Сибирский математический журнал
Июль—август, 2012. Том 53, № 4

УДК 514.113+514.772.35

ОПИСАНИЕ КОМБИНАТОРНОГО СТРОЕНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКИ 1–ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ ТИПА СФЕРЫ

И. Г. Максимов

Аннотация. Рассмотрен один из вопросов теории изгибаемых многогранников — о числе параметров, которые необходимо задать дополнительно к длинам ребер для многогранника данного комбинаторного типа, чтобы исключить его возможные изгибания. Дано описание комбинаторного строения многогранников типа сферы, для которых это число равно 1.

Ключевые слова: изгибаемый многогранник, изгибание, алгоритм.

В статье рассматривается задача о числе параметров, значения которых необходимо задать для того, чтобы исключить изгибания заданного многогранника. Прежде всего нас будет интересовать зависимость этого числа параметров от комбинаторного типа многогранника. В настоящей статье описывается комбинаторное строение алгоритмически 1-параметрических многогранников типа сферы (для них достаточно добавить к длинам ребер всего один параметр, чтобы получить неизгибаемый в общем положении многогранник).

Вначале напомним некоторые определения, связанные с понятием p-параметрических многогранников, введенным в [1].

Пусть K — двумерный геометрический симплициальный комплекс, тело которого гомеоморфно некоторому компактному двумерному многообразию M. Под *многогранником с комбинаторным строением* K будем понимать непрерывное в целом и линейное на каждом симплексе отображение $P : K \to \mathbb{R}^3$.

Будем использовать классическое определение изгибаемости многогранников, предполагая, что при изгибании многогранника его комбинаторное строение остается одним и тем же, а грани движутся как абсолютно твердые тела, оставаясь конгруэнтными своим исходным положениям. *Изгибанием* многогранника P с некоторым параметром изгибания t называется непрерывная по параметру t и нетривиальная (не сводящаяся к движению в $\mathbb{R}^3$) деформация многогранника P, т. е. непрерывное по параметру $t \in [0,1]$ семейство многогранников $P_t : K \to \mathbb{R}^3$ такое, что $P_0 = P$ и все $P_t(K)$ в $\mathbb{R}^3$ нетривиально изометричны между собой в индуцированной из $\mathbb{R}^3$ метрике, причем для любого двумерного симплекса $\sigma \subset K$ все $P_t(\sigma)$ конгруэнтны $P(\sigma)$. *Изгибаемым* называется многогранник, допускающий изгибания.

Для исключения изгибаний, которые сводятся к вращению одной части многогранника относительно второй его части, наложим на отображение P требование «общего положения».

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09–01–00179, 12–01–00718).

Определение 1. Многогранник $P(K)$ *находится в общем положении*, если для всех троек вершин комплекса K верно, что их образы при отображении P суть точки, не лежащие на одной прямой.

Заметим, что для многогранника в общем положении для любого симплекса $\sigma \subset K$ размерность образа $P(\sigma)$ совпадает с размерностью самого σ.

Обозначим через n число вершин многогранника, через E — множество неупорядоченных пар (i, j), $1 \leq i, j \leq n$, для которых вершины с номерами i, j соединены ребром. Пусть (l_{ij}), $(i, j) \in E$, — длины его ребер. Тогда набор длин ребер (l_{ij}), $(i, j) \in E$, многогранника $P(K)$ задает метрику многогранника как поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Напомним, что в соответствии с теоремой Глюка [2] почти все многогранники типа сферы неизгибаемы, т. е. при известных длинах ребер почти все многогранники типа сферы локально однозначно восстанавливаются (как тело) с точностью до движения пространства. Понятно, что изгибаемый многогранник нельзя однозначно восстановить только по длинам ребер, нужны дополнительные данные, например длины некоторых диагоналей.

Будем называть *диагоналями* многогранника неупорядоченные пары (i, j), $1 \leq i, j \leq n$, если $(i, j) \notin E$. Обозначим через d_{ij}, $(i, j) \notin E$, длины диагоналей многогранника. Заметим, что полный набор длин ребер и всевозможных диагоналей (l_{ij}, d_{km}), $(i, j) \in E$, $(k, m) \notin E$, $l_{ij} > 0$, $d_{km} \geq 0$, однозначно определяет реализацию многогранника в $\mathbb{R}^3$ с точностью до его движения в пространстве как твердого тела.

Мы предполагаем, что длины всех ребер положительные, так как будем рассматривать только невырожденные многогранники в общем положении.

Будем говорить, что точка M *опирается* на треугольник T, если известны расстояния от M до всех трех вершин треугольника T, который в этом случае называется *базовым* или *опорным.*

Пусть даны две точки M и N с опорой на один и тот же невырожденный треугольник T. Тогда можем найти расстояние между M и N. При этом возможны два ответа в зависимости от расположения точек M и N по отношению к плоскости треугольника T (соответствующие формулы можно найти в [3]).

По-другому это можно описать так: если для пяти точек известны девять расстояний между ними, тогда десятое расстояние может быть вычислено с помощью известных явных формул и может принимать одно или два значения. Если расстояние между какими-нибудь двумя точками найдено по этому способу, то будем говорить, что расстояние найдено по *стандартному алгоритму с базой.* В некоторых случаях такой способ вычисления расстояний позволяет вычислять неизвестные диагонали многогранника.

Обозначим через Δ_0 множество диагоналей $\{(k_1, m_1), \ldots, (k_p, m_p)\}$, длины которых считаются изначально известными. Теперь предположим, что имеем на r-м шаге некоторое множество диагоналей Δ_r, и построим множество $\Delta_{r+1} \supseteq \Delta_r$. Для этого переберем все возможные пятерки вершин из K. Если для рассматриваемых пяти вершин (i, j, k, m, s) из десяти возможных пар девять принадлежат множеству $\Delta_r \cup E$, то включим десятую пару в Δ_{r+1}.

Определение 2. Назовем многогранник $P : K \to \mathbb{R}^3$ *алгоритмически p-параметрическим*, если найдется множество $\Delta_0 = \{(k_1, m_1), \ \ldots, \ (k_p, m_p)\}$ из p диагоналей многогранника такое, что остальные диагонали могут быть вычислены по стандартному алгоритму с базой.

Мы включаем в рассмотрение и случай пустого множества Δ_0, считая при этом $p = 0$ и называя многогранник 0-*параметрическим.*

Понятно, что определение носит чисто комбинаторный характер. Однако для наглядности сохраним в дальнейшем геометрический язык.

Алгоритмически 1-параметрическими многогранниками являются все подвески (бипирамиды). Для них в качестве множества Δ_0 достаточно взять диагональ, соединяющую полюсы. Так как существуют изгибаемые подвески (например, октаэдры Брикара), подвески не являются алгоритмически 0-параметрическими.

Подвеской k-го порядка будем называть многогранник с $k+2$ вершинами со следующим комбинаторным строением: над замкнутой ломаной L с k звеньями строятся две пирамиды с вершинами соответственно в некоторых точках N и S. Ломаная L называется *экватором подвески*, точки N и S — ее *полюсами.*

Как будет показано ниже, подвески позволяют построить все алгоритмически 1-параметрические многогранники типа сферы (см. также [4]). Известно также описание гомеоморфных сфере алгоритмически 0-параметрических многогранников (см. [1]).

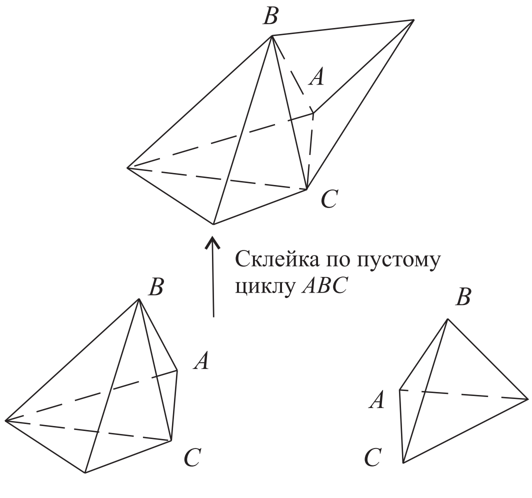

Рис. 1. Пример построения 3-разложимого многогранника.

Чтобы привести здесь это описание, сначала определим, следуя [5], 3-*разложимые* многогранники, которые имеют следующее комбинаторное строение (рис. 1). У всякого такого многогранника P есть вершина степени 3. Уберем открытую звезду этой вершины, состоящую из трех граней, закроем образовавшийся край новой треугольной гранью и получим новый многогранник $P^{(1)}$, у которого число вершин на 1 меньше, чем у исходного многогранника P. Этот многогранник $P^{(1)}$ тоже должен иметь вершину степени 3, с которой можно повторить операцию удаления звезды и получения нового многогранника $P^{(2)}$ с таким же свойством наличия вершины степени 3 и далее провести в итоге $n-4$ операций удаления вершин и заклеивания границы вплоть до получения некоторого тетраэдра. Обратный процесс дает правило построения любого 3-разложимого многогранника: надо взять произвольный тетраэдр T_1, удалить у него одну открытую грань и закрыть образовавшийся треугольный край γ_1 тремя «боковыми» гранями некоторого тетраэдра с тем же основанием γ_1, а затем повторить такую же операцию с какой-нибудь гранью полученного многогранника T_2, и т. д. После $k \geq 1$ шагов придем к 3-разложимому многограннику с $n = k + 4$ вершинами.

Если такой симплициальный комплекс реализован в $\mathbb{R}^3$ в виде выпуклого многогранника, то соответствующий выпуклый телесный многогранник P_0 можно представить как объединение телесных тетраэдров, полученных последовательным их отсечением от P_0 плоскостями, проходящими через основания трехгранных углов при вершинах степени 3.

Описание алгоритмически 0-параметрических многогранников дается следующей теоремой [1].

Теорема 1. *Для того чтобы гомеоморфный сфере многогранник P был алгоритмически 0-параметрическим, необходимо и достаточно, чтобы он был 3-разложимым.*

При описании алгоритмически 1-параметрических многогранников тетраэдры также играют важную роль. Сначала заметим, что «отрезание» (так же, как и «присоединение») тетраэдра оставляет многогранник 1-параметрическим. Более того, это наблюдение можно обобщить.

Для этого предположим, что многогранник P имеет пустой 3-цикл из трех ребер (т. е. этот цикл не является границей грани), и определим операцию *разрезания по пустому 3-циклу* следующим образом. Разрежем P по этому пустому 3-циклу и получим два открытых многогранника, каждый из которых имеет треугольный край. Теперь заклеим края этих многогранников треугольными гранями и получим замкнутые многогранники. Два полученных на этом шаге замкнутых многогранника являются результатом операции. Заметим, что выполнение указанных шагов в обратном порядке позволяет «склеить» два многогранника в один.

Зная строение 0-параметрических многогранников, естественно предположить, что после отрезания такого многогранника от 1-параметрического (или подклейки к 1-параметрическому) в результате получится опять 1-параметрический многогранник. Это действительно нетрудно проверить. Однако если в результате операции разрезания по пустому 3-циклу получены два многогранника и оба не являются 0-параметрическими, то вопрос о числе параметров для исходного многогранника остается открытым.

Действительно, Δ_0 может содержать диагональ, концы которой принадлежат разным многогранникам, полученным в результате разрезания, что позволяет априори дополнительно ограничить свободу исходного многогранника, уменьшить число требуемых для достижения неизгибаемости многогранника параметров. Однако оказывается, что один из многогранников, полученных в результате разрезания по пустому 3-циклу 1-параметрического многогранника, обязательно будет 0-параметрическим.

Предложение 1. *При разрезании алгоритмически 1-параметрического многогранника по пустому 3-циклу получаются алгоритмически 0-параметрический и алгоритмически 1-параметрический многогранники.*

Доказательство предложения 1 довольно длинное и будет приведено ниже. Но учитывая это предложение, для описания 1-параметрических многогранников теперь достаточно исследовать строение 1-параметрической части, причем можно предполагать отсутствие пустых 3-циклов. В этом исследовании основную роль играют подвески. Дадим определение операции *склейки подвесок.*

Пусть имеем подвеску k-го порядка с вершинами экватора $P_1, \ldots, P_k$ и полюсами N, S. Удалим одно ребро экватора P_1P_k и инцидентные ему грани P_1P_kN и P_1P_kS (левая часть рис. 2). Предположим, что имеем еще одну подвеску m-го порядка с вершинами экватора P'_1, …, P'_m и полюсами N', S', у которой также удалено ребро $P'_1P'_m$ и инцидентные ему грани (правая часть рис. 2). Определим операцию склейки таких подвесок следующим образом. При этой операции выполняется склейка вершины N' с вершиной P_k, вершины S' с вершиной P_1 и вершины P'_1 с вершиной N. При этом совместятся ребра P_1N с $S'P'_1$ и P_kN с $N'P'_1$ (рис. 2).

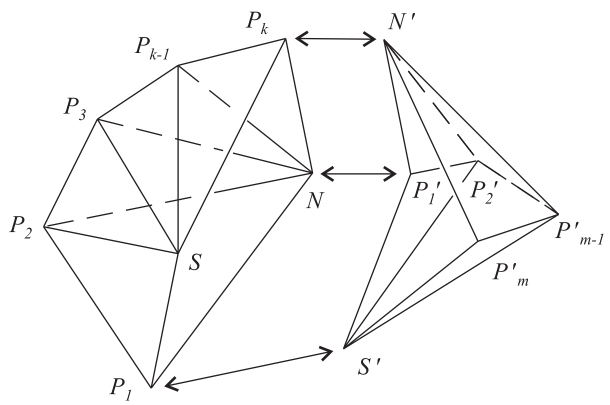

Рис. 2. Операция склейки двух подвесок.

Важным моментом является выбор совмещаемых вершин: полюс одной подвески совмещается с вершиной экватора второй подвески. Второй возможный способ склейки, когда совмещаются полюсы подвесок, не является интересным, так как результатом будет подвеска большего порядка. В дополнение к трем парам вершин можно выполнить еще склейку вершины P'_m с вершиной S. При этом получится замкнутый многогранник. Такая операция также разрешена, но она выполняется последней в последовательности склеек и завершает ее.

Теперь определим *последовательность склеек подвесок.* Если совмещаются только три пары вершин, то после склейки опять получаем многогранник $\widetilde{P}$ с четырехугольным краем, и последовательность склеек может быть продолжена. Два смежных ребра этого края принадлежат краю одной подклеенной подвески. Пусть имеем еще одну подвеску с полюсами N'', S'', у которой также удалены ребро экватора и две инцидентные ему грани. Для операции склейки берутся полюсы и одна вершина экватора P''_1, а также два смежных ребра подвески P''_1N'' и P''_1S'', образующие край подвески. На крае многогранника $\widetilde{P}$ для склейки также выбираются два смежных ребра. Если окажется, что выбранные ребра принадлежат одной подвеске, составляющей многогранник, то требуется соблюдение условия, что полюс одной подвески совмещается с вершиной экватора другой. Например, можно выбрать ребра P_1S и P_kS (см. рис. 2), концами которых являются один полюс и две вершины экватора исходной подвески. С другой стороны, взять ребра P'_mN' и P'_mS', концы которых — это два полюса и одна вершина экватора, нельзя. Далее выполняется склейка многогранников по выбранным ребрам. Заметим, что после склейки опять два смежных ребра края полученного многогранника $\widetilde{\widetilde{P}}$ принадлежат краю составляющей подвески, причем две вершины — ее полюсы, одна вершина принадлежит экватору.

Процесс склейки продолжается, пока сохраняется четырехугольный край. Последняя склейка совмещает четыре пары вершин, и в результате получается замкнутый многогранник.

Для удобства будем разрешать случай $m = 2$ («подвески 2-го порядка»), т. е. склейку с фигурой из двух инцидентных треугольников $P_1'P_2'N'$ и $P_1'P_2'S'$.

Легко показать, что многогранник, полученный с помощью последовательности склеек подвесок, будет 1-параметрическим в алгоритмическом смысле, — достаточно взять в качестве Δ_0 диагональ, соединяющую полюсы любой подвески, из которых составлен многогранник.

Теперь можно дать описание 1-параметрических многогранников без пустых 3-циклов.

Предложение 2. *Алгоритмически* 1*-параметрический многогранник, который не имеет пустых* 3*-циклов, либо является тетраэдром или подвеской, либо может быть получен с помощью последовательности склеек подвесок.*

Доказательство предложения будет приведено ниже.

Утверждения теоремы 1 и предложений 1, 2 позволяют получить комбинаторное описание алгоритмически 1-параметрических многогранников типа сферы.

Теорема 2. *Гомеоморфный сфере многогранник является алгоритмически* 1*-параметрическим в том и только в том случае, когда он имеет следующее комбинаторное строение:*

1) *является тетраэдром,*

2) *является подвеской,*

3) *может быть получен с помощью некоторой специальной последовательности склеек подвесок,*

4) *при наличии пустых* 3*-циклов его последовательное разложение путем разрезания по всем пустым* 3*-циклам дает в конечном счете не более одного многогранника типа* 2 *или* 3 *и любое количество тетраэдров.*

Доказательство. Пусть дан алгоритмически 1-параметрический многогранник типа сферы. Если многогранник имеет пустой 3-цикл, то разрезание по нему дает 1-параметрический и 3-разложимый многогранники. Если 1-параметрический многогранник опять имеет пустой 3-цикл, то процесс разрезания по пустому 3-циклу можно повторить. Продолжая, получим один 1-параметрический многогранник без пустых 3-циклов и некоторое количество 3-разложимых многогранников.

Если 3-разложимые многогранники не являются тетраэдрами, то они имеют пустые 3-циклы. Тогда повторим процесс разрезания по пустым 3-циклам для них, продолжая до момента их отсутствия. В итоге получим некоторое количество тетраэдров. Таким образом, видим, что 1-параметрический многогранник раскладывается на некоторое (возможно, нулевое) количество тетраэдров, к которым могут быть добавлены одна подвеска или один многогранник, полученный с помощью последовательности склейки подвесок.

Обратно, легко видеть, что многогранник, полученный склейкой одной подвески или одного многогранника, образованного с помощью последовательности склеек подвесок, и некоторого (возможно, нулевого) количества тетраэдров будет алгоритмически 1-параметрическим. Понятно, что брать более одной подвески или более одного многогранника нельзя, так как для них существуют реализации в виде изгибаемых многогранников в общем положении и, значит, количество параметров превысит единицу.

Теорема доказана.

Переходя к доказательству предложения 1, разберем более подробно расположение диагонали из Δ_0 относительно многогранников, полученных в результате разреза по пустому 3-циклу.

Пусть Δ_0 состоит из одной диагонали MN и существует алгоритм Al вычисления всех диагоналей P по стандартному алгоритму с базой.

Пусть a, b, c — вершины пустого 3-цикла в P. Разрежем P по этому пустому 3-циклу. Полученные таким образом замкнутые многогранники обозначим через $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$.

Наша цель — доказать, что все диагонали многогранников $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ можно вычислить с помощью базовых треугольников, имеющих вершины в том же многограннике.

Возможны следующие случаи расположения диагонали MN относительно полученных многогранников: (А) MN целиком принадлежит одной из половинок, скажем, $P^{(1)}$, (Б) M, N принадлежат разным половинкам (в частности, они не лежат на разрезе), скажем, $M \in P^{(1)}$, $N \in P^{(2)}$.

Начнем с более простого случая (А), в котором доказательство проводится аналогично доказательству приведенной выше теоремы об описании 0-параметрических многогранников (см. [1]).

Лемма 1. *Пусть алгоритмически* 1*-параметрический многогранник P имеет пустой* 3*-цикл и после разрезания по этому циклу получаются многогранники $P^{(1)}$, $P^{(2)}$. Если для многогранника P существует алгоритм вычисления диагоналей Al такой, что Δ_0 целиком содержится в $P^{(1)}$, то многогранник $P^{(1)}$ является алгоритмически* 1*-параметрическим, а многогранник $P^{(2)}$ — алгоритмически* 0*-параметрическим.*

Доказательство. Предположим, что на некотором шаге алгоритма Al для вычисления расстояния между вершинами r, s из, скажем, $P^{(1)}$ (случай $P^{(2)}$ рассматривается точно так же) требуется базовый треугольник, имеющий хотя бы одну вершину q, не входящую в $P^{(1)}$. Тогда для применения стандартного алгоритма с базой необходимо, чтобы к этому шагу были известны расстояния от вершин r, s до этой вершины. Но хотя бы одна из вершин $r, s \in P^{(1)}$ не лежит на разрезе $\langle a, b, c\rangle$ и не может быть соединена с $q \in P^{(2)}$ ребром. Значит, для выполнения алгоритма Al необходимо вычислить длину хотя бы одной диагонали, вершины которой находятся в разных многогранниках $P^{(1)}$, $P^{(2)}$.

Рассмотрим диагонали, концы которых принадлежат разным частям исходного многогранника, и расположим их в последовательности (r_1, q_1), (r_2, q_2), $\dots$, (r_m, q_m), $r_i \in P^{(1)}$, $q_i \in P^{(2)}$, $1 \le i \le m$, в соответствии с порядком их вычисления в исходном алгоритме Al нахождения диагоналей в P.

Тогда первая диагональ (r_1, q_1) должна вычисляться с опорой на треугольник $\langle a, b, c\rangle$, так как никакие другие расстояния между вершинами $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ на данном шаге алгоритма неизвестны (рис. 3). Это означает, что все расстояния между r_1, a, b, c или известны, или могут быть вычислены по алгоритму Al только с помощью $P^{(1)}$ и аналогично все расстояния между q_1, a, b, c или известны, или могут быть вычислены по алгоритму Al только с помощью $P^{(2)}$.

Проверим по индукции, что можно модифицировать алгоритм Al так, чтобы это утверждение осталось верным и для остальных диагоналей последова-

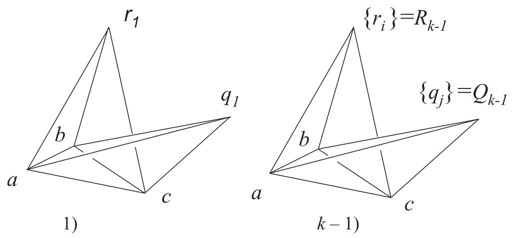

Рис. 3. Вершины на 1-м и $(k-1)$-м шагах.

тельности. Обозначим для удобства через R_{k-1} множество вершин r_i, расстояния от которых до a, b, c известны на шаге $k-1$, и через Q_{k-1} — аналогичное множество вершин q_j (см. рис. 3). Заметим, что знание расстояний до a, b, c позволяет вычислить все расстояния между вершинами из R_{k-1}, то же самое верно и для Q_{k-1}. Сформулируем доказываемое по индукции утверждение следующим образом.

На шаге k все расстояния между $R_k \cup \{a, b, c\}$ или известны, или могут быть вычислены по некоторому алгоритму Al' только с помощью $P^{(1)}$. Аналогично *на шаге k все расстояния между $Q_k \cup \{a, b, c\}$ или известны, или могут быть вычислены по некоторому алгоритму Al' только с помощью $P^{(2)}$.*

Для $k = 1$ утверждение верно, как показано выше. Теперь предположим, что оно верно для $k-1$, и перейдем к шагу k.

Итак, пусть на следующем шаге k вычисляется диагональ (r_k, q_k). Есть четыре возможности для расположения концов диагонали по отношению к R_{k-1}, Q_{k-1}.

1. Новых вершин нет, т. е. $r_k \in R_{k-1}$, $q_k \in Q_{k-1}$. Тогда по индукционному предположению известны расстояния от r_k, q_k до a, b, c и они вычислены только с помощью $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ соответственно. Значит, для вычисления расстояния (r_k, q_k) можно взять (возможно, вместо базы, предусмотренной алгоритмом Al) треугольник $\langle a, b, c\rangle$, и индукционное утверждение останется верным на шаге k.

2. Новой вершиной является q_k, т. е. $r_k \in R_{k-1}$, $q_k \notin Q_{k-1}$. Тогда на данном шаге расстояния от q_k до вершин R_{k-1} неизвестны. Значит, с учетом индукционного предположения вершины базового треугольника для этого шага алгоритма принадлежат $Q_{k-1} \cup \{a, b, c\}$, так как расстояния от r_k известны только до них. При этом расстояния q_k до вершин базового треугольника вычисляются только с помощью $P^{(2)}$, поскольку привлечение в качестве вершины базы какой-либо вершины из $P^{(1)}$ потребует знания расстояния q_k до нее, что противоречит рассматриваемому случаю.

Но тогда можно вычислить все недостающие расстояния q_k до вершин из $Q_{k-1} \cup \{a, b, c\}$, оставаясь в $P^{(2)}$. Поэтому для $Q_k = Q_{k-1} \cup \{q_k\}$ индукционное утверждение также остается верным на шаге k.

3. Новой вершиной является r_k, $q_k \in Q_{k-1}$. Этот случай полностью аналогичен предыдущему, и $R_k = R_{k-1} \cup \{r_k\}$.

4. Новыми вершинами являются r_k, q_k. Тогда на данном шаге расстояния от r_k до вершин Q_{k-1} и расстояния q_k до вершин R_{k-1} неизвестны. Значит, базой будет треугольник $\langle a, b, c\rangle$. Поэтому можно вычислить все недостающие расстояния r_k до вершин R_{k-1} и q_k до вершин Q_{k-1}, оставаясь в рамках $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно. Поэтому для $R_k = R_{k-1} \cup \{r_k\}$ и $Q_k = Q_{k-1} \cup \{q_k\}$ индукционное утверждение также остается верным на шаге k.

Разбор этих возможностей завершает индукцию. Таким образом, все расстояния между r_i, r_j и между q_i, q_j, $1 \le i, j \le m$, вычисляются внутри $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно без привлечения вершин из другого многогранника. В частности, расстояние между вершинами r, $s \in P^{(1)}$ также будут вычислены на некотором шаге модифицированного алгоритма.

Это завершает доказательство леммы 1. Понятно, что 1-параметрическим будет многогранник, содержащий Δ_0.

Итак, в случае (А) предложение 1 верно.

Переходим к случаю (Б), когда концы диагонали MN принадлежат разным многогранникам: $M \in P^{(1)}$, $N \in P^{(2)}$. Наша цель — доказать, что этот случай на самом деле может быть сведен к рассмотренному выше случаю (А). Для этого докажем, что существует модифицированный алгоритм Al' вычисления диагоналей многогранника P, исходная диагональ которого целиком содержится или в $P^{(1)}$, или в $P^{(2)}$. Тогда в силу леммы 1 это доказывает истинность предложения 1.

В отличие от случая (А) в случае (Б) длина одной диагонали с вершинами из разных частей многогранника P известна изначально. Это обстоятельство позволяет использовать для вычисления расстояния между какими-либо вершинами $P^{(1)}$ базу с вершиной N.

Пусть в алгоритме Al есть шаг, на котором для вычисления расстояния между какими-то вершинами r, s из $P^{(1)}$ используется базовый треугольник, имеющий хотя бы одну вершину из $P^{(2)}$. Покажем, что к этому шагу или известна длина хотя бы одной диагонали (отличной от MN), вершины которой принадлежат разным многогранникам $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, или же существует модифицированный алгоритм Al', для которого Δ_0 состоит из диагонали одного из этих многогранников.

Действительно, пусть базовый треугольник для вычисления r, s имеет вершину q из $P^{(2)}$. Хотя бы одна из вершин r и s не лежит на разрезе, следовательно, к этому шагу алгоритма должно быть известно расстояние до нее, скажем rq. Если rq не совпадает с MN, то требуемая диагональ найдена.

Предположим, что rq совпадает с MN и является единственной диагональю, вершины которой принадлежат разным многогранникам $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ и длина которой известна к этому шагу. Тогда $s \in \{a, b, c\}$.

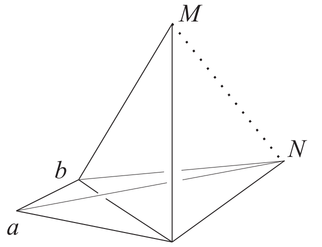

Рис. 4. Случай известной диагонали.

Пусть a — первая вершина среди a, b, c, расстояние от M до которой вычисляется с помощью базы, имеющей N в качестве одной из вершин (рис. 4). Тогда отрезки bM, cM или являются ребрами, или их длины вычисляются только в рамках $P^{(1)}$. Аналогично aN, bN, cN вычисляются внутри $P^{(2)}$. Значит, если взять в качестве Δ_0 диагональ aM, то можно вычислить длину MN с помощью базы $\langle a, b, c\rangle$. Таким образом, существует модифицированный алгоритм Al' вычисления длин диагоналей, который начинается с $\Delta_0' = \{(a, M)\}$, вычисляет MN, далее продолжается так же, как и в Al, т. е. имеем случай (А).

Значит, далее можем считать, что на некотором шаге алгоритма Al потребуется длина диагонали, одна вершина которой принадлежит $P^{(1)}$, а вторая — $P^{(2)}$. Расположим такие диагонали в последовательности (r_1, q_1), (r_2, q_2), $\dots$, (r_m, q_m), $r_i \in P^{(1)}$, $q_i \in P^{(2)}$, $1 \le i \le m$, в соответствии с порядком их вычисления в исходном алгоритме нахождения диагоналей в P (MN нет в списке, так как ее длину вычислять не надо). Нам придется учитывать особую роль диагонали MN, длина которой известна изначально.

При вычислении длины первой диагонали (r_1, q_1) возможны следующие варианты:

1) $r_1 \neq M$, $q_1 \neq N$, базой является треугольник $\langle a, b, c\rangle$ (см. рис. 3);

2) $r_1 = M$, $q_1 \neq N$, базой является треугольник $\langle a, b, c\rangle$ (рис. 5);

3) $r_1 = M$, $q_1 \neq N$, базой является треугольник $\langle b, c, N\rangle$ (напомним, что MN — единственное известное заранее расстояние между вершинами из разных многогранников $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$).

Остальные варианты комбинаторно эквивалентны рассматриваемым.

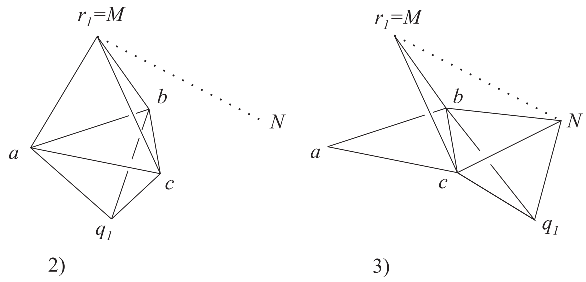

Рис. 5. Варианты расположения первой диагонали.

Для случаев 1 и 2 известны все расстояния между вершинами a, b, c, r_1. Слова «известные расстояния» означают, что эти расстояния либо являются длинами ребер, либо вычисляются в соответствии с Al к данному шагу только с использованием вершин из $P^{(1)}$. Действительно, кроме MN, к этому шагу алгоритма у нас нет известных расстояний между вершинами $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$.

Аналогично известны все расстояния между a, b, c, q_1, причем они либо представляют собой длины ребер, либо вычислены внутри $P^{(2)}$.

Для случая 3 то же самое верно для групп вершин b, c, N, r_1 и b, c, N, q_1.

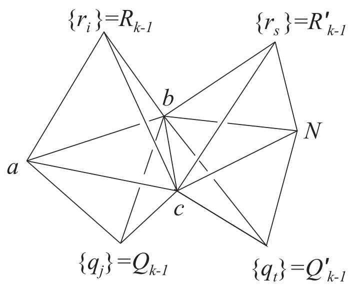

Рис. 6. Множества вершин на шаге k.

Изучим более подробно множество вершин r_i, q_j, которые имеем на некотором шаге алгоритма Al. Для этого распределим вершины r_i, q_j по четырем множествам (рис. 6) в зависимости от известных расстояний между ними. Не будем упоминать шаги алгоритма, не связанные с вычислением длин диагоналей внутри $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, под шагом k алгоритма будем понимать шаг, на котором вычисляется расстояние (r_k, q_k). Введем следующие обозначения.

Пусть R_k — множество вершин $r_i \in P^{(1)}$, для которых на шаге k известны или могут быть вычислены расстояния до вершин a, b, c (аналогично случаю 1). Следовательно, можно считать известными расстояния между всеми вершинами из множества R_k. Уточним, что сам алгоритм Al, может быть, дает для вновь добавляемой на данном шаге вершины расстояния до каких-либо трех вершин из $R_k \cup \{a, b, c\}$, а не все возможные расстояния между вершинами $R_k \cup \{a, b, c\}$, но мы сами делаем вывод о возможности вычислить все эти расстояния, исходя из уже известных и оставаясь в рамках $P^{(1)}$.

Аналогично обозначим через через Q_k множество $q_j \in P^{(2)}$, для которых на шаге k известны или могут быть вычислены расстояния до вершин a, b, c. Точно так же введем множества R'_k и Q'_k вершин $r_i \in P^{(1)}$ и $q_j \in P^{(2)}$ соответственно, для которых известны или могут быть вычислены расстояния до вершин b, c, N. Здесь важно, что две вершины расположены на разрезе, а одна является концом известной диагонали, именно их мы и обозначаем через b, c, N.

Введение множеств R'_k и Q'_k требует отдельного пояснения. Проверим корректность их определения и выясним некоторые свойства указанных множеств.

А именно, либо на некотором шаге алгоритма Al выяснится наличие модифицированного алгоритма Al', для которого Δ'_0 содержит диагональ из $P^{(1)}$ или $P^{(2)}$, либо будут вычислены расстояния bN, cN в рамках $P^{(2)}$ и найдены множества вершин R_k, Q_k, R'_k и Q'_k со следующими свойствами:

(а) либо оба множества R_k и Q_k пусты, либо оба непусты, причем для каждой вершины из них известны или могут быть вычислены расстояния (внутри $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно) до вершин a, b, c;

(б) $R'_k = \{M\}$, Q'_k непусто, причем для них известны или могут быть вычислены расстояния до вершин b, c, N (внутри $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ соответственно);

(в) расстояния между вершинами из $R_k \cup Q_k \cup \{a\}$ и $R'_k \cup Q'_k \cup \{N\}$ неизвестны.

Действительно, рассмотрим вычисление расстояния (r_1, q_1) и вспомним, что при этом имеем три случая (см. рис. 3, 5).

В случае 3 имеем $R'_1 = \{M\}$, $Q'_1 = \{q_1\}$, остальные множества пустые.

Если на этом шаге алгоритма известно расстояние aM, то оно вычислено без использования MN внутри $P^{(1)}$ (или же aM — ребро) и база $\langle a, b, c\rangle$ позволяет вычислить MN. Это означает, что имеем 0-параметрический многогранник, для которого лемма 1 и предложение 1 верны в силу приведенной выше теоремы об описании 0-параметрических многогранников. Если известно расстояние aN, то возьмем $\Delta'_0 = \{aM\}$. Тогда можно использовать базу $\langle a, b, c\rangle$ для вычисления MN. Значит, существует модифицированный алгоритм, для которого Δ'_0 содержится целиком в $P^{(1)}$, т. е. имеем случай (A). Если известно расстояние aq_1, то база $\langle b, c, q_1\rangle$ позволяет вычислить aN в рамках $P^{(2)}$, т. е. имеем предыдущий случай.

Таким образом, свойства (а)–(в) выполнены в рассматриваемом случае 3.

Разберем случай 1, 2. Здесь $R_1 = \{r_1\}$, $Q_1 = \{q_1\}$ (при этом возможно, что $r_1 = M$), $R'_1 = \varnothing$, $Q'_1 = \varnothing$. На этом шаге расстояния bM, cM могут быть неизвестны. Свойства (а), (в) выполнены, но остается открытым вопрос о расстояниях до N. Остальные шаги разберем по индукции.

Предположим, что на $(k-1)$-м шаге имеем множества R_{k-1} и Q_{k-1} со свойствами (а), (в) (вопрос о расстояниях до N открыт).

Будем считать, что $N \notin Q_{k-1}$, но, возможно, $M \in R_{k-1}$. Противоположный случай $N \in Q_{k-1}$, $M \notin R_{k-1}$ комбинаторно эквивалентен этому. Действительно, в алгоритме Al нет шага для вычисления MN, так как расстояние MN известно изначально. Поэтому только одна из вершин M, N может быть добавлена к рассматриваемым множествам на некотором шаге алгоритма. Будем считать, что первой добавляется M.

Рассмотрим переход к шагу k. При вычислении (r_k, q_k) возможны следующие варианты:

1) $r_k \in R_{k-1}$, $q_k \in Q_{k-1}$;

2) $r_k \notin R_{k-1}$ (новая вершина), $q_k \in Q_{k-1}$;

3) $r_k \in R_{k-1}$, $q_k \notin Q_{k-1}$;

4) $r_k \notin R_{k-1}$, $q_k \notin Q_{k-1}$.

Для варианта 1 имеем две возможности: 1.1) $r_k \neq M$, 1.2) $r_k = M$.

Для случая 1.1 базой будет $\langle a, b, c\rangle$, так как $q_k \neq N$ и других известных расстояний до вершин $P^{(1)}$ нет. Индукционные предположения остаются верными.

Для случая 1.2 возможна база, содержащая вершину N. Но при этом должны быть известны еще два расстояния от N до вершин из $Q_{k-1} \cup \{a, b, c\}$, так как расстояния N до R_{k-1} (кроме MN) неизвестны. Если известны все три расстояния от N до a, b, c, то база $\langle a, b, c\rangle$ позволяет вычислить MN, т. е. имеем 0-параметрический многогранник, для которого лемма 1 и предложение 1 верны в силу теоремы 1. Если одно из расстояний неизвестно, скажем aN, то можно взять $\Delta'_0 = \{aN\}$ и получить модифицированный алгоритм, для которого Δ'_0 содержится целиком внутри $P^{(2)}$. Действительно, a и две вершины, до которых известны расстояния от N, дают базу для вычисления MN. Таким образом, имеем случай (A). Для этого случая доказываемое предложение 1 верно.

Для варианта 2 имеем две возможности: 2.1) $r_k \neq M$, 2.2) $r_k = M$.

Для случая 2.1 база имеет вершины в $R_{k-1} \cup \{a, b, c\}$. Значит, $R_k = R_{k-1} \cup \{r_k\}$, и все индукционные предположения сохраняют свою силу.

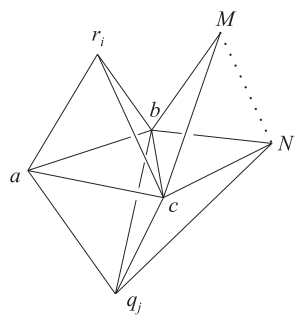

Рис. 7. База $\langle b, c, N\rangle$ для случая 2.2.

Для случая 2.2 база имеет вершины в $R_{k-1} \cup \{a, b, c, N\}$. Если база не содержит N, то $R_k = R_{k-1} \cup \{r_k\}$. Если база содержит N, то вершин из R_{k-1} в базе нет, так как расстояния от N до них неизвестны. Пусть базой является $\langle b, c, N\rangle$ (рис. 7, остальные случаи комбинаторно эквивалентны этому). Значит, известны расстояния Mb, Mc. Приняв $\Delta'_0 = \{aN\}$, получим модифицированный алгоритм Al', для которого Δ'_0 расположено внутри $P^{(2)}$. Таким образом, имеем случай (A), и предложение 1 верно.

Для варианта 3 имеем две возможности: 3.1) $q_k \neq N$, 3.2) $q_k = N$.

Для случая 3.1 база имеет вершины в $Q_{k-1} \cup \{a, b, c, N\}$. Если $M \notin R_{k-1}$, то $N \notin Q_{k-1}$ и N не может быть вершиной базы, так как неизвестно расстояние $r_k N$. Значит, $Q_k = Q_{k-1} \cup \{q_k\}$, и все индукционные предложения сохраняют свою силу.

Если $M \in R_{k-1}$, то в случае, когда N не является вершиной базы, имеем случай, рассмотренный в предыдущем абзаце, а когда является, имеем $M = r_k$. Этот случай рассматривается так же, как и 1.2.

Для случая 3.2 база имеет вершины в $Q_{k-1} \cup \{a, b, c, M\}$. Если база не содержит вершины M, то при $M \in R_{k-1}$ с помощью базы $\langle a, b, c\rangle$ можно вычислить MN, т. е. имеем 0-параметрический многогранник. Случай $M \notin R_{k-1}$ противоречит предположению, что вершина M добавляется в рассматриваемые множества первой (другими словами, комбинаторно эквивалентен случаю 2.2).

Если база содержит M, то должно быть $M \in R_{k-1}$ (вершина M попадает в множество R_{k-1} первой — случай 2.2), и можно построить модифицированный алгоритм, взяв $\Delta'_0 = \{(a, N)\}$ (аналогично 1.2).

Для варианта 4 в случае $M \in R_{k-1}$ расстояние Mq_k известно только при $q_k = N$. При этом база имеет вершины в $\{a, b, c, M\}$ (см. аналогичный случай 1.2). Если базой является $\langle a, b, c\rangle$, то MN вычисляется, т. е. имеем 0-параметрический многогранник, для которого предложение 1 верно в силу приведенной выше теоремы об описании 0-параметрических многогранников. Если базой является, скажем, $\langle b, c, M\rangle$, то, взяв $\Delta_0' = \{aN\}$, получаем модифицированный алгоритм, имеющий Δ_0' в $P^{(2)}$. Действительно, база $\langle a, b, c\rangle$ позволяет вычислить MN. Если же $q_k \neq N$, то базой будет $\langle a, b, c\rangle$. Тогда $R_k = R_{k-1} \cup \{r_k\}$, $Q_k = Q_{k-1} \cup \{q_k\}$.

Для случая $M \notin R_{k-1}$ имеем две возможности: 4.1) $r_k = M$, 4.2) $r_k \neq M$.

В случае 4.1 $q_k \neq N$ и база имеет вершины из $\{a, b, c, N\}$. Если базой является $\langle a, b, c\rangle$, то $R_k = R_{k-1} \cup \{r_k\}$, $Q_k = Q_{k-1} \cup \{q_k\}$. Если база содержит N, скажем, $\langle b, c, N\rangle$, то $R_k' = \{M\}$, $Q_k' = \{q_k\}$.

Проверим, выполнено ли свойство (в). Расстояния от M до вершин из Q_k неизвестны по построению. Если известно aM, то достаточно взять $\Delta_0' = \{aN\}$, чтобы получить модифицированный алгоритм, имеющий Δ_0' в $P^{(2)}$, т. е. случай (A). Теперь предположим, что известно какое-либо расстояние Mr_i, $r_i \in R_k$. Тогда база $\langle r_i, b, c\rangle$ позволяет вычислить aM, и получаем только что рассмотренный случай.

Точно так же рассматриваются расстояния для q_k. Расстояния до R_k неизвестны по построению. Если известно aq_k, то $\Delta_0' = \{aM\}$ сводит задачу к случаю (A). Если известно какое-либо расстояние $q_k q_j$, $q_j \in Q_k$, то база $\langle q_j, b, c\rangle$ позволяет вычислить aq_k. Значит, свойство (в) выполняется, и индукцию можно завершить.

В случае 4.2 должно быть $q_k \neq N$ (в силу приоритета M). Тогда неизвестны расстояния от r_k до Q_{k-1} и от q_k до R_{k-1}. Значит, базой является $\langle a, b, c\rangle$, и $R_k = R_{k-1} \cup \{r_k\}$, $Q_k = Q_{k-1} \cup \{q_k\}$.

Перебор вариантов завершен. Осталось заметить, что на некотором шаге алгоритма обязательно будет введена в рассмотрение вершина M. При этом возможны случаи 2.2 и 4.1. Случай 4.1 завершает доказательство существования множеств R_k, Q_k, R_k', Q_k' с требуемыми свойствами. В случае 2.2 M попадает в R_k, и на некотором последующем шаге будет введена в рассмотрение вершина N. При этом возможны случай 3.2 и рассмотренный выше вариант 4 в случае $M \in R_{k-1}$,, но каждый из них сводится к случаю (A), когда Δ_0' содержится в $P^{(1)}$ или $P^{(2)}$.

Итак, можно утверждать, что есть корректно определенные множества R_k, Q_k, для вершин из которых известны расстояния до a, b, c, и множества R_k', Q_k', для вершин из которых известны расстояния до b, c, N. Это дает нам базу индукции для изучения свойств этих множеств на следующих шагах алгоритма Al.

Отметим, что построенные множества R_k и Q_k либо оба пусты, либо оба непустые. Множества R_k' и Q_k' оба непусты, причем R_k' содержит M.

Обратим внимание, что по определению множеств можно считать известными расстояния между вершинами из R_k и Q_k и аналогично между вершинами из R_k' и Q_k'. Однако наличие известного расстояния между какой-либо вершиной из $R_k \cup \{a\}$ и M или какой-либо вершиной из Q_k и какой-либо вершиной из $Q_k' \cup \{N\}$ позволяет получить модифицированный алгоритм, который использует в качестве Δ_0' диагональ, целиком лежащую в $P^{(1)}$ или в $P^{(2)}$. Это означает, что имеем рассмотренный выше случай (A), и в силу леммы 1 предложение 1 верно. Покажем, что аналогичное свойство сохраняется и на следующих шагах алгоритма.

Утверждение 1. *Если между какой-либо вершиной из* $R_k \cup \{a\}$ *и какой-*

либо вершиной из R'_k расстояние известно или может быть вычислено в $P^{(1)}$, то существует модифицированный алгоритм Al', для которого Δ'_0 содержится в $P^{(1)}$ или $P^{(2)}$. Аналогично если между какой-либо вершиной из $Q_k \cup \{a\}$ и какой-либо вершиной из $Q'_k \cup \{N\}$ расстояние известно или может быть вычислено в $P^{(2)}$, то существует Al', для которого Δ'_0 содержится в $P^{(1)}$ или $P^{(2)}$.

Действительно, пусть известно расстояние aM. Тогда достаточно взять $\Delta'_0 = \{(a, N)\}$, чтобы получить модифицированный алгоритм, имеющий Δ'_0 в $P^{(2)}$, т. е. случай (A).

Пусть известно расстояние ar_m, где $r_m \in R'_k$. Тогда база $\langle r_m, b, c\rangle$ позволяет вычислить aM в рамках $P^{(1)}$. Получили предыдущий случай.

Пусть известно какое-то расстояние r_iM, где $r_i \in R_k$ (рис. 8). Тогда база $\langle r_i, b, c\rangle$ позволяет найти расстояние aM, т. е. пришли к случаю, рассмотренному выше.

Пусть известно какое-либо расстояние r_ir_m, где $r_i \in R_k$, $r_m \in R'_k$ (рис. 8). Тогда база $\langle r_i, b, c\rangle$ позволяет найти расстояние ar_m, что сводит этот случай к рассмотренному выше.

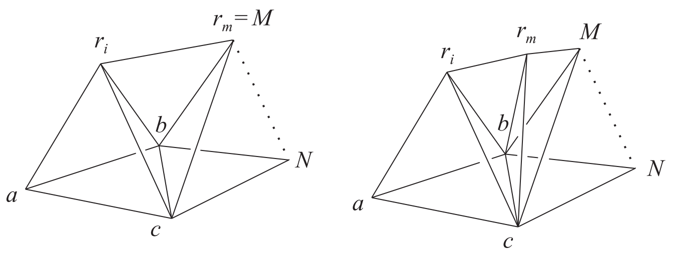

Рис. 8. Известная длина диагонали r_ir_m.

Пусть известно расстояние aN. Тогда можно взять $\Delta'_0 = \{(a, M)\}$ и база $\langle a, b, c\rangle$ позволит вычислить MN. Значит, можно построить модифицированный алгоритм, имеющий Δ'_0 в $P^{(1)}$, т. е. наблюдается случай (A).

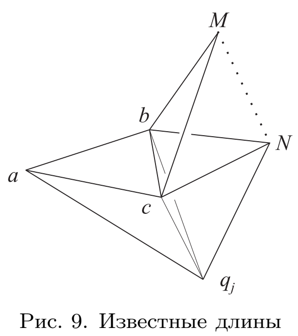

Рис. 9. Известные длины диагоналей aq_j и q_jN.

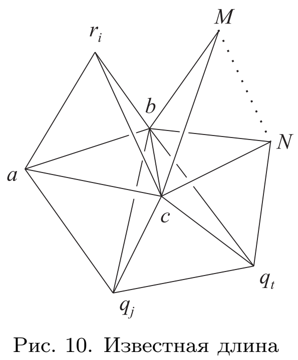

Рис. 10. Известная длина диагонали q_jq_t.

Пусть известно расстояние aq_j, где $q_j \in Q'_k$ (рис. 9). Тогда база $\langle q_j, b, c\rangle$ позволяет вычислить aN в рамках $P^{(2)}$, и получаем предыдущий случай.

Пусть известно какое-то расстояние q_jN, где $q_j \in Q_k$. Тогда база $\langle q_j, b, c\rangle$ позволяет найти расстояние aN, т. е. приходим к случаю, рассмотренному выше.

Пусть известно расстояние q_jq_t, где $q_j \in Q_k$, $q_t \in Q'_k$ (рис. 10). Тогда база $\langle q_t, b, c\rangle$ позволяет найти расстояние q_jN, что сводит этот случай к предыдущему.

Таким образом, утверждение 1 верно.

Перейдем к изучению того, как изменяются введенные множества на следующих шагах алгоритма Al.

Предположим, что на шаге k алгоритма построены множества R_k, R'_k, Q_k, Q'_k со следующими свойствами.

1. Все расстояния между вершинами из $R_k \cup \{a, b, c\}$ или известны, или могут быть вычислены только с помощью $P^{(1)}$. Все расстояния между вершинами из $Q_k \cup \{a, b, c\}$ или известны, или могут быть вычислены только с помощью $P^{(2)}$. Все расстояния между вершинами из $R'_k \cup \{b, c, N\}$ или известны, или могут быть вычислены только с помощью $P^{(1)}$. Все расстояния между вершинами из $Q'_k \cup \{b, c, N\}$ или известны, или могут быть вычислены только с помощью $P^{(2)}$.

2. Множества R_k и Q_k или оба пусты, или оба непусты. Множества R'_k и Q'_k оба непустые, причем $M \in R'_k$.

3. Расстояния между вершинами из множеств $R_k \cup Q_k \cup \{a\}$ и $R'_k \cup Q'_k \cup \{N\}$ неизвестны.

Тогда либо существует модифицированный алгоритм Al', для которого Δ'_0 содержит диагональ из $P^{(1)}$ или $P^{(2)}$, либо свойства 1–3 для множеств выполняются и на следующем шаге алгоритма.

Для проверки этого рассмотрим шаг $k+1$ — вычисление длины (r_{k+1}, q_{k+1}) — и разберем расположение концов диагонали относительно вершин, рассмотренных ранее. Напомним, что при выборе базового треугольника без дополнительного пояснения будем считать известными расстояния, которые вычисляются в рамках многогранников $P^{(1)}$, $P^{(2)}$.

Сначала рассмотрим случай, когда вычисляются расстояния между уже известными вершинами, принадлежащими множествам R_k, R'_k, Q_k, Q'_k, а также $\{a, b, c, N\}$ (см. рис. 6). Здесь достаточно проверить свойство 3.

Пусть вычисляется расстояние r_ir_s, где $r_i \in R_k$, $r_s \in R'_k$. В силу свойства 3 для этого требуется база, вершины которой содержатся в $R_k \cup R'_k \cup \{b, c\}$. Это означает, что к этому шагу известно какое-то расстояние r_ir_m, где $r_m \in R'_k$ (см. рис. 8). Тогда в силу утверждения 1 предложение 1 верно в этом случае.

Пусть вычисляется расстояние r_iN, где $r_i \in R_k$.

Для этого требуется база, вершины которой содержатся в $Q_k \cup \{b, c\}$ или в $R'_k \cup \{b, c\}$. Тогда найдется $q_j \in Q_k$ с известным расстоянием q_jN (см. рис. 7) или $r_m \in R'_k$ с известным расстоянием r_ir_m. Следовательно, в силу утверждения 1 предложение 1 верно.

Пусть вычисляется расстояние r_iq_t, где $r_i \in R_k$, $q_t \in Q'_k$.

Для вычисления требуется база, вершины которой содержатся в $Q_k \cup \{b, c\}$ или в $R'_k \cup \{b, c\}$. Это означает, что к этому шагу известно какое-то расстояние q_tq_j, где $q_j \in Q_k$ (см. рис. 10), или r_ir_m, где $r_m \in R'_k$. Следовательно, в силу утверждения 1 предложение 1 верно.

Точно так же рассмотрение возможных вариантов для $q_j \in Q_k$ приводит к ситуациям, в которых применимо утверждение 1. Таким образом, случай вычисления расстояний между известными вершинами разобран. Обратим внимание, что нарушение свойства 3 завершает индукцию и доказывает предложение 1.

Далее возможны следующие варианты расположения концов диагонали (r_{k+1}, q_{k+1}):

(1) r_{k+1} — новая вершина, $q_{k+1} = q_j$, $j \le k$;

(2) q_{k+1} — новая вершина, $r_{k+1} = r_i$, $i \le k$;

(3) r_{k+1}, q_{k+1} — новые вершины.

В качестве вершин базы могут быть использованы вершины из множеств $R_k \cup \{a, b, c\}$, $R'_k \cup \{b, c, N\}$, $Q_k \cup \{a, b, c\}$, $Q'_k \cup \{b, c, N\}$. Действительно, в соответствии с их определением для вершин, которые вводятся только на этом шаге алгоритма, известны только расстояния внутри соответствующего многогранника $P^{(1)}$ или $P^{(2)}$.

Для первого варианта и базы из $R_k \cup \{a, b, c\}$ требуется знание расстояний от r_{k+1} до каких-либо трех вершин из указанного множества.

Если R_k пусто, то базой будет треугольник $\langle a, b, c\rangle$. В этом случае имеем $q_{k+1} \in Q'_k$, и к этому шагу известно расстояние aq_{k+1}, причем оно вычисляется только внутри $P^{(2)}$ (рис. 11). Следовательно, в силу утверждения 1 предложение 1 истинно для этого случая.

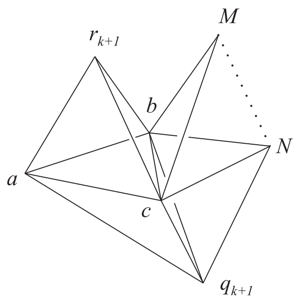

Рис. 11. Случай пустого множества R_k.

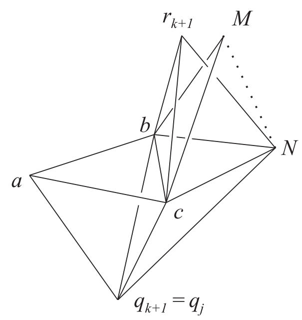

Рис. 12. Случай $q_j \in Q_k$.

Если R_k непусто, то для $q_{k+1} = q_j$ возможны два варианта: (а) $q_{k+1} \in Q_k$, (б) $q_{k+1} \in Q'_k$. В случае (а) имеющаяся база позволяет вычислить все расстояния r_k до вершин R_k, причем в рамках $P^{(1)}$, так как никакие расстояния от r_{k+1} до $P^{(2)}$ пока неизвестны. Поэтому для $R_{k+1} = R_k \cup \{r_{k+1}\}$ индукционное предположение остается верным.

В случае (б) базой будет $\langle a, b, c\rangle$, так как расстояния между вершинами из R_k и Q'_k неизвестны. Но тогда известно расстояние aq_{k+1}, и в силу утверждения 1 предложение 1 верно для этого случая.

Переходим к варианту (1) и базе из $R'_k \cup \{b, c, N\}$.

Если $q_j \in Q'_k$, то используемая на этом шаге алгоритма база позволяет вычислить все недостающие расстояния от r_{k+1} до вершин R'_k в силу индукционного предположения. Поэтому для $R'_{k+1} = R'_k \cup \{r_{k+1}\}$ индукционное предположение остается верным.

Если $q_j \in Q_k$, то базой в рассматриваемом случае будет $\langle b, c, N\rangle$. Тогда будет известно расстояние $q_j N$ (рис. 12), и в силу утверждения 1 предложение 1 верно для этого случая.

Рассмотрим вариант (1) и базу из $Q_k \cup \{a, b, c\}$ или из $Q'_k \cup \{b, c, N\}$. Так как единственным известным расстоянием r_{k+1} до вершин $P^{(2)}$ может быть

MN, базой может быть только $\{a, b, c\}$ или $\{b, c, N\}$. Этот случай нами уже рассмотрен выше.

Вариант (1) полностью закончен, переходим к варианту (2).

Пусть имеем базу из $R_k \cup \{a, b, c\}$.

Если R_k пусто, то базой будет $\langle a, b, c\rangle$. В этом случае имеем $r_{k+1} \in R'_k$, и к этому шагу известно расстояние ar_{k+1}, причем оно вычисляется только внутри $P^{(1)}$ (конструкция совпадает с рис. 13). Значит, в силу утверждения 1 предложение 1 верно для этого случая.

Пусть R_k непусто. Базой также будет $\langle a, b, c\rangle$. Для $r_{k+1} = r_i$ имеем два варианта: (а) $r_{k+1} \in R_k$, (б) $r_{k+1} \in R'_k$. Для варианта (а) заметим, что Q_k тоже непусто, и имеющаяся база позволяет вычислить все недостающие расстояния q_{k+1} до вершин Q_k в силу индукционного предположения. Поэтому для $Q_{k+1} = Q_k \cup \{q_{k+1}\}$ индукционное предположение остается верным.

Для варианта (б) должно быть известным расстояние ar_{k+1}. Тогда в силу утверждения 1 предложение 1 истинно для этого случая.

Пусть для варианта (2) имеем базу из $R'_k \cup \{b, c, N\}$.

Так как q_{k+1} — вновь введенная вершина, базой будет $\langle b, c, N\rangle$. Тогда $r_{k+1} \in R'_k$, поскольку только в этом случае известно расстояние до N. В этом случае имеющаяся база позволяет вычислить все недостающие расстояния q_{k+1} до вершин Q_k в силу индукционного предположения. Поэтому для $Q_{k+1} = Q_k \cup \{q_{k+1}\}$ индукционное предположение остается верным.

Пусть для варианта (2) имеем базу из $Q_k \cup \{a, b, c\}$.

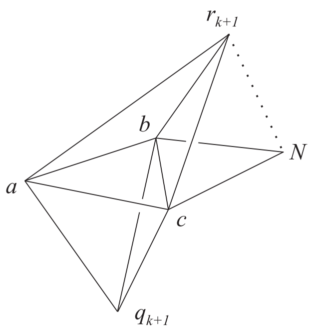

Рис. 13. Случай базы $\langle a, b, c\rangle$ и пустого множества Q_k.

Если Q_k пусто, то базой будет $\langle a, b, c\rangle$. При этом R_k также пусто и $r_{k+1} \in R'_k$. Тогда известно расстояние ar_{k+1} (рис. 13). Значит, в силу утверждения 1 предложение 1 истинно для этого случая.

Если Q_k непусто, то для $r_{k+1} = r_i$ имеем два варианта: (а) $r_{k+1} \in R_k$, (б) $r_{k+1} \in R'_k$. Вариант (б) в точности повторяет случай, разобранный в предыдущем абзаце. Для варианта (а) имеющаяся база позволяет вычислить все недостающие расстояния q_{k+1} до вершин Q_k в силу индукционного предположения. Поэтому для $Q_{k+1} = Q_k \cup \{q_{k+1}\}$ индукционное предположение остается верным.

Наконец, пусть для варианта (2) имеем базу из $Q'_k \cup \{b, c, N\}$.

Тогда $r_{k+1} \in R'_k$, так как только в этом случае могут быть известны расстояния до вершин базы. При этом имеющаяся база позволяет вычислить все недостающие расстояния q_{k+1} до вершин Q_k в силу индукционного предположения. Поэтому для $Q_{k+1} = Q_k \cup \{q_{k+1}\}$ индукционное предположение остается верным.

Этот вариант заканчивает разбор варианта (2). Перейдем к варианту (3).

Пусть для варианта (3) имеем базу из $R_k \cup \{a, b, c\}$.

Если R_k, Q_k пусты, то базой будет $\langle a, b, c\rangle$. Тогда $R_{k+1} = \{r_{k+1}\}$, $Q_{k+1} = \{q_{k+1}\}$.

Если R_k, Q_k непусты, то базой также будет $\langle a, b, c\rangle$, так как длины диагоналей, имеющих в качестве одного конца r_{k+1} или q_{k+1}, а второй конец в другом многограннике, на данном шаге алгоритма неизвестны. Поэтому для

$R_{k+1} = R_k \cup \{r_{k+1}\}$, $Q_{k+1} = Q_k \cup \{q_{k+1}\}$ остается верным индукционное предположение, так как можно вычислить все недостающие расстояния с помощью базы $\langle a, b, c\rangle$.

Пусть для варианта (3) имеем базу из $R'_k \cup \{b, c, N\}$. Но в этом случае у нас нет известных расстояний от q_{k+1} до R'_k, поскольку вершина новая. Аналогично расстояние $r_{k+1}N$ неизвестно. Значит, этот случай невозможен.

Если для варианта (3) имеем базу из $Q_k \cup \{a, b, c\}$ или из $Q'_k \cup \{b, c, N\}$, то рассмотрение будет точно таким же, как и для случаев R_k, R'_k.

Это случай заканчивает рассмотрение индукционного перехода. Таким образом, свойства (1)–(3) выполнены и на следующем шаге алгоритма.

Осталось рассмотреть условия завершения индукции. Как мы видели выше в начале рассмотрения перехода к шагу $k+1$, при вычислении расстояний между уже рассмотренными на более ранних шагах алгоритма вершинами имеем случай, когда в силу утверждения 1 предложение 1 оказывается верным. Осталось заметить, что алгоритм предполагает вычисление всех диагоналей и на некотором шаге этот случай расположения получим.

Предложение 1 доказано.

Перейдем к доказательству предложения 2. Итак, предположим, что имеем множество Δ_0 из одной диагонали NS и остальные диагонали многогранника могут быть вычислены по стандартному алгоритму с базой. Случай многогранника с четырьмя вершинами тривиален, будем предполагать наличие пяти вершин или более.

Рассмотрим вычисление длины первой диагонали. На этом шаге из девяти известных расстояний только одно может быть диагональю NS, остальные являются длинами ребер. Если все девять — ребра, то многогранник представляет собой подвеску 3-го порядка и, значит, имеет пустой 3-цикл. Поэтому одно из расстояний — диагональ MN. Тогда рассматриваемая часть многогранника из пяти вершин и восьми ребер представляет собой подвеску 3-го порядка, у которой удалены одно ребро экватора и инцидентные ему грани, т. е. имеем открытый многогранник с девятью вершинами и четырехугольным краем. В результате первого шага алгоритма известны длины диагоналей только для этой части многогранника.

На следующем шаге алгоритма база также обязана содержать диагональ, и есть две возможности: (а) базой является треугольник P_1NS, (б) базой является треугольник P_1P_2N. Остальные случае комбинаторно эквивалентны указанным. Один из концов вычисляемой диагонали является новой вершиной, не входящей в часть многогранника, рассмотренной на первом шаге алгоритма. Отсюда следует, что эта вершина соединяется с вершинами базы ребрами. Добавим эту вершину и ребра к построенной на первом шаге части многогранника. В случае (а) после второго шага получим подвеску 4-го порядка. Случай (б) отвечает операции склейки подвесок. Если полученная часть не совпадает со всем многогранником, то опять имеем открытый многогранник с четырехугольным краем и известны диагонали только для этой части многогранника.

Переходя к вычислению других диагоналей, заметим, что каждое добавление новой вершины в качестве конца диагонали использует в качестве базы вершины, лежащие на крае открытого многогранника из предыдущего шага. Действительно, новая вершина обязана соединяться с базой ребрами, а вторые концы этих ребер могут быть только на крае. Тогда опять имеем две возможности при добавлении: (а) увеличиваем на единицу порядок последней подклеенной подвески, (б) начинаем новую операцию склейки.

Таким образом, указанные выше случаи (а) и (б) повторяются на каждом шаге алгоритма, пока сохраняется край. Это замечание завершает доказательство предложения 2.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору И. Х. Сабитову за постоянное внимание и сотрудничество.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимов И. Г., Сабитов И. Х.* О понятии комбинаторной p-параметричности многогранников // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 823–839.

2. *Глюк Г.* Почти все односвязные замкнутые поверхности неизгибаемы // Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 148–163.

3. *Сабитов И. Х.* Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок // Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 38. С. 109–112.

4. *Максимов И. Г.* Описание строения алгоритмически 1-параметрических многогранников и исследование их изгибаемости. М., 2008. 13 с. Деп. в ВИНИТИ, № 518-В 2008.

5. *Lawrenchenko S., Negami S., Sabitov I. Kh.* A simpler construction of volume polynomials for a polyhedron // Beitr. Algebra Geom. 2003. Bd 43, Heft 1. S. 261–273.

Статья поступила 4 сентября 2009 г., окончательный вариант — 14 ноября 2011 г.

Максимов Игорь Гаврилович
МИОМО, отдел программного и технического обеспечения,
бульв. Строителей, 1, Красногорск Московской обл. 143407
`igmaksimov@rambler.ru`