

О РАЗРУШЕНИИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО  
ДИССИПАТИВНОГО УРАВНЕНИЯ  
ТИПА КИРХГОФФА С ИСТОЧНИКОМ  
И С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

М. О. Корпусов

**Аннотация.** Рассмотрена начально-краевая задача для волнового обобщенного диссипативного уравнения типа Кирхгоффа с источником. Доказано, что при достаточной большой положительной энергии имеет место разрушение за конечное время. Для доказательства разрушения использован модифицированный метод Х. А. Левина.

**Ключевые слова:** разрушение за конечное время, обобщенные уравнения Клейна — Гордона, нелинейное гиперболическое уравнение, нелинейная смешанная краевая задача, теория поля.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_{tt} + \mu u_t - \phi(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u = f(x, u), \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad \mu \geq 0. \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) рассматривается в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с гладкой границей  $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{4,\delta}$  при  $\delta \in (0, 1]$ .

Дадим обзор результатов по исследованию задач вида (1.1), (1.2). Прежде всего отметим работу [1], где исследовались обобщенная разрешимость и единственность для волнового неоднородного уравнения типа Кирхгоффа следующего вида:

$$u_{tt} + (-1)^m a \left( \int_{\Omega} |\nabla^m u|^2 dx \right) \Delta^m u = f.$$

Кроме того, отметим работу [2], в которой рассматривался вопрос о разрушении за конечное время и глобальной во времени разрешимости для следующей задачи:

$$u_{tt} - \|\nabla u\|_2^{2\gamma} \Delta u - \Delta u_t = |u|^{\alpha} u, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для этой задачи получен результат о разрушении за конечное время для отрицательной начальной энергии и о глобальной разрешимости для достаточно

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-12018-офи-м-2011).

малой положительной энергии. Отметим также очень близкую к нашей задаче проблему, рассмотренную в работе [3], в которой исследовалась следующая задача:

$$u_{tt} - \phi(x) \|\nabla u\|_2^2 \Delta u + \delta u_t = |u|^\alpha u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad \delta > 0,$$

$$u(0) = u_0(x), \quad u'(0) = u_1(x).$$

В этой работе доказаны разрушение за конечное время для отрицательных начальных энергий и глобальная разрешимость для малых положительных энергий. Отметим также работу [4].

Нашей целью является получение достаточных условий разрушения решений задачи (1.1), (1.2) при условии достаточно большой положительной энергии.

Заметим, что для нелинейных гиперболических уравнений и систем уравнений требование отрицательности начальной энергии уже ослаблено требованием положительности энергии. Отметим работу [5], в которой, как и в других работах по разрушению для гиперболических уравнений и систем уравнений, энергия положительна, но вместе с этим условием требуются два других основных условия на начальные функции и трудно понять, совместны они или нет. Более того, в указанной литературе такая работа не замечена. Наконец, при любом фиксированном  $u_0$  и при достаточно большом  $u_1$  эти условия несовместны. При этом используется классический «concavity» метод Х. А. Левина. В данной работе использован модифицированный метод Х. А. Левина, развитый в работе [6]. В результате вместо трех непроверяемых условий получается всего два условия, легко проверяемых на совместность.

Существуют три основных метода исследования явления разрушения. Первый — энергетический метод, развитый в [7–14]. Второй — метод нелинейной емкости [15, 16, 4] и, наконец, третий — метод автомоделных режимов, основанный на различных признаках сравнения и развитый в [17, 18].

## § 2. Основное дифференциальное неравенство

Рассмотрим основное для нас следующее дифференциальное неравенство:

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \gamma \Phi' \Phi + \beta \Phi \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad (2.1)$$

где  $\Phi(t) \in C^{(2)}([0, T])$ ,  $\Phi(t) \geq 0$ ,  $\Phi(0) > 0$ . Разделим обе части неравенства (2.1) на  $\Phi^{1+\alpha}$ , тогда после некоторых преобразований получим неравенство

$$\left( \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} \right)' + \gamma \frac{\Phi'}{\Phi^\alpha} + \beta \Phi^{-\alpha} \geq 0,$$

из которого, в свою очередь, следует, что

$$\frac{1}{1-\alpha} (\Phi^{1-\alpha})'' + \frac{\gamma}{1-\alpha} (\Phi^{1-\alpha})' + \beta \Phi^{-\alpha} \geq 0. \quad (2.2)$$

Введем обозначение

$$Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t), \quad (2.3)$$

с учетом которого из (2.2) получим, что

$$Z'' + \gamma Z' - \beta(\alpha - 1)Z^{\alpha_1} \leq 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (2.4)$$

Введем новое обозначение

$$Y(t) = e^{\gamma t} Z(t), \quad (2.5)$$

в силу которого из (2.4) вытекает, что

$$Y'' - \gamma Y' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1}. \quad (2.6)$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$Y' = (\Phi^{1-\alpha} e^{\gamma t})' = \Phi^{-\alpha} (\alpha - 1) e^{\gamma t} \left[ -\Phi'(t) + \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t) \right]. \quad (2.7)$$

Потребуем выполнения начального условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0). \quad (2.8)$$

Тогда найдется  $t_0 > 0$  такое, что

$$\Phi'(t) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t) \quad \text{при } t \in [0, t_0).$$

Следовательно, из неравенства (2.9) и выражения (2.7) получим, что

$$Y'(t) < 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0).$$

Поскольку  $-\gamma Y'(t) \geq 0$  при  $t \in [0, t_0)$ , из (2.6) следует

$$Y'' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} \leq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1} \quad \text{при } t \in [0, t_0). \quad (2.10)$$

Умножив обе части неравенства (2.10) на  $Y'$ , получим

$$Y'Y'' - \beta(\alpha - 1)e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y' \geq 0, \quad \delta = \frac{\gamma}{\alpha - 1} \quad \text{при } t \in [0, t_0). \quad (2.11)$$

Имеет место следующее равенство:

$$e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y' = \frac{d}{dt} [e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}] + \delta e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1} - \alpha_1 e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y',$$

из которого вытекает, что

$$e^{-\delta t} Y^{\alpha_1} Y' = \frac{1}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt} [e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}] + \frac{1}{1 + \alpha_1} \delta e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}. \quad (2.12)$$

Подставим выражение (2.12) в (2.11):

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt} [e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}] - \frac{\beta(\alpha - 1)\delta}{1 + \alpha_1} e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1} \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0),$$

откуда

$$Y'Y'' - \frac{\beta(\alpha - 1)}{1 + \alpha_1} \frac{d}{dt} [e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1}] \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0). \quad (2.13)$$

Интегрируя последнее неравенство, имеем

$$(Y')^2 \geq A^2 + \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} e^{-\delta t} Y^{1+\alpha_1} \geq A^2, \quad (2.14)$$

где

$$A^2 \equiv (Y'(0))^2 - \frac{2\beta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 1} Y^{1+\alpha_1}(0). \quad (2.15)$$

Потребуем выполнения условия  $A^2 > 0$ . После ряда преобразований оно примет вид

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[ \left( \Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right] > 0. \quad (2.16)$$

Значит, условие  $A^2 > 0$  эквивалентно условию

$$\left( \Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0). \quad (2.17)$$

Стало быть, из неравенств (2.14) и (2.16) приходим к выводу, что

$$Y'(t) \leq -A < 0 \Rightarrow \Phi'(t_0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(t_0).$$

Но тогда  $Y'(t_0) < 0$ . Следовательно, используя алгоритм продолжения во времени, получим, что

$$Y'(t) < 0 \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Значит,

$$\begin{aligned} |Y'| \geq A > 0 &\Rightarrow Y'(t) \leq -A \Rightarrow Y(t) \leq Y(0) - At \\ &\Rightarrow \Phi^{1-\alpha}(t) \leq e^{-\gamma t} [\Phi^{1-\alpha}(0) - At] \Rightarrow \Phi(t) \geq \frac{e^{\gamma t/(\alpha-1)}}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{1/(\alpha-1)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, пришли к следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi(t) \in C^{(2)}([0, T])$  и выполнены условия

$$\Phi'(0) > \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0), \quad (2.18)$$

$$\left( \Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0), \quad (2.19)$$

причем  $\Phi(t) \geq 0$ ,  $\Phi(0) > 0$ . Тогда время  $T > 0$  не может быть сколь угодно большим, а именно выполнено неравенство

$$T \leq T_\infty \leq \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1},$$

$$A^2 \equiv (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[ \left( \Phi'(0) - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right],$$

причем  $\limsup_{t \uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty$ .

### § 3. Локальная разрешимость

Прежде всего укажем условия, которым удовлетворяют функции  $\phi(s)$  и  $f(x, s)$ .

**Условия на функцию  $\phi(s)$ :**

(i)<sub>1</sub>  $\phi(s) \in C^{(1)}([0, +\infty))$ ;

(ii)<sub>1</sub> для всех  $s \in \mathbb{R}_+^1$  выполнены следующие условия роста:

$$c_1 \leq \phi(s) \leq c_1 + c_2 s^{q_1}, \quad |s\phi'(s)| \leq c_2 s^{q_1} \quad \text{при } q_1 \geq 1; \quad (3.1)$$

(iii)<sub>1</sub> для всех  $s \in \mathbb{R}_+^1$  выполнено неравенство

$$\phi(s)s \leq \frac{\theta_1}{2} \int_0^s d\sigma \phi(\sigma) \quad \text{при } \theta_1 > 0; \quad (3.2)$$

(iv)<sub>1</sub> функция  $\phi(s)$  является ограниченно липшиц-непрерывной:

$$|\phi(s_1) - \phi(s_2)| \leq \mu_1(R_1)|s_1 - s_2|, \quad R_1 = \max \{s_1^{q_1-1}, s_2^{q_1-1}\}, \quad (3.3)$$

где  $\mu_1(\cdot)$  — неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах.

**Условия на функцию  $f(x, s)$ :**

(i)<sub>2</sub>  $f(x, s) : \Omega \otimes \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  является каратеодориевой функцией и для почти всех  $x \in \partial\Omega$  имеем  $f(x, 0) = 0$ ;

(ii)<sub>2</sub> имеют место оценки сверху для почти всех  $x \in \Omega$ :

$$|f(x, s)| \leq c_3 + c_4|s|^{q_2+1}, \quad |f'_s(x, s)| \leq c_4|s|^{q_2} \quad \text{при } q_2 > 0, \quad (3.4)$$

и неравенство

$$\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f(x, s)}{\partial x_i} \right| \leq c_3 + c_4|s|^{q_2+1}; \quad (3.5)$$

(iii)<sub>2</sub> для любых  $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$  имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} f(x, v(x))v(x) \geq \theta_2 \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, v(x)) dx \quad \text{при } \theta_2 > 2, \quad (3.6)$$

где

$$\mathcal{F}(x, s) = \int_0^s d\sigma f(x, \sigma);$$

(iv)<sub>2</sub> имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого  $\mathcal{N}_f(\cdot) = f(x, \cdot)$ , порожденного функцией  $f(x, u)$ :

$$\|\mathcal{N}_f(u_1) - \mathcal{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leq \mu_2(R_2)\|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \quad (3.7)$$

где  $\mu_2(\cdot)$  — неубывающая функция своего аргумента и

$$R_2 = \max \{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\}.$$

Дадим определение слабого обобщенного решения задачи (1.1), (1.2).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Слабым обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию класса

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (3.8)$$

$$u''(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad (3.9)$$

удовлетворяющую равенству

$$\int_0^T dt \langle D(u), v \rangle = 0 \quad \text{для всех } v(x)(t) \in \mathbb{L}^1(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (3.10)$$

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad u'(x)(0) = u_1(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega), \quad (3.11)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скобки двойственности между гильбертовыми пространствами  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  и  $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ ,

$$D(u) \equiv u_{tt} + \mu u_t - \phi(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u - f(x, u).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу условий (3.8) и (3.9) после возможного изменения на множестве из  $[0, T]$  нулевой меры Лебега функция  $u(x)(t)$  принадлежит классу  $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ , поэтому начальные условия (3.11) имеют смысл.

Заметим, что, как и в [6], можно доказать эквивалентность равенства (3.10) следующему равенству:

$$\int_0^T dt \psi(t) \langle D(u), w(x) \rangle = 0 \quad \text{для всех } w(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad \psi(t) \in \mathbb{L}^1(0, T). \quad (3.12)$$

Для доказательства локальной во времени разрешимости задачи (1.1), (1.2), понимаемой в слабом обобщенном смысле, нужно воспользоваться методом Галёркина в сочетании с методом компактности [19]. К сожалению, в силу специфики нелокального слагаемого в уравнении (1.1) мы не можем воспользоваться методом монотонности и поэтому для предельного перехода в галёркинских приближениях должны потребовать большей гладкости от начальных функций. Именно,

$$u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \quad u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Итак, приступим к доказательству локальной разрешимости.

ШАГ 1. ПОСТАНОВКА ГАЛЁРКИНСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. Пусть  $\{w_k\} \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$  — решения задачи на собственные функции и собственные значения для оператора Лапласа в ограниченной области  $\Omega$  с однородным условием Дирихле на границе, который мы выберем ортонормированным в  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ .

Рассмотрим следующую задачу:

$$\langle D(u_m), w_j \rangle = 0 \quad \text{для всех } j = \overline{1, m}, \quad (3.13)$$

где  $D(u_m) \equiv u_{m,tt} + \mu u_{m,t} - \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \Delta u_m - f(x, u_m)$ ,

$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k(x),$$

$$u_{0m} = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) w_k(x) \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega), \quad (3.14)$$

$$u_{1m} = \sum_{k=1}^m c'_{mk}(0) w_k(x) \rightarrow u_1 \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (3.15)$$

ШАГ 2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ. Поскольку функции  $w_j(x)$  удовлетворяют равенству

$$-\frac{\Delta w_j}{\lambda_j} = w_j,$$

где  $\lambda_j$  — собственные значения, из (3.13) сразу получим

$$\langle D(u_m), \Delta w_j \rangle = 0 \quad \text{для всех } j = \overline{1, m}. \quad (3.16)$$

Умножив обе части равенства (3.13) на  $c'_{mj}$  и просуммировав по  $j = \overline{1, m}$ , имеем

$$\langle D(u_m), \Delta u'_m \rangle = 0. \quad (3.17)$$

Интегрируя по частям в (3.17), приходим к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u'_m\|_2^2 + \mu \|\nabla u'_m\|_2^2 + \int_{\Omega} \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \Delta u'_m \Delta u_m dx = \int_{\Omega} f(x, u_m) \Delta u'_m dx. \quad (3.18)$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \Delta u'_m \Delta u_m dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \right] \\ &\quad - \phi'(\|\nabla u_m\|_2^2) \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla u'_m) dx \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\int_{\Omega} f(x, u_m) \Delta u'_m dx = - \int_{\Omega} (\nabla_x f(x, u_m(x)), \nabla u'_m) dx. \quad (3.20)$$

Из равенств (3.18)–(3.20) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \|\nabla u'_m\|_2^2 + \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \right] \\ &\leq |\phi'(\|\nabla u_m\|_2^2)| \|\nabla u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_2 \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} |\nabla_x f(x, u_m(x))| |\nabla u'_m| dx \\ &\leq c_2 \|\nabla u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_2^{2q_1-1} \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} [c_3 + c_4 |u_m|^{q_2+1}] |\nabla u'_m| dx + c_4 \int_{\Omega} |u_m|^{q_2} |\nabla u_m| |\nabla u'_m| dx = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Имеют место следующие оценки:

$$I_1 \leq \frac{c_2^2}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{8} \|\nabla u_m\|_2^{4(2q_1-1)} + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \right)^4, \quad (3.22)$$

$$I_2 \leq \frac{c_3^2}{2} \text{meas}(\Omega) + \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{c_4^2}{2} \int_{\Omega} |u_m|^{2q_2+2} dx, \quad (3.23)$$

$$I_3 \leq c_5 \|\nabla u'_m\|_2 \left( \int_{\Omega} |u_m|^{q_2 r} dx \right)^{1/r} \left( \int_{\Omega} |\nabla u_m|^s dx \right)^{1/s}. \quad (3.24)$$

При этом требуем, чтобы

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \quad 1 < r < \frac{N}{q_2}, \quad s = \frac{Nq_2 r}{N - q_2 r}. \quad (3.25)$$

Тогда

$$\frac{N - q_2 r}{N q_2 r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{q_2 + 1}{q_2} \frac{2N}{N + 2} \Rightarrow s = \frac{2N(q_2 + 1)}{N - 2q_2}.$$

В силу (3.25) имеем

$$q_2 < \min \left\{ \frac{N}{2}, \frac{2N}{N - 2} \right\} \text{ при } N > 2.$$

Стало быть, при условиях (3.25) справедливо вложение  $\mathbb{W}_0^{1,s}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q_2 r}(\Omega)$ . Тем самым из (3.24) вытекает неравенство

$$I_3 \leq \bar{c}_5 \|\nabla u'_m\|_2 \|\nabla u_m\|_s^{1+q_2}. \quad (3.26)$$

При условии  $s \leq 2^*$ , которое, очевидно, выполнено при

$$s = \frac{2N(q_2 + 1)}{N - 2q_2},$$

имеет место непрерывное вложение  $\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,s}(\Omega)$ , поэтому из (3.26) приходим к следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \hat{c}_5 \|\nabla u'_m\|_2 (\|\Delta u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2)^{(1+q_2)/2} \\ &\leq \frac{\hat{c}_5^2}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{2} (\|\Delta u_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2)^{1+q_2} \\ &\leq \frac{\hat{c}_5^2}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + c(q_2) \|\Delta u_m\|_2^{2(1+q_2)} + c(q_2) \|\nabla u_m\|_2^{2(1+q_2)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Тем самым из (3.21) с учетом (3.22), (3.23) и (3.27) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \|\nabla u'_m\|_2^2 + \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \right] \\ &\leq \frac{\hat{c}_5^2}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{1}{8} \|\nabla u_m\|_2^{4(2q_1-1)} + \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\Delta u_m|^2 dx \right)^4 \\ &\quad + \frac{c_3^2}{2} \text{meas}(\Omega) + \|\nabla u'_m\|_2^2 + \frac{c_4^2}{2} \int_{\Omega} |u_m|^{2q_2+2} dx \\ &\quad + \frac{\hat{c}_5^2}{2} \|\nabla u'_m\|_2^2 + c(q_2) \|\Delta u_m\|_2^{2(1+q_2)} + c(q_2) \|\nabla u_m\|_2^{2(1+q_2)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Потребуем непрерывное вложение  $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^q(\Omega)$  при  $q = 2q_2 + 2$ , которое выполнено при условии

$$q_2 \leq 2, \quad (3.29)$$

поскольку  $N = 3$ . При выполнении условий (3.29) имеет место неравенство

$$\frac{c_4^2}{2} \int_{\Omega} |u_m|^{2q_2+2} dx \leq c_6 \|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2}. \quad (3.30)$$

Положим

$$g_m(t) = \|\nabla u'_m\|_2^2 + c_1 \|\Delta u_m\|_2^2.$$



Проинтегрировав по времени обе части неравенства (3.21), с учетом (3.1) получим неравенство

$$g_m(t) \leq d_1 + c_7 t + c_8 \int_0^t [g_m(s) + g_m^4(s) + g_m^{q_1+2}(s)] ds + c_9 \int_0^t [\|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2} + \|\nabla u_m\|_2^{4(2q_1-1)}] ds, \quad (3.31)$$

где

$$\|\nabla u_{1m}\|_2^2 + \phi(\|\nabla u_{0m}\|_2^2) \int_{\Omega} |\Delta u_{0m}|^2 dx \leq d_1.$$

Наша задача — получить априорную оценку для последнего слагаемого в неравенстве (3.31). С этой целью умножим обе части равенства (3.13) на  $c'_{mj}$ , просуммируем по  $j = \overline{1, m}$  и получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \|u'_m\|_2^2 + \int_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s) ds \right] + \mu \|u'_m\|_2^2 = \int_{\Omega} f(x, u_m) u'_m dx. \quad (3.32)$$

Из (3.32) интегрированием по времени ввиду (3.1) следует неравенство

$$\|u'_m\|_2^2 + c_1 \|\nabla u_m\|_2^2 \leq \overline{E}_m(0) + 2 \int_0^t ds \int_{\Omega} f(x, u_m) u'_m dx, \quad (3.33)$$

где

$$\overline{E}_m(0) = \|u_{1m}\|_2^2 + \int_0^{\|\nabla u_{0m}\|_2^2} \phi(s) ds.$$

В силу предельных свойств (3.14) и (3.15)

$$\overline{E}_m(0) \leq d < +\infty. \quad (3.34)$$

При условии вложения  $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{2q_2+2}(\Omega)$  имеет место следующее неравенство:

$$\left| \int_{\Omega} f(x, u_m) u'_m dx \right| \leq \frac{c_3^2}{2} + \int_{\Omega} |u'_m|^2 dx + c_9 \|\nabla u_m\|_2^{2q_2+2}. \quad (3.35)$$

Введем обозначение  $h_m \equiv \|u'_m\|_2^2 + c_1 \|\nabla u_m\|_2^2$ . Тогда из (3.33)–(3.35)

$$h_m(t) \leq d + c_{10} t + c_{11} \int_0^t ds [h_m(s) + h_m^{q_2+1}(s)] ds. \quad (3.36)$$

Воспользовавшись арифметическим неравенством Гёльдера, имеем

$$h_m \leq \frac{1}{q_2+1} h_m^{q_2+1} + \frac{q_2+1}{q_2+2}.$$

С учетом этого неравенства из (3.36) приходим к неравенству

$$h_m(t) \leq d + c_{12} t + c_{13} \int_0^t ds h_m^{q_2+1}(s) \leq d + c_{12} T + c_{13} \int_0^t ds h_m^{q_2+1}(s) ds. \quad (3.37)$$

Привлекая теорему Гронуолла — Беллмана — Бихари [20], выводим, что

$$h_m(t) \leq \frac{d + c_{12}T}{[1 - q_2(d + c_{12}T)^{q_2} c_{13}t]^{1/q_2}}. \quad (3.38)$$

Таким образом, из (3.38) следует априорная оценка

$$\|u'_m\|_2^2 + \|\nabla u_m\|_2^2 \leq c_{14}(T) < +\infty \quad (3.39)$$

при условии, что

$$q_2(d + c_{12}T)^{q_2} c_{13}T < 1.$$

Вернемся к неравенству (3.31). Рассуждая, как при выводе неравенства (3.37), с учетом априорной оценки (3.39) получим вторую априорную оценку

$$\|\nabla u'_m\|_2^2 + c_1 \|\Delta u_m\|_2^2 \leq c_{15}(T) < +\infty \quad (3.40)$$

при достаточно малом  $T > 0$ . Из априорных оценок (3.39) и (3.40) вытекает, что последовательность  $\{u_m\}$  удовлетворяет следующим свойствам:

$$\{u_m\} \text{ равномерно по } m \text{ ограничена в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)); \quad (3.41)$$

$$\{u'_m\} \text{ равномерно по } m \text{ ограничена в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)). \quad (3.42)$$

Получим априорную оценку для последовательности  $\{u''_m\}$ . С этой целью воспользуемся техникой из [21]. Пусть  $V_m = \{w_1, \dots, w_m\}$  — линейная оболочка системы функций  $\{w_k\}$  при  $k = \overline{1, m}$ . Введем проектирующий оператор:

$$\mathbb{P}_m : \mathbb{L}^2(\Omega) \rightarrow V_m \subset \mathbb{L}^2(\Omega), \quad \mathbb{P}_m z = \sum_{k=1}^m (z, w_k) w_k, \quad z(x) \in \mathbb{L}^2(\Omega),$$

где

$$(z, w_k) = \int_{\Omega} z(x) w_k(x) dx.$$

С учетом оператора  $\mathbb{P}_m$  систему галёркинских приближений (3.11) можно переписать в виде

$$\langle u''_m + \mu u'_m + \mathbb{A}(u_m) + \mathbb{B}(u_m), \mathbb{P}_m z \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (3.43)$$

где  $\mathbb{A}(v) = -\phi(\|\nabla v\|_2^2) \Delta v$ ,  $\mathbb{B}(v) = -\mathcal{N}_f(v)$ , а  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скобки двойственности между гильбертовыми пространствами  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  и  $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ . Из (3.43) получим

$$\mathbb{P}_m^*(u''_m + \mu u'_m + \mathbb{A}(u_m) + \mathbb{B}(u_m)) = 0. \quad (3.44)$$

Поскольку  $u''_m = \sum_{k=1}^m c''_{mk} w_k$  и  $\mathbb{P}_m^* w_k = \mathbb{P}_m w_k = w_k$ , имеем

$$u''_m = -\mu u'_m - \mathbb{P}_m^*(\mathbb{A}(u_m) + \mathbb{B}(u_m)). \quad (3.45)$$

Заметим, что  $\mathbb{P}_m \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^1(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega))$  и  $\mathbb{P}_m^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^{-1}(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ . Кроме того, имеют место следующие цепочки непрерывных и плотных вложений:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

поэтому  $\mathbb{P}_m^* \in \mathcal{L}(\mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega), \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$ . Тем самым верны следующие априорные оценки:

$$\|\mathbb{P}_m^* \mathbb{A}(u_m)\|_{-1} \leq c_{15} \|\mathbb{A}(u_m)\|_{-1} \leq c_{16} \|\nabla u_m\|_2 + c_{17} \|\nabla u_m\|_2^{2+q_1} \leq c_{18} < +\infty, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_m^* \mathbb{B}(u_m)\|_{-1} &\leq c_{19} \|\mathbb{B}(u_m)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \\ &\leq c_{20} + c_{21} \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+1} \leq c_{22}(T) < +\infty. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Из (3.45)–(3.47) приходим к априорной оценке

$$\|u_m''\|_{-1} \leq c_{23}(T) < +\infty. \quad (3.48)$$

**ШАГ 3. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЛЁРКИНА.** Перепишем систему уравнений Галёркина (3.13) в эквивалентном виде:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{kj} [c_{mk}'' + \mu c_{mk}'] = f_{1j}(c_m) + f_{2j}(c_m), \quad c_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^t, \quad (3.49)$$

где

$$f_{1j}(c_m) = -\phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \int_{\Omega} (\nabla u_m, \nabla w_j), \quad f_{2j}(c_m) = \int_{\Omega} f(x, u_m) w_j.$$

В силу выбора  $\{w_k\}$  имеем  $\alpha_{kj} = \delta_{kj}$ . Ввиду свойств (3.3) и (3.7) нетрудно доказать ограниченную липшиц-непрерывность функций  $f_{1j}(c_m)$  и  $f_{2j}(c_m)$ . Тем самым по теореме Коши приходим к выводу о существовании единственного решения системы уравнений (3.13) в классе  $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_m])$  при некотором  $T_m > 0$ . Из априорных оценок (3.41) и (3.42) следует, что  $T_m = T > 0$ , т. е. время существования решения системы уравнений Галёркина не зависит от  $m \in \mathbb{N}$ .

**ШАГ 4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД.** Из априорных оценок (3.41), (3.42) и (3.48) вытекает существование такой подпоследовательности  $\{u_m\}$ , что имеют место следующие предельные свойства:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad (3.50)$$

$$u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (3.51)$$

$$u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)). \quad (3.52)$$

Кроме того, в силу (3.41) и (3.42) последовательность  $\{u_m\}$  равномерно по  $m \in \mathbb{N}$  ограничена в пространстве  $\mathbb{H}^1(Q_T)$ , которое, очевидно, компактно вложено в  $\mathbb{L}^2(Q_T)$ . Следовательно, существует такая подпоследовательность  $\{u_m\}$ , что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(Q_T) \text{ для почти всех } (t, x) \in Q_T, \quad (3.53)$$

где  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ .

**Лемма 3.1.** Для некоторой подпоследовательности  $\{u_m\}$  равномерно по  $t \in [0, T]$  имеет место сходимость

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (3.54)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Воспользуемся техникой из [22]. По доказанному  $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$ ,  $u' \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$  и  $u_m \rightarrow u$  для почти всех  $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ . Поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|\nabla u(t_1) - \nabla u(t_2)\|_2 \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u'\|_2 dt \leq \left( \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u'\|_2^2 dt \right)^{1/2} |t_1 - t_2| \leq c(T) |t_1 - t_2|. \quad (3.55)$$

Значит, функция  $u(t)$  равномерно непрерывна на  $[0, T]$  со значениями в  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ .

Заметим, что для последовательности  $u_m$  имеем

$$\|\Delta u_m\|_2(t) + \|\nabla u_m\|_2(t) \leq c(T) < +\infty.$$

В силу того, что  $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$  компактно вложено в  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  для каждого  $t \in [0, T]$ , найдется такая подпоследовательность, что

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

причем выбор этой подпоследовательности зависит от  $t \in [0, T]$ . Используя диагональный процесс Кантора, получим некоторую подпоследовательность  $\{u_m\}$ , сходящуюся равномерно к  $u$  на некотором счетном всюду плотном в  $[0, T]$  множестве  $E$ :

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{ для всех } t \in E. \quad (3.56)$$

Поскольку  $E$  всюду плотно в  $[0, T]$ , в силу равномерной непрерывности функции  $u(t)$  на  $E$  ее можно по непрерывности продолжить на весь сегмент  $[0, T]$ . Ввиду того, что  $u_m \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$ ,  $u'_m \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ , как и для  $u$ , можно доказать равномерную непрерывность функции  $u_m$  на  $[0, T]$ . Докажем, что  $u_m(t) \rightarrow u(t)$  сильно в  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  равномерно по  $t \in [0, T]$ . Действительно, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|\nabla u_m(t) - \nabla u(t)\|_2 &\leq \|\nabla u_m(t) - \nabla u_m(t^*)\|_2 \\ &\quad + \|\nabla u_m(t^*) - \nabla u(t^*)\|_2 + \|\nabla u(t^*) - \nabla u(t)\|_2, \end{aligned} \quad (3.57)$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $t^* \in E$ . Рассмотрим каждое слагаемое в правой части неравенства (3.57). Действительно, для любых  $t \in [0, T]$  и  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $t^* \in E$  и достаточно большое  $m \in \mathbb{N}$ , что для некоторой подпоследовательности  $\{u_m\}$  имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|\nabla u_m(t) - \nabla u_m(t^*)\|_2 &\leq \int_{t^*}^t \|\nabla u'_m\|_2 ds \\ &\leq \left( \int_{t^*}^t \|\nabla u'_m\|_2^2 ds \right)^{1/2} |t - t^*| \leq c(T)|t - t^*| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u(t) - \nabla u(t^*)\|_2 &\leq \int_{t^*}^t \|\nabla u'\|_2 ds \\ &\leq \left( \int_{t^*}^t \|\nabla u'\|_2^2 ds \right)^{1/2} |t - t^*| \leq c(T)|t - t^*| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\|\nabla u_m(t^*) - \nabla u(t^*)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.60)$$

при достаточно большом  $m \in \mathbb{N}$  в силу (3.56). Из неравенств (3.58)–(3.60) вытекает, что при любом  $\varepsilon > 0$  для некоторой подпоследовательности  $\{u_m\}$  имеет место следующее неравенство:

$$\|\nabla u_m(t) - \nabla u(t)\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{равномерно по } t \in [0, T].$$

Лемма доказана.  $\square$

Заметим, что поскольку  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  вложено непрерывно в  $\mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ , в силу леммы 1 имеем, что равномерно по  $t \in [0, T]$

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega).$$

Но тогда в силу условия роста (3.4) и теоремы М. А. Красносельского [23] для операторов Немыцкого приходим к выводу о том, что

$$f(x, u_m) \rightarrow f(x, u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \quad (3.61)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ .

Таким образом, можно перейти к пределу при  $m \rightarrow +\infty$  для некоторой подпоследовательности  $\{u_m\}$  и получить, что предельная функция  $u(x)(t)$  удовлетворяет равенству (3.12), которое эквивалентно равенству (3.10). Воспользовавшись стандартным алгоритмом продолжения решения во времени, можно показать, что справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть  $u_0(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$ ,  $u_1(x) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$  и, кроме того, выполнены неравенства

$$0 < q_2 < \min \left\{ \frac{N}{2}, \frac{2}{N-2} \right\} \quad \text{при } N > 2.$$

Тогда существует слабое обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) в классе

$$\begin{aligned} u(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ u''(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \quad T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0, \end{aligned}$$

причем  $T \in (0, T_0)$  и либо  $T_0 = +\infty$ , либо  $T_0 < +\infty$ , и в последнем случае имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} [\|\nabla u'\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2] = +\infty.$$

#### § 4. Разрушение решений

Для получения достаточных условий воспользуемся системой галёркинских уравнений (3.13), поскольку галёркинские приближения обладают нужной гладкостью. Действительно,  $u_m(x)(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega))$ . С этой целью умножим обе части равенства (3.13) на  $c_{mj}$  и просуммируем по  $j = \overline{1, m}$ . В результате получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2} \frac{d \Phi_m}{dt} - J_m + \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx = \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m dx, \quad (4.1)$$

где

$$\Phi_m(t) \equiv \int_{\Omega} |u_m|^2 dx, \quad J_m(t) \equiv \int_{\Omega} |u'_m|^2 dx.$$

Умножим обе части равенства (3.13) на  $c'_{mj}$  и просуммируем по  $j = \overline{1, m}$ . После интегрирования по частям приходим ко второму энергетическому равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ J_m(t) + \int_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s) ds \right] + \mu J_m = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx. \quad (4.2)$$

Интегрируя по времени в этом равенстве, получим

$$\frac{1}{2}J_m(t) + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s) ds - E_m(0) \leq \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx, \quad (4.3)$$

где

$$E_m(0) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{1m}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_{0m}\|_2^2} \phi(s) ds - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx. \quad (4.4)$$

В силу (3.6) из неравенства (4.3) вытекает, что

$$\frac{\theta_2}{2}J_m(t) + \frac{\theta_2}{2} \int_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s) ds - \theta_2 E_m(0) \leq \int_{\Omega} f(x, u_m)u_m dx. \quad (4.5)$$

Теперь из (4.1) и (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2} \frac{d\Phi_m}{dt} - J_m + \int_{\Omega} \phi(\|\nabla u_m\|_2^2) |\nabla u_m|^2 dx \\ \geq \frac{\theta_2}{2}J_m(t) + \frac{\theta_2}{2} \int_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s) ds - \theta_2 E_m(0). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Воспользовавшись неравенством (3.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2} \frac{d\Phi_m}{dt} - J_m + \frac{\theta_1}{2} \int_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s) ds \\ \geq \frac{\theta_2}{2}J_m(t) + \frac{\theta_2}{2} \int_0^{\|\nabla u_m\|_2^2} \phi(s) ds - \theta_2 E_m(0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Потребуем выполнения условия  $\theta_2 \geq \theta_1$ , тогда из неравенства (4.7) вытекает следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\Phi_m}{dt^2} + \frac{\mu}{2} \frac{d\Phi_m}{dt} + \theta_2 E_m(0) \geq \left(1 + \frac{\theta_2}{2}\right) J_m. \quad (4.8)$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, можно доказать, что

$$(\Phi'_m)^2 \leq 4J_m\Phi_m. \quad (4.9)$$

Из (4.8) и (4.9) приходим к искомому дифференциальному неравенству

$$\Phi_m\Phi_m'' - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta_2}{2}\right) (\Phi'_m)^2 + \mu\Phi_m\Phi'_m + 2\theta_2 E_m(0)\Phi_m \geq 0. \quad (4.10)$$

Сравнивая (4.10) с дифференциальным неравенством (2.1), получим, что

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\theta_2}{2}\right) > 1 \quad \text{при } \theta_2 > 2, \quad \beta = 2\theta_2 E_m(0),$$

$$\gamma = \mu, \quad \frac{2\beta}{2\alpha - 1} = 8E_m(0), \quad \frac{\gamma}{\alpha - 1} = \frac{4\mu}{\theta_2 - 2}.$$

Потребуем выполнения условий теоремы 1:

$$\Phi'_m(0) > \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi_m(0) > 0, \quad (4.11)$$

$$\left( \Phi'_m(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi_m(0) \right)^2 > 8E_m(0) \Phi_m(0), \quad (4.12)$$

$$E_m(0) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{1m}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_{0m}\|_2^2} \phi(s) ds - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx > 0. \quad (4.13)$$

При выполнении условий (4.11)–(4.13) время  $T > 0$  существования галёркинских приближений  $u_m(x)(t)$  ограничено сверху:

$$T \leq \Phi_m^{(2-\theta_2)/4}(0) A_m^{-1},$$

$$A_m^2 \equiv \left( \frac{\theta_2 - 2}{4} \right)^2 \Phi_m^{-1-\theta_2/2}(0) \left[ \left( \Phi'_m(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi_m(0) \right)^2 - 8E_m(0) \Phi_m(0) \right],$$

причем

$$\Phi_m(t) \geq \frac{e^{4\mu t/(\theta_2-2)}}{[\Phi_m^{(2-\theta_2)/4}(0) - A_m t]^{4/(\theta_2-2)}}, \quad (4.14)$$

где

$$\Phi'_m(0) = 2 \int_{\Omega} u_{1m}(x) u_{0m}(x) dx, \quad \Phi_m(0) = \int_{\Omega} |u_{0m}|^2 dx.$$

В силу предельных свойств (3.14) и (3.15) и условий (i)<sub>1</sub>, (ii)<sub>1</sub>, (i)<sub>2</sub>, (ii)<sub>2</sub>, а также теоремы М. А. Красносельского для операторов Немыцкого [23] получим следующие предельные свойства:

$$E_m(0) \rightarrow E(0) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx, \quad (4.15)$$

$$A_m^2 \rightarrow A^2 \equiv \left( \frac{\theta_2 - 2}{4} \right)^2 \Phi^{-1-\theta_2/2}(0) \left[ \left( \Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi(0) \right)^2 - 8E(0) \Phi(0) \right],$$

$$\Phi'_m(0) \rightarrow \Phi'(0) = 2 \int_{\Omega} u_1(x) u_0(x) dx, \quad \Phi_m(0) \rightarrow \Phi(0) = \int_{\Omega} |u_0|^2 dx.$$

Наконец, ввиду леммы 1 приходим к выводу о том, что равномерно по  $t \in [0, T]$  имеет место следующее предельное свойство:

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t) \equiv \int_{\Omega} |u|^2 dx. \quad (4.16)$$

Теперь точно так же, как и в [24], можно перейти к пределу при  $m \rightarrow +\infty$  в неравенстве (4.14) и получить следующее неравенство:

$$\Phi(t) \geq \frac{e^{4\mu t/(\theta_2-2)}}{[\Phi^{(2-\theta_2)/4}(0) - At]^{4/(\theta_2-2)}}. \quad (4.17)$$

Таким образом, мы пришли к основной теореме настоящей работы.

**Теорема 3.** Пусть выполнены все условия теоремы 2, а также условие (iii)<sub>2</sub>. Тогда при выполнении основных условий

$$\Phi'(0) > \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi(0) + (8E(0)\Phi(0))^{1/2} > 0, \quad E(0) > 0, \quad (4.18)$$

$$\theta_2 \geq \theta_1 \quad (4.19)$$

для времени существования решения  $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$  выполнена оценка сверху

$$T_0 \leq \Phi^{(2-\theta_2)/4}(0)A^{-1},$$

т. е. имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} [\|\nabla u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + \|u'\|_2^2] = +\infty,$$

где

$$\Phi(0) = \int_{\Omega} |u_0|^2 dx, \quad \Phi'(0) = 2 \int_{\Omega} u_1 u_0 dx,$$

$$E(0) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx,$$

$$A^2 \equiv \left(\frac{\theta_2 - 2}{4}\right)^2 \Phi^{-1-\theta_2/2}(0) \left[ \left(\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi(0)\right)^2 - 8E(0)\Phi(0) \right].$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Проверим совместность всех условий (4.18) при достаточно малых  $\mu \geq 0$ . Действительно, сначала выберем  $u_0 \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega)$  настолько «большим», что выполнено следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx > \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds + \frac{2}{\theta_2 - 2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx. \quad (4.20)$$

Фиксируем такое  $u_0$  и выберем

$$u_1 = \lambda u_0 \quad \text{при } \lambda > \frac{2\mu}{\theta_2 - 2}.$$

В этом случае имеет место неравенство

$$\Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi(0) = 2 \left( \lambda - \frac{2\mu}{\theta_2 - 2} \right) \Phi(0) > 0. \quad (4.21)$$

Наконец, выберем  $\lambda > 2\mu/(\theta_2 - 2)$  настолько «большим», что

$$E(0) \equiv \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx > 0.$$

При выполнении условия (4.21) неравенство (4.18) эквивалентно такому:

$$\left( \Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi(0) \right)^2 > 8E(0)\Phi(0). \quad (4.22)$$



Подставив в (4.22) нашу замену, получим для его левой и правой частей следующие равенства:

$$\begin{aligned} \left( \Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi(0) \right)^2 &= 4 \left( \lambda - \frac{2\mu}{\theta_2 - 2} \right)^2 \Phi^2(0) \\ &= \left( 4\lambda^2 - \frac{16\mu\lambda}{\theta_2 - 2} + \frac{16\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2} \right) \Phi^2(0), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$8E(0)\Phi(0) = 4\lambda^2\Phi^2(0) + 8\Phi(0) \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx \right]. \quad (4.24)$$

Из (4.22) с учетом выражений (4.23) и (4.24) получим

$$\begin{aligned} \left( \Phi'(0) - \frac{4\mu}{\theta_2 - 2} \Phi(0) \right)^2 &= \left( 4\lambda^2 - \frac{16\mu\lambda}{\theta_2 - 2} + \frac{16\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2} \right) \Phi^2(0) \\ &> 8E(0)\Phi(0) = 4\lambda^2\Phi^2(0) + 8\Phi(0) \left[ \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

откуда легко приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx + \frac{2\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx > \frac{2\mu\lambda}{\theta_2 - 2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds. \quad (4.26)$$

Выберем  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  при  $\mu \in (0, (\frac{\theta_2 - 2}{2})^{1/2})$ , а в случае  $\mu = 0$  параметр  $\lambda > 0$  достаточно велик. С учетом явного выбора параметра  $\lambda$  видим, что предыдущие условия выполнены при достаточно малом  $\mu \geq 0$ . Подставив это явное выражение для  $\lambda$  в (4.26), получим неравенство

$$\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx + \frac{2\mu^2}{(\theta_2 - 2)^2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx > \frac{2}{\theta_2 - 2} \int_{\Omega} |u_0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds.$$

которое, очевидно, выполнено в силу (4.20). Таким образом, задача свелась к проверке выполнимости условия (4.20) при некоторых функциях  $\phi(s)$  и  $f(x, s)$ . Заодно проверим выполнимость условий (4.19). Возьмем  $\phi(s) = 1 + s$ ,  $f(x, s) = |s|^{q_2} s$ , тогда

$$\mathcal{F}(x, s) = \frac{|s|^{q_2+2}}{q_2+2}, \quad \frac{1}{2} \int_0^{\|\nabla u_0\|_2^2} \phi(s) ds = \frac{1}{4} \|\nabla u_0\|_2^4 + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2.$$

Таким образом, при  $q_2 > 2$  условие (4.20) выполнено при достаточно больших  $u_0$ . Кроме того,  $\theta_2 = q_2 + 2 > 4 = \theta_1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Похожаев С. И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 1. С. 152–166.
2. Ono K. On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 2. P. 151–177.

3. Papadopoulos P. G., Stavrakakis N. M. Global existence and blow-up results for an equation of Kirchhoff type on  $R^N$  // *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 2001. V. 17. P. 91–109.
4. Galaktionov V. A., Pohozaev S. I. Blow-up, critical exponents and asymptotic spectra for nonlinear hyperbolic equations. Prepr. Univ. Bath. Math. 2000. N 00/10.
5. Wang Ya. Non-existence of global solutions of a class of coupled non-linear Klein–Gordon equations with non-negative potentials and arbitrary initial energy // *IMA J. Appl. Math.* 2009. V. 74, N 3. P. 392–415.
6. Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. Berlin: De Gruyter, 2011. (De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl.; V. 15).
7. Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations // *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 1972. V. 8. P. 211–229.
8. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. Формирование коллапсов в квазилинейных уравнениях параболического и гиперболического типов // *Зап. ЛОМИ.* 1977. Т. 69. С. 77–102.
9. Levine H. A. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form  $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$  // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1974. P. 1–21.
10. Levine H. A., Pucci P., Serrin J. Some remarks on the global nonexistence problem for nonautonomous abstract evolution equations // *Contemp. Math.* 1997. V. 208. P. 253–263.
11. Pucci P., Serrin J. Some new results on global nonexistence for abstract evolution equation with positive initial energy // *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 1997. V. 10. P. 241–247.
12. Pucci P., Serrin J. Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy // *J. Differ. Equations.* 1998. V. 150. P. 203–214.
13. Straughan B. Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equations // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1975. V. 2. P. 381–390.
14. Levine H. A., Todorova G. Blow-up of solutions of the Cauchy problem for a wave equation with nonlinear damping and source terms and positive initial energy in four space-time dimensions // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2003. V. 129. P. 793–805.
15. Митидиери Э. Л., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН.* 2001. Т. 234.
16. Pohozaev S. I. Critical nonlinearities in partial differential equations // *Milan J. Math.* 2009. V. 77, N 1. P. 127–150.
17. Галактионов В. А., Похожаев С. И. Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2008. Т. 48, № 10. С. 1819–1846.
18. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
19. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
20. Демидович В. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
21. Lima O. A., Lourendo A. T., Marino A. O. Weak solutions for a strongly-coupled nonlinear system // *Electron. J. Differ. Equ.* 2006. V. 130. P. 1–18. <http://ejde.math.txstate.edu>.
22. Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // *Мат. сб.* 1965. Т. 67, № 4. С. 609–642.
23. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956.
24. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решения системы уравнений Осколкова // *Мат. сб.* 2009. Т. 200, № 4. С. 83–108.

*Статья поступила 11 июля 2011 г.*

Корпусов Максим Олегович  
Московский гос. университет, физический факультет, кафедра математики,  
Воробьевы горы, Москва 119899  
[korpusov@gmail.com](mailto:korpusov@gmail.com)