n-угольная бипирамида. Рассмотрим ее поверхность как 2-комплекс, ребрам которого приписаны метки a_i, b_i, c_i, где $i = 0, 1, \ldots, n-1$, по аналогии с рис. 1, на котором приведен случай $n = 6$. Договоримся, что ребра с метками a_i ориентированы слева направо, ребра с метками b_i — от экватора к северному полюсу, а ребра с метками c_i — от южного полюса к экватору. Обходы границ 2-клеток соответствуют соотношениям двух типов:

$$a_i b_{i+1} b_i^{-1} = 1 \quad \text{и} \quad c_i a_i c_{i+1}^{-1} = 1.$$

Введем обозначения для граней: $\mathscr{X}_i = a_i b_{i+1} b_i^{-1}$ и $\mathscr{X}_i' = c_i a_i c_{i+1}^{-1}$. Зафиксируем k такое, что $0 \le k \le n-1$ и $(n, 2-k) = 2$. Для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ зададим попарные отождествления граней $x_{k,i}$: $\mathscr{X}_i \to \mathscr{X}_{k+i}'$ в соответствии со следующим порядком обхода их границ $x_{k,i}$: $a_i b_{i+1} b_i^{-1} \to c_{k+i} a_{k+i} c_{k+i+1}^{-1}$. Действие отождествлений $x_{k,i}$ на гранях индуцирует их действие на ребрах и вершинах бипирамиды. Относительно этого действия ребра бипирамиды разбиваются на два класса эквивалентности:

$$\mathbb{E}_1 = \{a_{2j}, b_{2j+1}, c_{2j},\ j = 0, 1, \ldots, n'\} \quad \text{и} \quad \mathbb{E}_2 = \{a_{2j+1}, b_{2j}, c_{2j+1},\ j = 0, 1, \ldots, n'\},$$

где $n' = n/2 - 1$. Легко видеть, что все вершины бипирамиды образуют один класс эквивалентности.

Обозначим через $M^*_{n,k}$ фактор-пространство, получаемое после попарных отождествлений $x_{k,i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, граней бипирамиды $\mathscr{B}_n$. Оно является ориентируемым псевдомногообразием с одной особой точкой, и его эйлерова характеристика равна $\chi(M^*_{n,k}) = 1 - 2 + n - 1 = n \neq 0$. Вырезав из $M^*_{n,k}$ коническую окрестность особой точки, получим компактное многообразие $M_{n,k}$ с одной компонентой края.

Пусть $\mathscr{A}_n$ — усеченная бипирамида, полученная из $\mathscr{B}_n$ отсечением всех вершин. Отсечения северного и южного полюсов в $\mathscr{B}_n$ приводит к двум n-угольным граням в $\mathscr{A}_n$, а отсечения остальных вершин в $\mathscr{B}_n$ приводят к n четырехугольным граням в $\mathscr{A}_n$. После всех отсечений вершин треугольные грани в $\mathscr{B}_n$ превратятся в шестиугольные грани в усеченной бипирамиде $\mathscr{A}_n$. Ребра усеченной бипирамиды $\mathscr{A}_n$, полученные из ребер a_i, b_i, c_i бипирамиды $\mathscr{B}_n$ после отсечения ее вершин, будем также обозначать через a_i, b_i, c_i.

Попарные отождествления $x_{k,i}$ граней бипирамиды $\mathscr{B}_n$ естественным образом индуцируют попарные отождествления $y_{k,i}$ шестиугольных граней усеченной бипирамиды $\mathscr{A}_n$. Очевидно, можем считать, что фактор-пространство, получаемое после попарных отождествлений $y_{k,i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, совпадает с многообразием $M_{n,k}$. При этом край многообразия склеивается из двух n-угольников и n четырехугольников.

Основная цель данного раздела — доказательство следующих свойств построенных многообразий.

Теорема 4.1. *Пусть целые $n \geq 6$ и k таковы, что $0 \leq k \leq n-1$ и $(n, 2-k) = 2$. Тогда многообразие $M_{n,k}$ обладает следующими свойствами:*

(1) *$M_{n,k}$ может быть реализовано как гиперболическое многообразие, причем $M_{n,k} \in \mathscr{H}_{3,1}$;*

(2) *$c(M_{n,k}) = n$;*

(3) *$\chi(M_{n,k}) = 3 - n$;*

(4) *$t(M_{n,k}) = \varepsilon^{3-2n} + \varepsilon^{2-n} + 1$.*

Гиперболичность многообразий $M_{n,k}$ будет доказана в предложении 4.1. Значение сложности $c(M_{n,k})$ и значение ε-инварианта $t(M_{n,k})$ будут установлены в предложении 4.3.

4.2. Гиперболичность многообразий. Покажем, что многообразия $M_{n,k}$ лежат в классе $\mathscr{H}$.

Предложение 4.1. *Если целые $n \geq 4$ и k таковы, что $0 \leq k \leq n-1$ и $(n, 2-k) = 2$, то $M_{n,k}$ можно реализовать как гиперболическое многообразие.*

Доказательство. Покажем, что усеченная бипирамида $\mathscr{A}_n$ может быть реализована в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$ таким образом, что попарные отождествления $y_{k,i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, ее граней реализуются изометриями $\mathbb{H}^3$ и для классов эквивалентных ребер $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$ сумма двугранных углов по всем ребрам равна 2π. Это будет гарантировать, что многообразие $M_{n,k}$, полученное отождествлениями $y_{k,i}$ граней $\mathscr{A}_n$, гиперболическое.

Положим, что в $\mathscr{A}_n$ двугранные углы при ребрах b_i и c_i равны 2α, а двугранные углы при ребрах a_i равны 2β для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$. По построению число классов эквивалентных ребер равно двум и $\mathbb{E}_2$ состоит из ребер того же типа, что $\mathbb{E}_1$ ($n/2$ ребер типа a_i, $n/2$ ребер типа b_i и $n/2$ ребер типа c_i). Потребуем, чтобы было выполнено равенство $\frac{n}{2}(4\alpha + 2\beta) = 2\pi$, откуда

$$n(2\alpha + \beta) = 2\pi. \tag{2}$$

Также, потребуем, чтобы грани $\mathscr{A}_n$, полученные при усечении бипирамиды (а именно, две n-угольные грани и n четырехугольных граней), пересекались со смежными им гранями под прямым углом.

Установим, что существует реализация $\mathscr{A}_n$ в $\mathbb{H}^3$, удовлетворяющая вышеприведенным условиям.

В самом деле, пусть $\mathscr{C}_n(\alpha,\beta)$ — это верхняя половина $\frac{1}{n}$-дольки многогранника $\mathscr{A}_n$ относительно такой симметрии (см. рис. 2). Усеченная бипирамида $\mathscr{A}_n$ состоит из $2n$ экземпляров $\mathscr{C}_n(\alpha,\beta)$ (n экземпляров образуют верхнюю половину $\mathscr{A}_n$ и еще n — нижнюю).

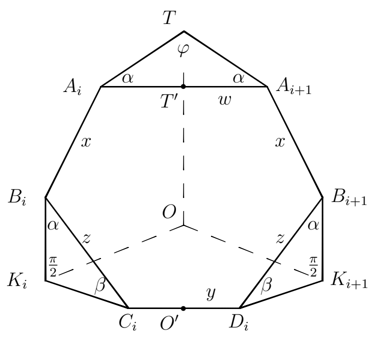

Рис. 2. Многогранник $\mathscr{C}_n(\alpha,\beta)$.

Рассмотрим в $\mathscr{C}_n(\alpha,\beta)$ шестиугольную грань $A_iB_iC_iD_iB_{i+1}A_{i+1}$ и введем обозначения для длин ее сторон: $x = |A_iB_i| = |A_{i+1}B_{i+1}|$, $y = |C_iD_i|$, $z = |B_iC_i| = |D_iB_{i+1}|$ и $w = |A_iA_{i+1}|$. Все углы шестиугольника равны $\pi/2$. Положим, что двугранные углы при ребрах A_iB_i и $A_{i+1}B_{i+1}$ равны α, а двугранный угол при ребре C_iD_i равен β. Из формул для прямоугольного гиперболического шестиугольника получаем

$$\operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{ch} w}{\operatorname{sh}^2 z}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch} z \operatorname{ch} w + \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z \operatorname{sh} w}.$$

Введем обозначение $\varphi = 2\pi/n$. По гиперболической теореме косинусов из треугольника TA_iA_{i+1} с углами φ, α и α имеем

$$\operatorname{ch} w = \frac{\cos^2\alpha + \cos\varphi}{\sin^2\alpha},$$

а из треугольника $K_iB_iC_i$ с углами $\pi/2$, α и β —

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

Требуя $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} w$ (что автоматически повлечет $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch} y$), получаем

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos^2\alpha + \cos\varphi}{\sin^2\alpha},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Удостоверимся в том, что система уравнений

$$\begin{cases} n(2\alpha+\beta) = 2\pi, \\ \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2\cos\varphi}{\sin 2\alpha} \end{cases} \tag{3}$$

имеет решения для всех целых $n \geq 4$. Поскольку $\varphi = 2\pi/n$, то $\beta = \varphi - 2\alpha$. Следовательно,

$$\frac{\cos(\varphi-2\alpha)}{\sin(\varphi-2\alpha)} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\varphi}{\sin 2\alpha},$$

откуда

$$\cos(\varphi-2\alpha)\sin 2\alpha - \sin(\varphi-2\alpha)\cdot 2\cos\alpha\cos\alpha - 2\cos\varphi\sin(\varphi-2\alpha) = 0$$

и, таким образом,

$$(\cos\varphi\cos 2\alpha + \sin\varphi\sin 2\alpha)\sin 2\alpha - (\sin\varphi\cos 2\alpha - \cos\varphi\sin 2\alpha)2\cos^2\alpha \\ - 2\cos\varphi(\sin\varphi\cos 2\alpha - \cos\varphi\sin 2\alpha) = 0.$$

Введем обозначение $t = \operatorname{tg}\alpha$. Пользуясь формулами $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+t^2}$, получаем

$$((1-t^2)\cos\varphi + 2t\sin\varphi)\frac{2t}{1+t^2} - ((1-t^2)\sin\varphi - 2t\cos\varphi)\frac{2}{1+t^2} \\ - 2\cos\varphi((1-t^2)\sin\varphi - 2t\cos\varphi) = 0,$$

откуда

$$\cos\varphi\sin\varphi\cdot t^4 + (2\cos^2\varphi - \cos\varphi)t^3 + 3\sin\varphi\cdot t^2 \\ + (2\cos^2\varphi + 3\cos\varphi)t - \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi = 0. \quad (4)$$

Для каждого $n \geq 4$ рассмотрим функцию

$$f_n(t) = \cos\varphi\sin\varphi\cdot t^4 + (2\cos^2\varphi - \cos\varphi)t^3 + 3\sin\varphi\cdot t^2 \\ + (2\cos^2\varphi + 3\cos\varphi)t - \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi,$$

где $\varphi = 2\pi/n$. Легко видеть что для любого n имеет место неравенство

$$f_n(0) = -\sin\varphi(\cos\varphi + 1) < 0.$$

Положим $a = \operatorname{tg}(\varphi/2) = \operatorname{tg}(\pi/n)$ и вычислим $f_n(a)$. Пользуясь тем, что $\sin\varphi = \frac{2a}{1+a^2}$ и $\cos\varphi = \frac{1-a^2}{1+a^2}$, непосредственными вычислениями получаем

$$f_n(a) = a(1+a^2) > 0.$$

В силу непрерывности $f_n(t)$ на интервале $(0; \operatorname{tg}(\pi/n))$ имеется решение уравнения $f_n(t) = 0$. Следовательно, исходная система (3) имеет решения $\alpha \in (0; \pi/n)$ и $\beta = 2(\pi/n - \alpha)$. Таким образом, для каждого $n \geq 4$ существуют такие α и β, что долька $\mathscr{C}_n(\alpha,\beta)$ реализуется как остроугольный многогранник в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, причем для всех i будут выполнены равенства длин ребер: $|A_iB_i| = |C_iD_i|$ и $|A_iA_{i+1}| = |B_iC_i| = |D_iB_{i+1}|$ (см. рис. 2).

Следовательно, усеченная бипирамида $\mathscr{A}_n$ может быть реализована в гиперболическом пространстве таким образом, что α и β удовлетворяют (2), а все шестиугольные грани многогранника $\mathscr{A}_n$ равны друг другу и могут быть попарно отождествлены изометриями $y_{k,i}$, поскольку ребра, соответствующие меткам a_i, b_i и c_i, имеют равную длину. Таким образом, $M_{n,k}$ можно реализовать как гиперболическое многообразие, полученное из гиперболического многогранника $\mathscr{A}_n$ с двугранными углами $\pi/2$, 2α и 2β с помощью попарных отождествлений граней изометриями $y_{k,i}$. $\square$

Полученные при доказательстве предыдущего утверждения формулы для нахождения величин α и β позволяют найти объемы многообразий $M_{n,k}$ в терминах функции Лобачевского

$$\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|2\sin\zeta|\,d\zeta.$$

Предложение 4.2. *Если целые $n \geq 4$ и k таковы, что $0 \leq k \leq n-1$ и $(n, 2-k) = 2$, то объем гиперболического многообразия $M_{n,k}$ равен*

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} M_{n,k} = n[&\Lambda(\pi/n + \theta_0) - \Lambda(\pi/n - \theta_0) + \Lambda(\pi/2 + \alpha - \theta_0) + \Lambda(\pi/2 - \alpha - \theta_0) \\ &+ \Lambda(2(\pi/n - \alpha) + \theta_0) - \Lambda(2(\pi/n - \alpha) - \theta_0) + 2\Lambda(\pi/2 - \theta_0)],\end{aligned}$$

где

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2(\pi/n)\sin^2(2(\pi/n - \alpha))}}{\cos(\pi/n)\cos(2(\pi/n - \alpha))} \in [0, \pi/2),$$

а $\alpha \in [0, \pi/n)$ такое, что $t = \operatorname{tg}\alpha$ является корнем уравнения (4).

Доказательство. По построению $\operatorname{vol} M_{n,k} = \operatorname{vol} \mathscr{A}_n$. Как отмечалось выше, многогранник $\mathscr{A}_n$ составлен из $2n$ экземпляров $\mathscr{C}_n(\alpha, \beta)$, значит, $\operatorname{vol} M_{n,k} = 2n \operatorname{vol} \mathscr{C}_n(\alpha, \beta)$. Как видно из рис. 2, $\mathscr{C}_n(\alpha, \beta)$, в свою очередь, составлен из двух многогранников, имеющих общую грань, проходящую через точки $TT'O'O$ — многогранника $\mathscr{D}_n(\alpha, \beta)$ и его зеркального образа относительно плоскости $TT'O'O$. Многогранник $\mathscr{D}_n(\alpha, \beta)$ — это многогранник $O'OTT'A_iB_iC_iK_i$, изображенный на рис. 3. Таким образом, $\operatorname{vol} M_{n,k} = 4n \operatorname{vol} \mathscr{D}_n(\alpha, \beta)$.

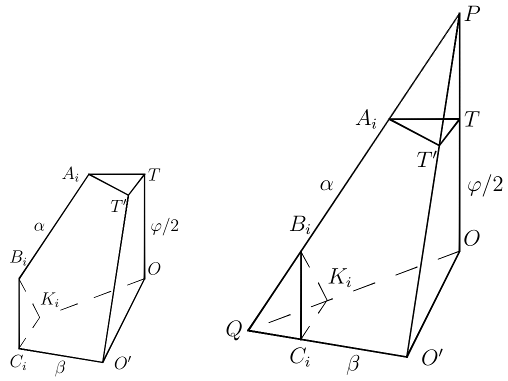

Рис. 3. $\mathscr{D}_n(\alpha, \beta)$ и бипрямоугольный тетраэдр.

Для нахождения $\operatorname{vol} \mathscr{D}_n(\alpha, \beta)$ опишем строение этого многогранника. Грани A_iTT' и $B_iC_iK_i$ пересекаются со смежными им гранями под углами $\pi/2$. Треугольник A_iTT' имеет углы α, $\pi/2$ и $\varphi/2$, где $\varphi/2 = \pi/n$, $n \geq 4$, и $\alpha \in (0, \pi/n)$. Таким образом,

$$\pi - \pi/2 - \varphi/2 - \alpha = \pi/2 - \pi/n - \alpha > \pi/2 - \pi/n - \pi/n \geq 0,$$

поскольку $n \geq 4$. Следовательно, A_iTT' — гиперболический треугольник. Треугольник $B_iC_iD_i$ имеет углы α, β, $\pi/2$, где $\beta = 2(\pi/n - \alpha)$. Значит,

$$\pi - \pi/2 - \alpha - \beta = \pi/2 - \alpha - 2(\pi/n - \alpha) = \alpha + (\pi/2 - 2\pi/n) \geq \alpha > 0.$$

Следовательно, $B_iC_iD_i$ — гиперболический треугольник.

Пусть P — точка пересечения продолжений прямых OT, $O'T'$ и B_iA_i, а Q — точка пересечения продолжений прямых $O'C_i$, OK_i и A_iB_i (точки P и Q лежат за абсолютом $\partial\mathbb{H}^3$). Тогда многогранник $POO'Q$ является обобщенным тетраэдром в том смысле, что две из его вершин находятся за абсолютом. Этот обобщенный тетраэдр является *бипрямоугольным* в смысле [18] или, что то же, *ортосхемой* в смысле [19]: три из его двугранных углов (между последовательно смежными гранями, не образующими цикл) равны $\pi/2$, а оставшиеся (также перечисленные в порядке последовательной смежности) — величинам θ_1, θ_2, θ_3, не превосходящим $\pi/2$. Углы θ_1, θ_2 и θ_3 будем называть *определяющими углами* бипрямоугольного тетраэдра и его усечений.

Формула для объема гиперболических многогранников $R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, являющихся бипрямоугольными тетраэдрами или усечениями обобщенных бипрямоугольных тетраэдров с определяющими углами $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, получена в [18, 19]:

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{4}[\Lambda(\theta_1+\theta_0) - \Lambda(\theta_1-\theta_0) + \Lambda(\pi/2+\theta_2-\theta_0) + \Lambda(\pi/2-\theta_2-\theta_0) \\ + \Lambda(\theta_3+\theta_0) - \Lambda(\theta_3-\theta_0) + 2\Lambda(\pi/2-\theta_0)], \quad (5)\end{aligned}$$

где

$$\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_3}}{\cos\theta_1 \cos\theta_3} \in [0, \pi/2). \quad (6)$$

Шестигранник $\mathscr{D}_n(\alpha,\beta) = O'OTT'A_iB_iC_iK_i$ получается из обобщенного бипрямоугольного тетраэдра $POO'Q$ отсечением вершин P и Q плоскостями A_iTT' и $B_iC_iK_i$ соответственно, каждая из которых ортогональна смежным с нею граням. Таким образом, $\mathscr{D}_n(\alpha,\beta) = R(\varphi/2, \alpha, \beta) = R(\pi/n, \alpha, 2(\pi/n-\alpha))$, следовательно, $\operatorname{vol} M_{n,k} = 4n \operatorname{vol} R(\pi/n, \alpha, 2(\pi/n-\alpha))$; пользуясь (5) и (6), получаем требуемую формулу. $\square$

В частности, при $n = 4$ имеем $\alpha = \beta = \pi/6$, и многообразие $M_{4,0}$ строится из усеченного октаэдра, полученного из октаэдра с двугранными углами $\pi/3$. Для некоторых n приближенные значения углов α и $\beta = 2(\pi/n - \alpha)$, а также объемов усеченных бипрямоугольных тетраэдров $R(\pi/n, \alpha, \beta) = \mathscr{D}_n(\alpha, \beta)$ и многообразий $M_{n,k}$ указаны в следующей таблице:

n	α	β	$\operatorname{vol} R(\pi/n, \alpha, \beta)$	$\operatorname{vol} M_{n.k}$
4	$\pi/6$	$\pi/6$	0,588490	9,415841
6	0,395108	0,256980	0,784052	18,817257
8	0,305027	0,175342	0,841987	27,007588
10	0,246845	0,134627	0,870515	34,820635
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	0,025128	0,012574	0,915521	336,208545

Заметим, что при $n \to \infty$ объем $\operatorname{vol} R(\pi/n, \alpha, \beta)$ стремится к величине $2\Lambda(\pi/4) = 0,915965\dots$.

4.3. Сложность многообразий.

Предложение 4.3. *Если целые $n \geq 6$ и k таковы, что $0 \leq k \leq n-1$ и $(n, 2-k) = 2$, то*

(A) *существует специальный спайн $P_{n,k}$ многообразия $M_{n,k}$ с тремя 2-компонентами;*

(B) *не существует специальных спайнов многообразия $M_{n,k}$ с одной или двумя 2-компонентами;*

(C) $t(M_{n,k}) = \varepsilon^{3-2n} + \varepsilon^{2-n} + 1$.

Доказательство. Установим (A). Построим специальный спайн $P_{n,k}$ многообразия $M_{n,k}$ с n истинными вершинами. Разрежем бипирамиду $\mathscr{B}_n$ на n

тетраэдров $\mathscr{T}_i = NSL_iL_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (см. рис. 1). В каждом $\mathscr{T}_i$ рассмотрим объединение R_i линков всех четырех вершин тетраэдра в его первом барицентрическом подразбиении. Пространство $M^*_{n,k}$ получается склеиванием тетраэдров $\mathscr{T}_0, \ldots, \mathscr{T}_{n-1}$ по аффинным гомеоморфизмам их граней. При этом склейка тетраэдров определяет псевдотриангуляцию $\mathscr{T}$ пространства $M^*_{n,k}$ и индуцирует склейку полиэдров R_i, $i = 0, \ldots, n-1$. В результате склейки полиэдров R_i получается специальный спайн $P_{n,k} = \bigcup\limits_i R_i$ многообразия $M_{n,k}$. Поскольку каждый полиэдр R_i гомеоморфен конусу над графом K_4, спайн $P_{n,k}$ имеет ровно n истинных вершин.

По построению специального спайна $P_{n,k}$ его 2-компоненты находятся во взаимно однозначном соответствии с ребрами псевдотриангуляции $\mathscr{T}$. Поскольку $\mathscr{T}$ содержит три ребра (включая ребро NS), спайн $P_{n,k}$ имеет три 2-компоненты.

Установим (C). Покажем, что $P_{n,k}$ содержит ровно один собственный простой подполиэдр $Q_{n,k}$. В силу компактности простого полиэдра если простой полиэдр $Q \subset P_{n,k}$ содержит хотя бы одну точку 2-компоненты ξ полиэдра $P_{n,k}$, то $\xi \subset Q$. Для описания подполиэдра Q достаточно указать, какие 2-компоненты полиэдра $P_{n,k}$ содержатся в Q, поскольку остальные точки полиэдра Q (т. е. тройные точки и истинные вершины полиэдра $P_{n,k}$, лежащие в Q) по этой информации восстанавливаются однозначно.

Поскольку специальный спайн $P_{n,k}$ имеет три 2-компоненты, он содержит не более шести собственных простых подполиэдров. Комбинаторный анализ показывает, что ровно одна из шести возможных комбинаций 2-компонент полиэдра $P_{n,k}$ порождает собственный простой полиэдр, который мы обозначим через $Q_{n,k}$. А именно, полиэдр $Q_{n,k}$ получается из полиэдра $P_{n,k}$ удалением одной 2-компоненты, соответствующей ребру NS псевдотриангуляции $\mathscr{T}$.

Вычислим значение $t(M_{n,k})$ по спайну $P_{n,k}$. Так как спайн $P_{n,k}$ содержит n вершин, $2n$ ребер и три 2-компоненты, то $\chi(M_{n,k}) = \chi(P_{n,k}) = 3 - n$. Отсюда следует, что $\chi(Q_{n,k}) = 2-n$. Нетрудно проверить, что полиэдр $Q_{n,k}$ не содержит истинных вершин. Поэтому $w_\varepsilon(Q_{n,k}) = \varepsilon^{2-n}$. Суммирование весов $w_\varepsilon(\varnothing) = 1$, $w_\varepsilon(Q_{n,k})$ и $w_\varepsilon(P_{n,k}) = (-1)^n\varepsilon^{3-2n} = \varepsilon^{3-2n}$, поскольку n четно, дает значение $t(M_{n,k}) = \varepsilon^{3-2n} + \varepsilon^{2-n} + 1$.

Установим (B). Рассуждая от противного, предположим, что многообразие $M_{n,k}$ имеет специальный спайн P' с одной 2-компонентой. Вычислим значение $t(M_{n,k})$ по спайну P'. Легко видеть, что $\mathscr{F}(P') = \{\varnothing, P'\}$. Так как $\chi(P') = \chi(M_{n,k}) = 3 - n$, спайн P' содержит $n-2$ истинных вершин. Поэтому $w_\varepsilon(P') = (-1)^{n-2}\varepsilon^{5-2n} = \varepsilon^{5-2n}$. Суммирование весов $w_\varepsilon(\varnothing) = 1$ и $w_\varepsilon(P')$ дает значение $t(M_{n,k}) = \varepsilon^{5-2n} + 1$.

Поскольку значения ε-инварианта многообразия $M_{n,k}$, вычисленные по спайнам $P_{n,k}$ и P', должны совпадать, имеем $\varepsilon^{3-2n} + \varepsilon^{2-n} = \varepsilon^{5-2n}$, откуда с учетом (1)

$$F_{3-2n}\varepsilon + F_{2-2n} + F_{2-n}\varepsilon + F_{1-n} = F_{5-2n}\varepsilon + F_{4-2n}.$$

Сравнив в этом выражении коэффициенты при ε, получим $F_{3-2n} + F_{2-n} = F_{5-2n}$. Пользуясь тем, что $F_{5-2n} = F_{4-2n} + F_{3-2n}$, приходим к равенству $F_{2-n} = F_{4-2n}$, которое не может иметь места при $n \geq 4$. Полученное противоречие означает, что многообразие $M_{n,k}$ не имеет специальных спайнов с одной 2-компонентой.

Теперь, рассуждая от противного, предположим, что многообразие $M_{n,k}$ имеет специальный спайн P'' с двумя 2-компонентами. В силу связности спайн

P'' содержит не более одного собственного простого подполиэдра. Вычислим значение $t(M_{n,k})$ по спайну P''. Возможны два случая.

Случай 1. Предположим, что $\mathscr{F}(P'') = \{\varnothing, P''\}$. Так как $\chi(P'') = \chi(M_{n,k}) = 3 - n$, спайн P'' содержит $n-1$ истинных вершин. Поэтому $t(M_{n,k}) = (-1)^{n-1}\varepsilon^{4-2n} + 1 = -\varepsilon^{4-2n} + 1$. Поскольку значения ε-инварианта многообразия $M_{n,k}$, вычисленные по спайнам $P_{n,k}$ и P'', должны совпадать, имеем $\varepsilon^{3-2n}+\varepsilon^{2-n} = -\varepsilon^{4-2n}$. Отсюда, рассуждая, как и выше, получим $F_{3-2n}+F_{2-n} = -F_{4-2n}$. Пользуясь тем, что $F_{3-2n} = F_{5-2n} - F_{4-2n}$, приходим к равенству $F_{5-2n} + F_{2-n} = 0$, которое не может иметь места при $n \geq 4$.

Случай 2. Предположим, что спайн P'' содержит ровно один собственный простой подполиэдр Q, т. е. $\mathscr{F}(P'') = \{\varnothing, Q, P''\}$. Тогда

$$t(M_{n,k}) = -\varepsilon^{4-2n} + (-1)^{V(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-V(Q)} + 1$$

и аналогично случаю 1 имеем равенство

$$\varepsilon^{3-2n} + \varepsilon^{2-n} = -\varepsilon^{4-2n} + (-1)^{V(Q)}\varepsilon^{\chi(Q)-V(Q)}.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, получим равенство

$$F_{5-2n} + F_{2-n} = (-1)^{V(Q)}F_{\chi(Q)-V(Q)},$$

которое не может иметь места при $n \geq 6$.

Противоречия, полученные в случаях 1 и 2, показывают, что многообразие $M_{n,k}$ не имеет специальных спайнов с двумя 2-компонентами.

Таким образом, свойство (B) установлено, что завершает доказательство предложения. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев С. В.* Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2007.

2. *Матвеев С. В.* Табулирование трехмерных многообразий // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 4. С. 97–122.

3. *Fujii M.* Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra // Tokyo J. Math. 1990. V. 13. P. 353–373.

4. *Frigerio R., Martelli B., Petronio C.* Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary // Exp. Math. 2004. V. 13, N 2. P. 171–184.

5. *Anisov S.* Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds // Moscow Math. J. 2005. V. 5, N 2. P. 305–310.

6. *Frigerio R., Martelli B., Petronio C.* Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds // Pac. J. Math. 2003. V. 210, N 2. P. 283–297.

7. *Frigerio R., Martelli B., Petronio C.* Dehn filling of cusped hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary // J. Diff. Geom. 2003. V. 64, N 3. P. 425–455.

8. *Веснин А. Ю., Фоминых Е. А.* Точные значения сложности многообразий Паолюци — Циммермана // Докл. РАН. 2011. Т. 439, № 6. С. 727–729.

9. *Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S.* Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces // J. Topology. 2009. V. 2, N 1. P. 157–180.

10. *Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S.* Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds // Algebr. Geom. Topol. 2011. V. 11, N 3. P. 1257–1265.

11. *Веснин А. Ю., Матвеев С. В., Фоминых Е. А.* Сложность трехмерных многообразий: точные значения и оценки // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 341–364.

12. *Thurston W.* Three dimensional geometry and topology. Princeton: Princeton Univ. Press, 1997. (Princeton Math. Ser.; V. 35).

13. *Petronio C., Vesnin A.* Two-sided asymptotic bounds for the complexity of cyclic branched coverings of two-bridge links // Osaka J. Math. 2009. V. 46, N 4. P. 1077–1095.

14. *Matveev S., Petronio C., Vesnin A.* Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds // J. Austral. Math. Soc. 2009. V. 86, N 2. P. 205–219.
15. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
16. *Paoluzzi L., Zimmermann B.* On a class of hyperbolic 3-manifolds and groups with one defining relation // Geom. Dedicata. 1996. V. 60. P. 113–123.
17. *Ushijima A.* The canonical decompositions of some family of compact orientable hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary // Geom. Dedicata. 1999. V. 78. P. 21–47.
18. *Винберг Э. Б.* Объемы неевклидовых многогранников // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 2. С. 17–46.
19. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.

Статья поступила 4 мая 2012 г.

Веснин Андрей Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Омский гос. технический университет,
пр. Мира, 11, Омск 644050
vesnin@math.nsc.ru

Фоминых Евгений Анатольевич
Челябинский гос. университет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
fominykh@csu.ru