Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 510.5+519.7

ИССЛЕДОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ФОРМАЛЬНОГО КОНТЕКСТА

С. М. Левенталь

Аннотация. Изучается универсальный формальный контекст. Получен ряд свойств самого контекста, его понятий и решетки, образованной множеством этих понятий. Наиболее значимое из этих свойств представлено теоремой, показывающей, что найдется вложение решетки понятий произвольного не более чем счетного формального контекста в решетку понятий универсального контекста, при котором образ данного вложения будет начальным сегментом в множестве понятий универсального формального контекста с бесконечными объемами, а также справедливость дуального результата. Показано, что данная теорема справедлива и в вычислимом случае. Эта теорема демонстрирует сложность устройства решетки понятий универсального формального контекста.

Ключевые слова: анализ формальных понятий, универсальный формальный контекст, вычислимый формальный контекст, множество понятий универсального формального контекста, решетка понятий универсального формального контекста.

1. Введение

Анализ формальных понятий как направление в математике был введен профессором Рудольфом Вилле в 1982 г. С тех пор это направление получило существенное развитие. Такой метод анализа данных был успешно применен в различных отраслях таких, как медицина, психология, музыковедение, информатика, разработка программного обеспечения. С основными понятиями и идеями этой теории можно ознакомиться по монографии [1].

Со временем появились направления, изучающие алгоритмическое содержание анализа формальных понятий: временную и емкостную сложность алгоритмов для конечных формальных контекстов. А. С. Морозов и М. А. Львова впервые рассмотрели анализ формальных понятий с точки зрения классической и обобщенной теории вычислимости [2]. В данной работе исследуются универсальный формальный контекст, впервые введенный в работе [3], и его решетка понятий.

Напомним, что *формальным контекстом* [1] называется тройка $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash\rangle$, где G, M — множества, $\vDash \subseteq G \times M$ — бинарное отношение. В дальнейшем будем считать G и M непустыми не более чем счетными множествами, формальный контекст $\mathfrak{F}$ при этом будет называться *счетным*. Множества G и M понимаются соответственно как семейство объектов и семейство их свойств. Отношение $\vDash$, которое будем называть *отношением удовлетворимости*, содержит информацию о выполнимости свойств из M на объектах из G, т. е. для $a \in A$, $b \in B$ запись $a \vDash b$ означает, что объект a удовлетворяет свойству b. Пусть $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $a \in A$, $b \in B$. Далее будут использоваться следующие сокращения:

$$A \vDash B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A)(\forall y \in B)(x \vDash y),$$

$$a \vDash B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall y \in B)(a \vDash y), \quad A \vDash b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A)(x \vDash b).$$

Также для удобства будут использоваться сокращения вида

$$a \nVDash B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall y \in B)(a \nvDash y), \quad A \nVDash b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A)(x \nvDash b).$$

Заметим, что $a \nVDash B$ не эквивалентно $\neg(a \vDash B)$ и соответственно $A \nVDash b$ не эквивалентно $\neg(A \vDash b)$.

Обозначим $A' = \{m \in M \mid A \vDash m\}$, $B' = \{g \in G \mid g \vDash B\}$. В данных обозначениях пара $\langle A, B\rangle$ называется *понятием* [1] формального контекста $\mathfrak{F}$, если $A = B'$, $B = A'$. Множество A называется *объемом*, множество B — *содержанием* понятия $\langle A, B\rangle$.

Формальные понятия могут быть естественным образом упорядочены. Пусть $\alpha_1 = \langle A_1, B_1\rangle$, $\alpha_2 = \langle A_2, B_2\rangle$ — два понятия формального контекста $\mathfrak{F}$. Тогда понятие α_1 называется *подпонятием* α_2, если $A_1 \subseteq A_2$ (что эквивалентно $B_2 \subseteq B_1$). В этом случае α_2 называется *надпонятием* α_1. Обозначаем $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Отношение $\leq$ называется *иерархическим порядком* (*простым порядком*) на понятиях. По основной теореме на решетках понятий из [1] множество всех понятий формального контекста с простым порядком образует полную решетку, а любая полная решетка L изоморфна решетке понятий формального контекста $\mathfrak{F} = \langle L, L, \leq\rangle$.

Счетный формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash\rangle$ называется *вычислимым* [2], если G, M — вычислимые множества и $\vDash \subseteq G \times M$ — вычислимое отношение.

Теперь переходим к основному определению данной работы.

Определение 1. *Универсальным формальным контекстом* называется счетный формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash\rangle$, удовлетворяющий следующим свойствам.

1^0. Для любых двух конечных непересекающихся множеств $G', G'' \subseteq G$ существует $m \in M$ такой, что $G' \vDash m$ и $G'' \nVDash m$.

2^0. Для любых двух конечных непересекающихся множеств $M', M'' \subseteq M$ существует $g \in G$ такой, что $g \vDash M'$ и $g \nVDash M''$.

То, что данное определение имеет смысл, т. е. что существует формальный контекст, удовлетворяющий определению, показывает формальный контекст $\mathfrak{F}^*$ [3], построение которого приводится в следующем примере.

Пример 1. Формальный контекст $\mathfrak{F}^* = \langle \omega, \omega, \vDash^*\rangle$ строится по шагам. К концу каждого шага n построены множества $G_n, M_n \subseteq \omega$ и отношение удовлетворимости на них — $\vDash^*_n \subseteq G_n \times M_n$.

Шаг 0. $G_0 = M_0 = \varnothing$, $\vDash^*_0 = \varnothing$.

Шаг n. Перечислим в G_n все элементы множества G_{n-1}, в M_n — все элементы множества M_{n-1} и в $\vDash^*_n$ — все элементы $\vDash^*_{n-1}$.

Часть 1. Рассмотрим все разбиения множества M_n на два непересекающихся множества M' и M'' таких, что $M_n = M' \cup M''$. Пусть число таких разбиений равно k_M. Сделаем k_M подшагов, на каждом из которых будем рассматривать одно из k_M разбиений.

Подшаг i. Рассмотрим i-е разбиение M_n на множества M'_i и M''_i. Выбираем наименьшее $g_i \in \omega$ такое, что $g_i \notin G_n$, и полагаем

$$g_i \vDash^*_n M'_i, \quad g_i \nVDash^*_n M''_i.$$

Перечисляем объект g_i в множество G_n.

Часть 2. Рассмотрим все разбиения множества G_n на два непересекающихся множества G' и G'' таких, что $G_n = G' \cup G''$. Пусть число таких разбиений равно k_G. Сделаем k_G подшагов, на каждом из которых будем рассматривать одно из k_G разбиений.

Подшаг j. Рассмотрим j-е разбиение G_n на множества G'_j и G''_j. Выбираем наименьшее $m_j \in \omega$ такое, что $m_j \notin M_n$, и полагаем

$$G'_j \vDash^*_n m_j, \quad G''_j \nvDash^*_n m_j.$$

Перечисляем свойство m_j в множество M_n.

Полагаем $G = \bigcup\limits_{n\in\omega} G_n = \omega$, $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n = \omega$, $\vDash^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} \vDash^*_n$. Построенный контекст $\mathfrak{F}^* = \langle \omega, \omega, \vDash^* \rangle$, очевидно, удовлетворяет свойствам универсального формального контекста. $\square$

2. Свойства универсальных формальных контекстов

Предложение 1. *Множества объектов и свойств в любом универсальном формальном контексте бесконечны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$ — произвольный универсальный формальный контекст. Докажем первую часть предложения от противного. Допустим, что множество объектов $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$ конечно и его мощность равна n.

Случай 1^0. Мощность множества свойств $\mathfrak{F}$ больше либо равна n. Пусть $\{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M$. Рассмотрим конечные непересекающиеся множества $\{m_1\}, \varnothing \subseteq M$. По определению универсального формального контекста для них найдется объект $g \in G$ такой, что $g \vDash m_1$ и $g \nvDash \varnothing$. Обозначим его через g_1. Рассуждая аналогичным образом, получаем следующий ряд утверждений:

$$\exists g_1 \in G \mid g_1 \vDash \{m_1\},\ g_1 \nvDash \varnothing,$$

$$\exists g_2 \in G \mid g_2 \vDash \{m_2\},\ g_2 \nvDash \{m_1\},$$

$$\exists g_3 \in G \mid g_3 \vDash \{m_3\},\ g_3 \nvDash \{m_1, m_2\},$$

$$\ldots$$

$$\exists g_n \in G \mid g_n \vDash \{m_n\},\ g_n \nvDash \{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}\},$$

$$\exists g_{n+1} \in G \mid g_{n+1} \vDash \varnothing,\ g_{n+1} \nvDash \{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n\}.$$

При этом $g_i \neq g_j$ для $i < j$, так как $g_i \vDash m_i$, $g_j \nvDash m_i$. Таким образом, мощность G больше либо равна $n+1$; противоречие.

Случай 2^0. Мощность множества свойств $\mathfrak{F}$ меньше n. Тогда мощность множества объектов больше либо равна мощности множества свойств и мы приходим к противоречию, как в случае 1^0, поменяв местами объекты и свойства.

Утверждение о бесконечности множества свойств произвольного универсального формального контекста доказывается полностью аналогично. $\square$

Предложение 2. *Любой универсальный формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash\rangle$ обладает следующими свойствами.*

1^0. *Для любых двух конечных непересекающихся множеств $G', G'' \subseteq G$ существует бесконечное число $m \in M$ таких, что $G' \vDash m$ и $G'' \nvDash m$.*

2^0. *Для любых двух конечных непересекающихся множеств $M', M'' \subseteq M$ существует бесконечное число $g \in G$ таких, что $g \vDash M'$ и $g \nvDash M''$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash\rangle$ — произвольный универсальный формальный контекст.

Покажем выполнение свойства 1^0 от противного. Допустим, что существует пара конечных непересекающихся множеств $G', G'' \subseteq G$ таких, что число $m \in M$ таких, что $G' \vDash m$ и $G'' \nvDash m$, конечно. Обозначим множество таких m через $\widetilde{M}$, пусть мощность $\widetilde{M}$ равна n. Множество $G \setminus (G' \cup G'')$ бесконечно по предложению 1, пусть $G \setminus (G' \cup G'') = \{g_1, g_2, \dots\}$. По определению универсального формального контекста справедлив следующий ряд утверждений:

$$\exists m_1 \in M \mid G' \cup \{g_1\} \vDash m_1,\ G'' \nvDash m_1,$$

$$\exists m_2 \in M \mid G' \cup \{g_2\} \vDash m_2,\ G'' \cup \{g_1\} \nvDash m_2,$$

$$\exists m_3 \in M \mid G' \cup \{g_3\} \vDash m_3,\ G'' \cup \{g_1, g_2\} \nvDash m_3,$$

$$\dots$$

$$\exists m_n \in M \mid G' \cup \{g_n\} \vDash m_n,\ G'' \cup \{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\} \nvDash m_n,$$

$$\exists m_{n+1} \in M \mid G' \cup \{g_{n+1}\} \vDash m_{n+1},\ G'' \cup \{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, g_n\} \nvDash m_{n+1}.$$

Для любого $i = \overline{1, n+1}$ свойство m_i принадлежит $\widetilde{M}$, так как $G' \vDash m_i$ и $G'' \nvDash m_i$. При этом $m_i \neq m_j$ для $i < j$, поскольку $g_i \vDash m_i$, $g_i \nvDash m_j$. Таким образом, мощность $\widetilde{M}$ больше либо равна $n+1$; противоречие.

Свойство 2^0 доказывается полностью аналогично. $\square$

Два формальных контекста $\mathfrak{F}^1 = \langle G^1, M^1, \vDash^1\rangle$, $\mathfrak{F}^2 = \langle G^2, M^2, \vDash^2\rangle$ будем называть *изоморфными*, если существует пара отображений $\langle f^G, f^M\rangle$ таких, что $f^G : G^1 \to G^2$, $f^M : M^1 \to M^2$ — биекции и для любой пары $\langle a, b\rangle \in G^1 \times M^1$

$$a \vDash^1 b \Leftrightarrow f^G(a) \vDash^2 f^M(b).$$

Отображение $f = \langle f^G, f^M\rangle$ называется *изоморфизмом* $\mathfrak{F}^1$ на $\mathfrak{F}^2$. В случае вычислимых формальных контекстов будем говорить, что изоморфизм f *вычислимый*, если оба отображения f^G и f^M вычислимые.

Предложение 3. *Существует единственный с точностью до изоморфизма универсальный формальный контекст.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}^1 = \langle G^1, M^1, \vDash^1\rangle$, $\mathfrak{F}^2 = \langle G^2, M^2, \vDash^2\rangle$ — произвольные универсальные формальные контексты. Построим изоморфизм между этими контекстами. Отображения f^G, f^M будут строиться по шагам. К концу каждого шага n построены множества G^1_n, M^1_n, G^2_n, M^2_n и биективные отображения на них: $f^G_n \subseteq G^1_n \times G^2_n$, $f^M_n \subseteq M^1_n \times M^2_n$, такие, что для любой пары $\langle a, b\rangle \in G^1_n \times M^1_n$

$$a \vDash^1 b \Leftrightarrow f^G(a) \vDash^2 f^M(b).$$

Шаг 0. $G^1_0 = M^1_0 = G^2_0 = M^2_0 = \varnothing$, $f^G_0 = f^M_0 = \varnothing$.

Шаг $n+1$. Состоит из четырех частей.

Подшаг 1.1. Выберем наименьший элемент $g_1^{\cdot} \in G^1 \setminus G_n^1$. Обозначим через $M_n^{1'}$ ту часть множества M_n^1, для которой $g_1^{\cdot} \vDash^1 M_n^{1'}$, и через $M_n^{1''}$ — ту часть множества M_n^1, для которой $g_1^{\cdot} \nvDash^1 M_n^{1''}$. Рассмотрим множества

$$f_n^M\big(M_n^{1'}\big), f_n^M\big(M_n^{1''}\big) \subseteq M_n^2.$$

Это конечные непересекающиеся множества, так как построенное на предыдущих шагах отображение f_n^M является биекцией. По предложению 2 существует бесконечное число $g \in G^2$ таких, что

$$g \vDash^2 f_n^M\big(M_n^{1'}\big), \quad g \nvDash^2 f_n^M\big(M_n^{1''}\big).$$

Множество G_n^2 конечно, значит, найдется $g_2^{\cdot} \in G^2 \setminus G_n^2$ с таким условием. Положим

$$G_{n+}^1 = G_n^1 \cup \{g_1^{\cdot}\}, \quad G_{n+}^2 = G_n^2 \cup \{g_2^{\cdot}\}, \quad f_{n+}^G = f_n^G \cup \langle g_1^{\cdot}, g_2^{\cdot}\rangle.$$

Подшаг 1.2. Полностью аналогичным подшагу 1.1 образом выбираются $m_1^{\cdot}$, $m_2^{\cdot}$. Положим

$$M_{n+}^1 = M_n^1 \cup \{m_1^{\cdot}\}, \quad M_{n+}^2 = M_n^2 \cup \{m_2^{\cdot}\}, \quad f_{n+}^M = f_n^M \cup \langle m_1^{\cdot}, m_2^{\cdot}\rangle.$$

Подшаг 2.1. Выберем наименьший элемент $g_2^{\cdot\cdot} \in G^2 \setminus G_{n+}^2$. Обозначим через $M_{n+}^{2'}$ ту часть множества M_{n+}^2, для которой $g_2^{\cdot\cdot} \vDash^2 M_{n+}^{2'}$, и через $M_{n+}^{2''}$ — ту часть множества M_{n+}^2, для которой $g_2^{\cdot\cdot} \nvDash^2 M_{n+}^{2''}$. Рассмотрим множества

$$\big(f_{n+}^M\big)^{-1}\big(M_{n+}^{2'}v\big), \big(f_{n+}^M\big)^{-1}\big(M_{n+}^{2''}\big) \subseteq M_{n+}^1.$$

Это конечные непересекающиеся множества, так как построенное на предыдущих шагах отображение f_{n+}^M является биекцией. По предложению 2 существует бесконечное число $g \in G^1$ таких, что

$$g \vDash^1 \big(f_{n+}^M\big)^{-1}\big(M_{n+}^{2'}\big), \quad g \nvDash^1 \big(f_{n+}^M\big)^{-1}\big(M_{n+}^{2''}\big).$$

Множество G_{n+}^1 конечно, значит, найдется $g_1^{\cdot\cdot} \in G^1 \setminus G_{n+}^1$ с таким условием. Положим

$$G_{n+1}^1 = G_{n+}^1 \cup \{g_1^{\cdot\cdot}\}, \quad G_{n+1}^2 = G_{n+}^2 \cup \{g_2^{\cdot\cdot}\}, \quad f_{n+1}^G = f_{n+}^G \cup \langle g_1^{\cdot\cdot}, g_2^{\cdot\cdot}\rangle.$$

Подшаг 2.2. Полностью аналогичным подшагу 2.1 образом выбираются $m_1^{\cdot\cdot}$, $m_2^{\cdot\cdot}$. Положим

$$M_{n+1}^1 = M_{n+}^1 \cup \{m_1^{\cdot\cdot}\}, \quad M_{n+1}^2 = M_{n+}^2 \cup \{m_2^{\cdot\cdot}\}, \quad f_{n+1}^M = f_{n+}^M \cup \langle m_1^{\cdot\cdot}, m_2^{\cdot\cdot}\rangle.$$

Полагаем $f^G = \bigcup\limits_{n\in\omega} f_n^G$, $f^M = \bigcup\limits_{n\in\omega} f_n^M$.

Из построения очевидно, что отображения f^G, f^M являются биекциями множества G^1 на G^2 и множества M^1 на M^2 соответственно. Таким образом, любые два универсальных формальных контекста изоморфны. □

Следствие 1. *Существует единственный с точностью до вычислимого изоморфизма вычислимый универсальный формальный контекст.*

Доказательство. При условии вычислимости контекстов доказательство предложения 3 дает алгоритм построения отображений f_G, f_M, а значит, построенные отображения будут вычислимы. □

Таким образом, далее под универсальным формальным контекстом подразумевается этот единственный с точностью до изоморфизма контекст.

3. Свойства понятий универсального формального контекста

Предложение 4. *Любое конечное множество объектов является объемом некоторого понятия универсального формального контекста, а любое конечное множество свойств — содержанием некоторого понятия универсального формального контекста.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$ — универсальный формальный контекст. Пусть A — конечное подмножество G. Покажем, что найдется $B \subseteq M$ такое, что $\langle A, B \rangle$ — понятие $\mathfrak{F}$.

Положим $\widetilde{B} = A'$. Покажем, что $\langle A, \widetilde{B} \rangle$ — искомое понятие. Для этого достаточно показать, что $A = \widetilde{B}'$. Включение $A \subseteq \widetilde{B}'$, эквивалентное $A \vDash \widetilde{B}$, очевидно, выполнено. Покажем $\widetilde{B}' \subseteq A$ от противного. Допустим существует $g \in G$ такое, что $g \vDash \widetilde{B}$, но $g \notin A$. Рассмотрим A и $\{g\}$ — конечные непересекающиеся подмножества G. По определению универсального формального контекста найдется $m \in M$ такое, что $A \vDash m$, $\{g\} \nvDash m$. Из $A \vDash m$ следует $m \in \widetilde{B}$ по определению $\widetilde{B}$. Значит, $g \vDash m$ по определению g; противоречие.

Пусть B — конечное подмножество M. Существование $A \subseteq G$ такого, что $\langle A, B \rangle$ — понятие $\mathfrak{F}$, показывается аналогично. □

Предложение 5. *В универсальном формальном контексте не существует понятия, у которого множество объектов и множество свойств конечны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$ — универсальный формальный контекст. Покажем от противного, что в $\mathfrak{F}$ не существует понятия, у которого множество объектов и множество свойств конечны. Действительно, допустим, что такое понятие $\langle A, B \rangle$ существует. Множество A конечно, значит, по предложению 2 найдется бесконечное число различных $m \in M$ таких, что $A \vDash m$ и $\varnothing \nvDash m$. Все такие m будут принадлежать множеству B по определению формального понятия. Значит, множество B бесконечно; противоречие. □

Предложение 6. *В универсальном формальном контексте не существует объекта, удовлетворяющего всем свойствам, и не существует свойства, которому удовлетворяют все объекты.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$ — универсальный формальный контекст. Будем вести доказательство от противного. Предположим, что существует объект $a \in G$ такой, что $a \vDash M$. Но по определению универсального формального контекста найдется $b \in M$ такое, что $\{a\} \nvDash b$; противоречие.

Аналогично доказывается, что не существует $b \in M$ такого, что $G \vDash b$. □

Замечание 1. Из предложения 6 следует, что пары множеств $\langle \varnothing, M \rangle$, $\langle G, \varnothing \rangle$ являются понятиями в универсальном формальном контексте $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$.

Предложение 7. *В универсальном формальном контексте не существует понятия, у которого дополнение объема или содержания конечно и непусто.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$ — универсальный формальный контекст. Покажем, что в $\mathfrak{F}$ не существует понятия, у которого дополнение объема конечно, при этом непусто от противного. Действительно, допустим, что в универсальном формальном контексте существует такое понятие $\langle A, B \rangle$, что множество $G \setminus A$ конечно и непусто. Пусть мощность $G \setminus A$ равна n.

Случай 1^0. Множество B бесконечно. Обозначим его элементы через $B = \{b_1, b_2, \dots\}$. По определению универсального формального контекста справедлив следующий ряд утверждений:

$$\exists g_2 \in G \mid g_2 \models \{b_2\},\ g_2 \not\models \{b_1\},$$

$$\exists g_3 \in G \mid g_3 \models \{b_3\},\ g_3 \not\models \{b_1, b_2\},$$

$$\dots$$

$$\exists g_{n+1} \in G \mid g_{n+1} \models \{b_{n+1}\},\ g_{n+1} \not\models \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n\},$$

$$\exists g_{n+2} \in G \mid g_{n+2} \models \{b_{n+2}\},\ g_{n+2} \not\models \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}\}.$$

Для любого $i = \overline{2, n+2}$ объект g_i не принадлежит множеству A, так как $g_i \not\models b_{i-1}$, а значит, $g_i \not\models B$. При этом $g_i \neq g_j$ для $i < j$, поскольку $g_i \models b_i$, $g_j \not\models b_i$. Таким образом, мощность множества $G \setminus A$ больше либо равна $n+1$; противоречие.

Случай 2^0. Множество B конечно. Значит, множество $M \setminus B$ бесконечно. Обозначим его элементы через $M \setminus B = \{m_1, m_2, \dots\}$. При этом $B \neq \varnothing$. Действительно, допустим, что $B = \varnothing$. Тогда по замечанию 1 объем понятия $\langle A, \varnothing\rangle$ равен G. Тем самым $G \setminus A = G \setminus G = \varnothing$; противоречие. Таким образом, найдется элемент $b_1 \in B$. По определению универсального формального контекста справедлив следующий ряд утверждений:

$$\exists g_1 \in G \mid g_1 \models \{m_1\},\ g_1 \not\models \{b_1\},$$

$$\exists g_2 \in G \mid g_2 \models \{m_2\},\ g_2 \not\models \{b_1, m_1\},$$

$$\exists g_3 \in G \mid g_3 \models \{m_3\},\ g_3 \not\models \{b_1, m_1, m_2\},$$

$$\dots$$

$$\exists g_n \in G \mid g_n \models \{m_n\},\ g_n \not\models \{b_1, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}\},$$

$$\exists g_{n+1} \in G \mid g_{n+1} \models \{m_{n+1}\},\ g_{n+1} \not\models \{b_1, m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n\}.$$

Для любого $i = \overline{1, n+1}$ объект g_i не принадлежит множеству A, так как $g_i \not\models b_1$, а значит, $g_i \not\models B$. При этом $g_i \neq g_j$ для $i < j$, поскольку $g_i \models m_i$, $g_j \not\models m_i$. Таким образом, мощность множества $G \setminus A$ больше либо равна $n+1$; противоречие.

Отсутствие понятия $\langle A, B\rangle$ универсального формального контекста $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$ такого, что множество $M \setminus B$ конечно и непусто, доказывается аналогично. $\square$

4. Свойства множества понятий универсального формального контекста

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}^\star$ — универсальный формальный контекст. Любой не более чем счетный формальный контекст $\mathfrak{F}$ изоморфен некоторому его подконтексту $\mathfrak{F}^\diamond = \langle G^\diamond, M^\diamond, \models^\diamond\rangle$ такому, что*

1^0) *любое бесконечное множество $A \subseteq G^\diamond$ является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\diamond$ тогда и только тогда, когда A является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\star$;*

2^0) *любое бесконечное множество* $B \subseteq M^\diamond$ *является содержанием некоторого понятия контекста* $\mathfrak{F}^\diamond$ *тогда и только тогда, когда* B *является содержанием некоторого понятия контекста* $\mathfrak{F}^\star$.

Доказательство. По предложению 3 существует единственный с точностью до изоморфизма универсальный формальный контекст. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно взять подходящий контекст $\mathfrak{F}^\circ = \langle G^\circ, M^\circ, \vDash^\circ\rangle$, изоморфный $\mathfrak{F}$, и расширить его до некоторого универсального контекста $\mathfrak{F}^*$ такого, что

1^0) любое бесконечное множество $A \subseteq G^\circ$ является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$ в том и только в том случае, если A является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$;

2^0) любое бесконечное множество $B \subseteq M^\circ$ является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$ в том и только в том случае, если B является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$.

Для не более чем счетного контекста $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash\rangle$ всегда можно выбрать изоморфный ему контекст $\mathfrak{F}^\circ = \langle G^\circ, M^\circ, \vDash^\circ\rangle$ такой, что $G^\circ \subseteq \omega$, $M^\circ \subseteq \omega$ и множества $\omega \setminus G^\circ$, $\omega \setminus M^\circ$ бесконечные и счетные. Для этого элементам множеств G и M сопоставляем их гёделевские номера, а затем любому n из G или M сопоставляем $2n$. Значит, элементы множеств $\omega \setminus G^\circ$, $\omega \setminus M^\circ$ можно занумеровать тройками $\langle i, j, k\rangle$, где $i, j < \omega$ и $k \in \{1, 2\}$. Обозначим

$$\omega \setminus G^\circ = \{g_{ijk}\}_{i,j<\omega, k\in\{1,2\}}, \quad \omega \setminus M^\circ = \{m_{ijk}\}_{i,j<\omega, k\in\{1,2\}}.$$

Расширим контекст $\mathfrak{F}^\circ$ до универсального. Расширение будет производиться по шагам, на каждом шаге n будет построен формальный контекст $\mathfrak{F}_\mathfrak{n} = \langle G_n, M_n, \vDash_n\rangle$ так, что выполняются следующие условия:

1.1^0) для любого конечного подмножества $A \subseteq G_{n-1}$ найдется $m \in M_n$ такое, что $A \vDash_n m$ и $G_{n-1} \setminus A \nvDash_n m$;

1.2^0) для любого конечного подмножества $B \subseteq M_{n-1}$ найдется $g \in G_n$ такое, что $g \vDash_n B$ и $g \nvDash_n M_{n-1} \setminus B$;

2.1^0) для любого $g \in G_{n-1} \setminus G^\circ$ найдется $m \in M_n$ такое, что $G^\circ \vDash_n m$ и $g \vDash_n m$;

2.2^0) для любого $m \in M_{n-1} \setminus M^\circ$ найдется $g \in G_n$ такое, что $g \vDash_n M^\circ$ и $g \vDash_n m$.

Теперь перейдем к формальному доказательству и покажем, как осуществить такое расширение на практике. Каждый пункт вышеприведенных требований осуществляется на подшаге с соответствующим номером.

Шаг 0. Положим $G_0 = G^\circ$, $M_0 = M^\circ$, $\vDash_0 = \vDash^\circ$.

Шаг $n+1$. К концу шага n построены множества G_n, M_n, $\vDash_n$.

Подшаг 1.1. Пусть $\mathscr{G}$ — множество всех конечных подмножеств G_n. Обозначим $\{A_i\}_{i<\omega} = \mathscr{G}$, если $\mathscr{G}$ бесконечно. Если $\mathscr{G}$ конечно, то обозначим $\{A_i\}_{i\le|\mathscr{G}|} = \mathscr{G}$ и $A_i = G_n$ для любого $i > |\mathscr{G}|$. Положим

$$M_{n_{1.1}} = M_n \cup \bigcup_{i<\omega}\{m_{in1}\}, \quad \vDash_{n_{1.1}} = \vDash_n \cup \bigcup_{i<\omega}(A_i \times \{m_{in1}\}).$$

Подшаг 1.2. Пусть $\mathscr{M}$ — множество всех конечных подмножеств M_n. Обозначим $\{B_i\}_{i<\omega} = \mathscr{M}$, если $\mathscr{M}$ бесконечно. Если $\mathscr{M}$ конечно, то обозначим

$\{B_i\}_{i\leq|\mathscr{M}|} = \mathscr{M}$ и $B_i = M_n$ для любого $i > |\mathscr{M}|$. Положим

$$G_{n_{1.2}} = G_n \cup \bigcup_{i<\omega}\{g_{in1}\}, \quad \vDash_{n_{1.2}} = \vDash_{n_{1.1}} \cup \bigcup_{i<\omega}(\{g_{in1}\} \times B_i).$$

Подшаг 2.1. Пусть $\{g_i\}_{i<\omega} = G_{n_{1.2}} \setminus G^\circ$. Положим

$$M_{n+1} = M_{n_{1.1}} \cup \bigcup_{i<\omega}\{m_{in2}\}, \quad \vDash_{n_{2.1}} = \vDash_{n_{1.2}} \cup \bigcup_{i<\omega}((G^\circ \cup \{g_i\}) \times \{m_{in2}\}).$$

Подшаг 2.2. Пусть $\{m_i\}_{i<\omega} = M_{n+1} \setminus M^\circ$. Положим

$$G_{n+1} = G_{n_{1.2}} \cup \bigcup_{i<\omega}\{g_{in2}\}, \quad \vDash_{n+1} = \vDash_{n_{2.1}} \cup \bigcup_{i<\omega}(\{g_{in2}\} \times (M^\circ \cup \{m_i\})),$$

$$G^* = \bigcup_{n<\omega} G_n = \omega, \quad M^* = \bigcup_{n<\omega} M_n = \omega, \quad \vDash^* = \bigcup_{n<\omega} \vDash_n .$$

Лемма 1. *Формальный контекст $\mathfrak{F}^* = \langle G^*, M^*, \vDash^*\rangle$ универсален.*

Доказательство. Покажем выполнение первого свойства универсального контекста, сообщающего, что для любых двух конечных непересекающихся множеств $G', G'' \subseteq G^*$ существует $m \in M^*$ такое, что $G' \vDash^* m$ и $G'' \nvDash^* m$. Возьмем произвольные $G', G'' \subseteq G^*$ с соответствующими условиями. По построению формального контекста найдется n такое, что $G', G'' \subseteq G_n$, а значит, на подшаге 1.1 шага $n+1$ в M_{n+1} будут перечислен элемент m такой, что $G' \vDash^* m$ и $G'' \nvDash^* m$.

Аналогично показывается выполнение второго свойства универсального контекста. Необходимый элемент добавляется в множество G_{n+1} на подшаге 1.2 шага $n+1$. $\square$

Лемма 2. 1^0. *Для любого $m \in M^* \setminus M^\circ$ множество $\{g \in G^\circ \mid g \vDash^* m\}$ конечно или равно G°.*

2^0. *Для любого $g \in G^* \setminus G^\circ$ множество $\{m \in M^\circ \mid g \vDash^* m\}$ конечно или равно M°.*

Доказательство. Докажем п. 1^0. По построению $\mathfrak{F}^*$ элементы могут попадать в $M^* \setminus M^\circ$ на подшагах 1.1 и 2.1.

Случай 1^0: m' попало в $M^* \setminus M^\circ$ на подшаге 1.1 шага n. Тогда

$$A_i \vDash_n m', \quad G_{n-1} \setminus A_i \nvDash_n m'$$

для некоторого A_i — конечного подмножества G_{n-1}. Таким образом, на шаге n отношение $\vDash^*$ определено на всем множестве $G^\circ \times m'$ ввиду $G^\circ \subseteq G_{n-1}$. Значит, множество $\{g \in G^\circ \mid g \vDash^* m'\}$ конечно.

Случай 2^0: m' попало в $M^* \setminus M^\circ$ на подшаге 2.1 шага n. Тогда

$$G^\circ \cup \{g_i\} \vDash_n m', \quad G_n \setminus (G^\circ \cup \{g_i\}) \nvDash_n m'$$

для некоторого $g_i \in G_n$. Таким образом, на шаге n отношение $\vDash^*$ определено для всего множества $G^\circ \times m'$. Значит, $\{g \in G^\circ \mid g \vDash^* m'\} = G^\circ$.

П. 2^0 доказывается полностью аналогично. $\square$

Лемма 3. 1^0. *Любое бесконечное множество $A \subseteq G^\circ$ является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$ только тогда, когда A является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$.*

2^0. *Любое бесконечное множество $B \subseteq M^\circ$ является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$ только тогда, когда B является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$.*

Доказательство. Докажем п. 1^0. Если G° конечно, то утверждение тривиально, поэтому без ограничения общности считаем, что G° бесконечно. Рассмотрим произвольное бесконечное множество $A \subseteq G^\circ$ такое, что $\langle A, B^* \rangle$ — понятие $\mathfrak{F}^*$. Покажем, что найдется $B \subseteq M^\circ$ такое, что $\langle A, B \rangle$ — понятие $\mathfrak{F}^\circ$.

Множество B^* можно разбить на два непересекающихся подмножества

$$B^* = B_{in} \cup B_{out}, \text{ где } B_{in} \subseteq M^\circ, \quad B_{out} \subseteq M^* \setminus M^\circ.$$

Покажем, что $\langle A, B_{in} \rangle$ является понятием $\mathfrak{F}^\circ$. Для этого необходимо показать выполнение равенств $A = B'_{in}$, $A' = B_{in}$. Очевидно, $A \vDash^\circ B_{in}$, так как $B_{in} \subseteq B^* \cap M^\circ$, т. е. $B_{in} \subseteq A'$ и $A \subseteq B'_{in}$.

Докажем от противного, что $A' \subseteq B_{in}$. Допустим что существует $b \in M^\circ \setminus B_{in}$ такое, что $A \vDash^\circ b$. Значит, $A \vDash^* b$, следовательно, $b \in B^*$. Но $b \in M^\circ$, поэтому $b \in B_{in}$; противоречие.

Теперь покажем от противного, что $B'_{in} \subseteq A$. Допустим существует $a \in G^\circ \setminus A$ такое, что $a \vDash^\circ B_{in}$. Значит, $a \vDash^* B_{in}$. По условию $\langle A, B^* \rangle$ — понятие $\mathfrak{F}^*$, следовательно, $A \vDash^* B_{out}$. Рассмотрим произвольный элемент $m' \in B_{out}$. По условию A — бесконечное подмножество G° и $A \vDash^* m'$. Поэтому множество $\{g \in G^\circ \mid g \vDash^* m'\}$ не конечно. Значит, по лемме 2 это множество равно G°. Таким образом, $G^\circ \vDash^* B_{out}$, следовательно, $a \vDash^* B_{out}$, так как $a \in G^\circ$, т. е. $a \vDash^* B_{in} \cup B_{out} = B^*$. Но тогда $a \in A$; противоречие.

Тем самым доказано, что $\langle A, B_{in} \rangle$ является понятием $\mathfrak{F}^\circ$.

П. 2^0 доказывается полностью аналогично. $\square$

Лемма 4. 1^0. *Любое бесконечное множество $A \subseteq G^\circ$ является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$ только тогда, когда A является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$.*

2^0. *Любое бесконечное множество $B \subseteq M^\circ$ является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$ только тогда, когда B является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$.*

Доказательство. Докажем п. 1^0. Если G° конечно, то утверждение тривиально, поэтому без ограничения общности считаем, что G° бесконечно. Рассмотрим произвольное бесконечное множество $A \subseteq G^\circ$ такое, что $\langle A, B \rangle$ — понятие $\mathfrak{F}^\circ$. Покажем существование B^* такого, что $\langle A, B^* \rangle$ — понятие $\mathfrak{F}^*$.

Пусть $B_{\max}$ — наибольшее подмножество M^*, удовлетворяющее свойству $A \vDash^* B_{\max}$. Докажем, что $\langle A, B_{\max} \rangle$ является понятием $\mathfrak{F}^*$. Для этого необходимо показать выполнение равенств $A = B'_{\max}$, $A' = B_{\max}$. По определению $B_{\max}$ выполнено $A' = B_{\max}$ и $A \subseteq B'_{\max}$.

Покажем от противного, что $B'_{\max} \subseteq A$. Допустим, что найдется $a \in G^* \setminus A$ такое, что $a \vDash^* B_{\max}$.

Случай 1^0: $a \in G^\circ$. Очевидно, $B_{\max} \cap M^\circ = B$, поэтому $a \vDash^\circ B$, а значит, $a \in A$; противоречие.

Случай 2^0: $a \notin G^\circ$. По построению контекста $\mathfrak{F}^*$ можно заключить, что $G^\circ \vDash^* \{m_{ij2}\}_{i,j<\omega}$, а значит, $A \vDash^* \{m_{ij2}\}_{i,j<\omega}$. Отсюда следует, что $\{m_{ij2}\}_{i,j<\omega} \subseteq$

$B_{\max}$. Элемент a может попасть в множество $G^* \setminus G^\circ$ на подшагах 1.2 и 2.2 построения.

Случай 2.1^0: a попало в множество $G^* \setminus G$ на подшаге 1.2 шага n. Тогда $a \not\models_n M_n \setminus B_i$, где B_i — некоторое конечное подмножество M_n. Заметим, что по построению M_n для любого n содержит бесконечное подмножество множества $\{m_{ij2}\}_{i,j<\omega}$. Поскольку B_i конечно, отсюда следует, что найдется свойство $m \in \{m_{ij2}\}_{i,j<\omega}$ такое, что $a \not\models^* m$ и, значит, $a \not\models^* B_{\max}$; противоречие.

Случай 2.2^0: a попало в множество $G^* \setminus G$ на подшаге 2.2 шага n. Тогда $a \not\models_n M_n \setminus (M^\circ \cup \{m_i\})$, где $m_i \in M_n$. Множество M_n содержит бесконечное подмножество множества $\{m_{ij2}\}_{i,j<\omega}$. Поскольку для любых $i, j < \omega$ выполнено $m_{ij2} \notin M^\circ$, отсюда следует, что найдется свойство $m \in \{m_{ij2}\}_{i,j<\omega}$ такое, что $a \not\models^* m$ и, значит, $a \not\models^* B_{\max}$; противоречие. $\square$

Таким образом, по произвольному не более чем счетному формальному контексту $\mathfrak{F}$ мы можем построить изоморфный ему контекст $\mathfrak{F}^\circ$. Затем $\mathfrak{F}^\circ$ можно расширить до универсального формального контекста (по лемме 1) $\mathfrak{F}^*$, для которого выполнены требуемые условия (по леммам 3 и 4). $\square$

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}^\star$ — вычислимый универсальный формальный контекст. Любой вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$ вычислимо изоморфен некоторому его подконтексту $\mathfrak{F}^\diamond = \langle G^\diamond, M^\diamond, \models^\diamond\rangle$ такому, что*

1^0) *любое бесконечное множество $A \subseteq G^\diamond$ является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\diamond$ тогда и только тогда, когда A является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\star$;*

2^0) *любое бесконечное множество $B \subseteq M^\diamond$ является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\diamond$ тогда и только тогда, когда B является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\star$.*

Доказательство. По следствию 1 существует единственный с точностью до вычислимого изоморфизма вычислимый универсальный формальный контекст. Таким образом, для доказательства следствия достаточно взять подходящий вычислимый контекст $\mathfrak{F}^\circ = \langle G^\circ, M^\circ, \models^\circ\rangle$, вычислимо изоморфный $\mathfrak{F}$, и расширить его до некоторого вычислимого универсального контекста $\mathfrak{F}^*$ такого, что

1^0) любое бесконечное множество $A \subseteq G^\circ$ является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$ тогда и только тогда, когда A является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$;

2^0) любое бесконечное множество $B \subseteq M^\circ$ является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^\circ$ тогда и только тогда, когда B является содержанием некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}^*$.

Воспользуемся построениями, приведенными в доказательстве теоремы 1.

При построении контекста $\mathfrak{F}^\circ$ всем объектам и свойствам сопоставляются их гёделевские номера, которые, в свою очередь, отображаются в множество четных чисел умножением на два. Построенный изоморфизм вычислим, так как функция Гёделя и функция умножения на два вычислимы. Построенный таким образом формальный контекст $\mathfrak{F}^\circ$ вычислим по построению.

Остается показать, что расширение контекста $\mathfrak{F}^\circ$ до универсального вычислимо. В самом деле, у построенного в доказательстве теоремы 1 универсального формального контекста множество объектов и множества свойств равны ω. Множество $\models^*$ вычислимо по построению. $\square$

Следствие 3. *Множество объектов универсального формального контекста содержит счетное бесконечное подмножество S такое, что любое подмножество S является объемом некоторого понятия универсального контекста.*

Доказательство. Для доказательства следствия достаточно предъявить формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash\rangle$ такой, что любое бесконечное подмножество G будет объемом некоторого понятия $\mathfrak{F}$. В этом случае по предложению 4 и теореме 1 множество объектов универсального формального контекста будет содержать счетное бесконечное подмножество S такое, что любое $A \subseteq S$ является объемом некоторого понятия универсального контекста. Положим

$$G = P = \{p \in \omega \mid p \text{ — простое}\}, \quad M = \omega.$$

Зададим отношение $\vDash$ следующим образом: $p \vDash m \Leftrightarrow p$ не делит m, т. е.

$$\forall p \in P \text{ положим } p \nvDash M_p = \{m \in \omega \mid p \text{ делит } m\} \text{ и } p \vDash M \setminus M_p.$$

Покажем, что любое $A \subseteq P$ является объемом некоторого понятия контекста $\mathfrak{F}$. Рассмотрим произвольное множество $A \subseteq P$. Утверждается, что пара

$$\langle A, B\rangle = \langle A, M \setminus M_A\rangle = \langle A, M \setminus \{m \in \omega \mid (\exists a \in A)(a \text{ делит } m)\}\rangle$$

является понятием $\mathfrak{F}$.

Докажем, что $A = B' = \{g \in G \mid g \vDash B\}$. Покажем сначала, что выполнено включение $A \subseteq B'$. Действительно, пусть $p \in A$. По определению $\vDash$ имеем $p \vDash M \setminus M_p$. Нужно доказать, что $p \vDash B$, а для этого достаточно показать, что $B = M \setminus M_A \subseteq M \setminus M_p$, что эквивалентно $M_p \subseteq M_A$. Но, очевидно, если $m \in M_p$, т. е. p делит m, то $m \in M_A$, так как $p \in A$. Таким образом, $A \subseteq B'$.

Покажем обратное включение от противного. Допустим, что существует $p \in B'$ такое, что $p \notin A$. По определению $\vDash$ имеем $p \vDash M \setminus M_p$ и $p \nvDash M_p$. В то же время $p \in B'$, следовательно, должно выполняться $p \vDash B$, значит, $B = M\setminus M_A \subseteq M\setminus M_p$, что эквивалентно $M_p \subseteq M_A$, т. е. для любого $m \in M = \omega$ из того, что p делит m, следует, существование $a \in A$ такого, что a делит m. Взяв $m = p$, приходим к противоречию, так как $p \notin A$ и p простое.

Теперь покажем, что $B = A' = \{m \in M \mid A \vDash m\}$. Включение $B \subseteq A'$ эквивалентно $A \vDash B$, что эквивалентно $A \subseteq B'$, а значит, уже доказано.

Покажем, что $A' \subseteq B$ от противного. Допустим, что существует $m \in M$ такое, что $A \vDash m$, но $m \notin B$. Из $m \notin B = M \setminus M_A$ следует, что $m \in M_A$, т. е. существует $a \in A$ такое, что a делит m. Но тогда $a \nvDash m$ и, значит, $m \notin A'$; противоречие. $\square$

Следствие 4. *Множество понятий универсального формального контекста континуально.*

Доказательство. Ввиду следствия 3 мощность множества всех понятий универсального формального контекста больше либо равна мощности всех подмножеств счетного бесконечного множества, а она равна континууму. С другой стороны, по определению формальных понятий у формального контекста не существует двух различных понятий с одинаковыми объемами. Таким образом, количество понятий формального контекста не больше, чем количество различных подмножеств счетного множества объектов этого контекста, а оно равно континууму. $\square$

5. Свойства решетки формальных понятий универсального контекста

Теорема 2. *Решетка формальных понятий L любого не более чем счетного формального контекста $\mathfrak{F}$ вложима в решетку формальных понятий $L^\star$ универсального формального контекста $\mathfrak{F}^\star$. Более того, имеют место следующие утверждения:*

1^0) *существует вложение L в $L^\star$, образ которого является начальным сегментом в $L^\star \setminus F_G$, где F_G — множество всех понятий универсального формального контекста $\mathfrak{F}^\star$, имеющих конечные объемы;*

2^0) *существует вложение L в $L^\star$, образ которого является конечным сегментом в $L^\star \setminus F_M$, где F_M — множество всех понятий универсального формального контекста $\mathfrak{F}^\star$, имеющих конечные содержания.*

Доказательство. Пусть L — решетка формальных понятий произвольного не более чем счетного формального контекста $\mathfrak{F} = \langle G, M, \vDash \rangle$.

Покажем справедливость первого утверждения теоремы. Для этого предъявим $L^\bullet$ — подрешетку $L^\star$, изоморфную решетке L с соответствующим условием.

Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ контекст, равный $\langle G \times \omega, M, \vDash_1 \rangle$, где $\vDash_1$ задается следующим образом:

$$\forall g \in G \; \forall m \in M \quad \{g\} \times \omega \vDash_1 m \Leftrightarrow g \vDash m.$$

Обозначим через L_1 решетку формальных понятий $\mathfrak{F}_1$. Пусть $\mathfrak{F}^\diamond$ — подконтекст универсального формального контекста $\mathfrak{F}^\star$, изоморфный контексту $\mathfrak{F}_1$ и построенный, как в теореме 1. Тогда решетка $L^\diamond$ понятий контекста $\mathfrak{F}^\diamond$ изоморфна решетке L. Действительно, изоморфное отображение $\varphi : L \to L^\diamond$ сопоставляет любому понятию $\langle A, B \rangle$ контекста $\mathfrak{F}$ понятие $\langle f^G(A \times \omega), f^M(B) \rangle$ контекста $\mathfrak{F}^\diamond$, где $\langle f^G, f^M \rangle$ — изоморфизм $\mathfrak{F}_1$ на $\mathfrak{F}^\diamond$.

Теперь построим изоморфизм решетки $L^\diamond$ на $L^\bullet$ — подрешетку $L^\star$. Для этого любому понятию $\alpha = \langle A, B \rangle \in L^\diamond$ сопоставим понятие с объемом A из решетки $L^\star$. Ввиду выбора $\mathfrak{F}_1$ и по построению $\mathfrak{F}^\diamond$ объемы всех понятий $\mathfrak{F}^\diamond$ бесконечны. Значит, такое понятие всегда существует по теореме 1. Обозначим через $L^\bullet$ образ построенного отображения. Это отображение — изоморфизм, так как понятие полностью определено своим объемом, и $L^\bullet$ — подрешетка $L^\star$, поскольку по определению отношения сравнения на понятиях формального контекста

$$\alpha_1 = \langle A_1, B_1 \rangle \le \alpha_2 = \langle A_2, B_2 \rangle \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_2.$$

Остается показать, что $L^\bullet$ является начальным сегментом множества $L^\star \setminus F_G$. Формально необходимо доказать, что любое понятие $\alpha \in L^\star \setminus F_G$ такое, что $\alpha \le 1_{L^\bullet}$, будет также принадлежать $L^\bullet$. Действительно, рассмотрим произвольное понятие $\alpha \in L^\star$ с бесконечным объемом такое, что $\alpha \le 1_{L^\bullet}$. Объем α является подмножеством $G^\diamond$ ввиду условия $\alpha \le 1_{L^\bullet}$, причем по условию бесконечным. Значит, по теореме 1 объем α будет объемом некоторого понятия α' решетки $L^\diamond$. Образ α' при изоморфизме $L^\diamond$ на $L^\bullet$ будет равен α. Таким образом, α принадлежит $L^\bullet$.

Справедливость утверждения 2^0 показывается аналогично. Контекст $\mathfrak{F}_1$ получается из $\mathfrak{F}$ цилиндрификацией множества свойств. Контекст $\mathfrak{F}^\diamond$ строится, как в доказательстве теоремы 1, и по построению все его понятия имеют бесконечные содержания. Строится изоморфное вложение решетки $L^\diamond$ в $L^\star$. Для этого любому понятию $\alpha = \langle A, B\rangle \in L^\diamond$ сопоставим понятие с содержанием B из решетки $L^\star$, существующее по теореме 1. Образ построенного отображения $L^\bullet$ будет подрешеткой $L^\star$. Далее аналогично доказательству утверждения 1^0 показывается, что любое понятие с бесконечным содержанием α, принадлежащее $L^\star$, такое, что $0_{L^\bullet} \leq \alpha$, будет также принадлежать $L^\bullet$. □

Замечание 2. Из следствия 2 следует справедливость теоремы 2 в вычислимом случае.

Напомним, что для модулярности решетки необходимо и достаточно, чтобы эта решетка не содержала пентагонов; для дистрибутивности необходимо и достаточно, чтобы она не содержала ни пентагонов, ни диамантов [4], где пентагон (диамант) — подрешетка, изоморфная N_5 (M_3).

Следствие 5. *Решетка формальных понятий универсального формального контекста не дистрибутивна и не модулярна.*

Доказательство. По основной теореме на решетках понятий из [1] найдется формальный контекст, решетка которого изоморфна полной решетке N_5. Значит, по теореме 2 решетка N_5 вкладывается в решетку понятий универсального формального контекста. Отсюда ввиду критериев дистрибутивности и модулярности следует, что решетка формальных понятий универсального формального контекста не дистрибутивна и не модулярна. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wille R., Ganter B.* Formal concept analysis: Mathematical foundations. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1999.
2. *Морозов А. С., Львова М. А.* О вычислимых формальных понятиях в вычислимых формальных контекстах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1083–1092.
3. *Львова М. А.* О вычислимых формальный понятиях: Дипломная работа. Новосибирск: НГУ, 2006.
4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

Статья поступила 9 февраля 2011 г.

Левенталь Софья Марковна
Mathematics for Industry,
Department of Mathematics and Computer Science,
Eindhoven University of Technology
P. O. Box 513, 5600 MB, Eindhoven, the Netherlands
sofya.levental@gmail.com