Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Аннотация. Получены точные решения краевой задачи для уравнения нелинейной теплопроводности. Решена одна начально-краевая задача. Для построения решений используется метод сведения задачи для уравнения в частных производных второго порядка к решению аналогичной задачи для некоторого уравнения в частных производных первого порядка.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, уравнение теплопроводности, краевая задача, начально-краевая задача.

Введение

В работах [1, 2] предлагается геометрический метод исследования нелинейных уравнений в частных производных порядка выше первого, который позволяет в ряде случаев получать точные решения таких уравнений, решать некоторые краевые задачи [2] и задачи о примыкании течений разного типа [1]. В основу метода положен выбор таких независимых переменных, использование которых позволяет уравнение в частных производных порядка выше первого свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений благодаря тому, что в новых полученных независимых переменных решение нелинейного уравнения в частных производных выражается только через одну независимую переменную, которая, естественно, задает поверхность уровня решения. В частном случае можно не искать поверхность уровня решения, а пытаться выразить все частные производные, входящие в уравнение в частных производных, через функцию, задающую решение уравнения. Этот подход можно считать в некотором смысле развитием известного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений, когда в уравнение не входят независимые переменные. Тогда при некоторых предположениях можно полагать, что

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy},$$

и решать уравнение для функции $p(y)$. Аналогичный подход в данной работе используется для ответа на некоторые вопросы, касающиеся нелинейного уравнения теплопроводности

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad (t,x) \in \omega_T = (0,T) \times \mathbb{R}_+.$$

Известно достаточно много подходов к исследованию данного уравнения в частных производных, например, в [3] также получены разными способами точные

Работа выполнена в рамках программы межрегиональных и межведомственных исследований УрО РАН (проект 12–С–1–1001).

решения данного уравнения. В работах [3, 4] для получения решений уравнения теплопроводности используются уравнения в частных производных первого порядка. В данной работе исследован вопрос о том, в каких случаях некоторые решения специальным образом полученного уравнения в частных производных первого порядка удовлетворяют уравнению теплопроводности. В работе установлено соответствие между точными решениями уравнения нелинейной теплопроводности и некоторого уравнения в частных производных первого порядка (выбор его связан с видом исходного уравнения теплопроводности) и получены условия, при которых определенное подмножество решений построенного уравнения в частных производных первого порядка обращает в тождество уравнение теплопроводности. Использование полученных в работе критериев соответствия решений позволяет решить ряд конкретных задач.

1. Постановка задачи для уравнения нелинейной теплопроводности

Известно [5], что уравнение в частных производных первого порядка задает конус нормалей интегральной поверхности уравнения. Чтобы получить интегральную поверхность, удовлетворяющую уравнению в частных производных первого порядка, выбирается некоторое начальное многообразие [5] и через каждую точку такого нехарактеристического многообразия [5] проводится характеристика. Система уравнений характеристик описывает, как вдоль характеристики меняются первые производные функции, задающей интегральную поверхность уравнения в частных производных первого порядка. Но систему уравнений характеристик можно расширить, добавляя уравнения, описывающие изменение вдоль характеристик производных порядка выше первого [1, 2] (расширенная система уравнений характеристик).

В этой связи представляет интерес попытка выбрать уравнение первого порядка, связанное с исходным уравнением теплопроводности, но обладающее неким произволом, позволяющим получить расширенную систему уравнений характеристик выбранного уравнения, первым интегралом которой будет уравнение нелинейной теплопроводности. Поскольку характеристики уравнения первого порядка исходят из заданного начального многообразия при получении интегральной поверхности, естественно также потребовать, чтобы вдоль начального многообразия выполнялись те же условия, которые позволяют уравнение нелинейной теплопроводности сделать первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик. Здесь не рассматривается вопрос о построении огибающих множества характеристик.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = (k(u)u_x)_x, \quad (t,x) \in \omega_T = (0,T) \times \mathbb{R}_+. \tag{1.1}$$

Считаем, что $u_t \neq 0$, т. е. нас будут интересовать только решения уравнения (1), где $u_t \neq 0$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$u_t = k' u_x^2 + k(u) u_{xx}. \tag{1.2}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по переменной u. Поделив все слагаемые уравнения (2) на u_t, положим, что

$$\frac{u_x^2}{u_t} = f_1(u), \quad \frac{u_{xx}}{u_t} = f_2(u),$$

где $f_1(u)$, $f_2(u)$ пока произвольные функции. Далее перепишем приведенные выше соотношения в виде

$$u_x^2 - f_1(u)u_t = 0, \tag{1.3}$$

$$u_{xx} - f_2(u)u_t = 0, \tag{1.4}$$

$$1 = k'(u)f_1 + k(u)f_2. \tag{1.5}$$

Из соотношения (1.5) имеем

$$f_2 = \frac{1 - k'(u)f_1(u)}{k(u)}, \quad k(u) \neq 0. \tag{1.6}$$

Подставив (1.6) в (1.4), получим систему уравнений

$$u_x^2 - f_1(u)u_t = 0, \tag{1.7}$$

$$u_{xx} - \frac{1 - k'(u)f_1(u)}{k(u)}u_t = 0. \tag{1.8}$$

Для уравнения (1.7) выпишем систему уравнений характеристик [5]

$$\frac{dx}{ds} = 2u_x, \quad \frac{dt}{ds} = -f_1, \quad \frac{du}{ds} = f_1 u_t, \quad \frac{du_x}{ds} = f_1' u_t u_x, \quad \frac{du_t}{ds} = f_1' u_t^2.$$

Полагая, что $f_1 \neq 0$, выберем u в качестве параметра вдоль характеристики. Получим

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u_x}{f_1 u_t}, \quad \frac{dt}{du} = -\frac{1}{u_t}, \quad \frac{du_x}{du} = \frac{f_1'}{f_1}u_x, \quad \frac{du_t}{du} = \frac{f_1'}{f_1}u_t. \tag{1.9}$$

Заметим, что уравнение (1.7) позволяет систему уравнений характеристик расширить, дополнив уравнениями, описывающими изменение вдоль характеристик производных порядка выше первого.

Например, перепишем подробнее уравнение

$$\frac{du_x}{du} = u_{xx}\frac{dx}{du} + u_{xt}\frac{dt}{du} = \frac{f_1'}{f_1}u_x,$$

продифференцируем выражение

$$u_{xx}\frac{dx}{du} + u_{xt}\frac{dt}{du} = \frac{f_1'}{f_1}u_x$$

по переменной x, получим уравнение, описывающее изменение u_{xx} вдоль характеристики:

$$\frac{du_{xx}}{du} = -u_{xx}\left(\frac{dx}{du}\right)_x - u_{xt}\left(\frac{dt}{du}\right)_x + \left(\frac{f_1'}{f_1}u_x\right)_x.$$

Аналогично можно получить уравнения, описывающие изменение вдоль характеристики всех необходимых производных порядка выше первого.

Определим, при каких условиях, налагаемых на функцию $f_1(u)$, вдоль характеристик уравнения (1.7) тождественно выполняется зависимость (1.8).

Теорема 1. *Пусть функция $f_1(u)$ удовлетворяет соотношению*

$$\left(\frac{1-k'(u)f_1(u)}{k(u)}-f_1'\right)'+\frac{2}{f_1}\left(\frac{1-k'(u)f_1(u)}{k(u)}-f_1'\right)^2=0. \tag{1.10}$$

Тогда среди характеристик уравнения (1.7) *содержатся характеристики, обращающие в тождество уравнение* (1.8).

Доказательство. Выпишем дифференциальные следствия уравнения (1.7):

$$2u_xu_{xx}-f_1u_{tx}=f_1'u_tu_x, \quad 2u_xu_{xt}-f_1u_{tt}=f_1'u_t^2.$$

Отсюда получаем

$$u_{tx}=\frac{2u_xu_{xx}-f_1'u_tu_x}{f_1}, \quad u_{tt}=\frac{2u_x(2u_xu_{xx}-f_1'u_tu_x)-f_1f_1'u_t^2}{f_1^2}. \tag{1.11}$$

Для уравнения (1.7) выпишем уравнение, описывающее изменение производной u_{xx} вдоль характеристики [2], подставив в полученное соотношение значение производной u_{xt} из (1.11). В результате получаем расширенную систему уравнений характеристик:

$$\begin{gathered}\frac{dx}{du}=\frac{2u_x}{f_1u_t}, \quad \frac{dt}{du}=-\frac{1}{u_t}, \quad \frac{du_x}{du}=\frac{f_1'}{f_1}u_x, \quad \frac{du_t}{du}=\frac{f_1'}{f_1}u_t,\\ \frac{du_{xx}}{du}=-\frac{2u_{xx}^2}{f_1u_t}+\frac{5f_1'u_{xx}}{f_1}+u_t\left(f_1''-\frac{2f_1'^2}{f_1}\right),\end{gathered} \tag{1.12}$$

содержащую произвольную функцию f_1. Потребуем, чтобы соотношение (1.8) было частным решением системы (1.12):

$$\frac{du_{xx}}{du}=-\frac{u_t(k''f_1+k'f_1')}{k(u)}-\frac{u_tk'(1-k'f_1)}{k(u)^2}+\frac{f_1'u_t(1-k'f_1)}{f_1k(u)}. \tag{1.13}$$

Можно считать, что уравнение (1.13) замыкает расширенную систему уравнений характеристик (1.12). Таким образом получена система, описывающая изменение вдоль характеристики функций $x(u)$, $t(u)$, $u_x(u)$, $u_t(u)$, $u_{xx}(u)$ и $f_1(u)$. Сравнение последнего уравнения системы (1.12) и уравнения (1.13) после подстановки других известных выражений из системы (1.12) и значения u_{xx} из (1.8) приводит к уравнению для определения функции $f_1(u)$, поскольку $u_t \neq 0$:

$$\left(\frac{1-k'(u)f_1(u)}{k(u)}-f_1'\right)'+\frac{2}{f_1}\left(\frac{1-k'(u)f_1(u)}{k(u)}-f_1'\right)^2=0.$$

Итак, получили условие, при котором соотношение (1.8) является частным решением системы (1.12). □

Следствие 1. *Если*

$$\frac{1-k'(u)f_1(u)}{k(u)}-f_1'=0, \quad f_1=\frac{u+c_o}{k(u)}, \quad c_o=\mathrm{const}, \tag{1.14}$$

то условие (1.10) *выполняется.*

Следствие 2. *Если*

$$\frac{1-k'(u)f_1(u)}{k(u)}-f_1'\neq 0,$$

то функция f_1 определяется из уравнения

$$\frac{1-k'(u)f_1(u)}{k(u)}-f_1'=\frac{1}{2w+C_o}, \quad w=\int\frac{du}{f_1(u)}, \quad C_o=\mathrm{const}\,. \tag{1.15}$$

Следствие 3. *Вторые производные решения* $u(x,t)$ *уравнения* (1.7), *обращающего в тождество уравнение* (1.8), *определяются из соотношений*

$$u_{xx} = f_2 u_t, \quad f_2 = \frac{1 - k'(u) f_1(u)}{k(u)}, \tag{1.16}$$

$$u_{xt} = \frac{2f_2 - f_1'}{f_1} u_x u_t, \tag{1.17}$$

$$u_{tt} = \frac{4f_2 - 3f_1'}{f_1} u_t^2, \tag{1.18}$$

причем выполнение одного из соотношений (1.16)–(1.18) *для рассматриваемого* $u(x,t)$ *приводит к выполнению всех указанных соотношений.*

Итак, выполнение условия (1.8) вдоль характеристик уравнения (1.7) сводится к определению функции $f_1(u)$, удовлетворяющей уравнению (1.14) или уравнению (1.15). Заметим, что в случае выполнения (1.14) уравнение (1.7) можно представить в виде (см. [4])

$$u_t = \frac{k(u)}{u + c_o} u_x^2. \tag{1.19}$$

2. Метод получения точных решений уравнения нелинейной теплопроводности

Теорема 2. *Если характеристики уравнения* (1.7) *исходят из начального многообразия* $x = 0$, $u = u(0,t)$, *вдоль которого выполняется соотношение*

$$u_{tt}(0,t) = r(u) u_t^2(0,t), \quad r(u) = \frac{4f_2 - 3f_1'}{f_1}, \quad f_2 = \frac{1 - k'(u) f_1(u)}{k(u)}, \tag{2.1}$$

и если $f_1(u)$ *удовлетворяет условию* (1.10), *то полученная интегральная поверхность уравнения* (1.7) *является интегральной поверхностью уравнения* (1.1).

Доказательство. Будем решать уравнение (2.1) при $x = 0$, полагая, что $u_t(0,t) = p(u)$. Тогда получим, что (2.1) выполняется, если $p(u) = 0$, $u(0,t) = \text{const}$ или $p' = r(u)p$. Рассмотрим случай, когда $u(0,t) \neq \text{const}$ и, следовательно, $p' = r(u)p$. Отсюда получаем, что $u(0,t) = u(a(0)t + b(0))$, где $a(0) = \text{const}$, $b(0) = \text{const}$. Такое краевое условие может быть у решения, имеющего вид $u = u(a(x)t + b(x))$. Решение такого вида будет удовлетворять уравнению (1.7), если выполняется

$$u_z^2 (a_x t + b_x)^2 - f_1(u) a(x) u_z = 0, \tag{2.2}$$

где либо

$$\begin{gathered} a = \text{const}, \quad b(x) = lx, \quad l = \text{const}, \quad z = at + lx, \\ z = \frac{l^2}{a}(w + L), \quad w = \int \frac{du}{f_1(u)}, \quad L = \text{const}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

либо

$$\begin{gathered} a_x = Na^{3/2}, \quad b_x = Nba^{1/2}, \quad z = \frac{4t + R}{(Nx + M)^2}, \quad z = -\frac{1}{N^2(w + N_1)}, \\ N_1 = \text{const}, \quad N = \text{const}, \quad M = \text{const}, \quad R = \text{const}, \quad R > 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Покажем, что решение (2.3) уравнения (1.7) удовлетворяет уравнению (1.1), если f_1 определено из соотношения (1.14). Полагая в уравнении (1.1) $z = at + lx$, получим

$$a u_z = k'(u) l^2 u_z^2 + k(u) l^2 u_{zz}.$$

Перейдем в этом уравнении от функции $u(z)$ к функции $z(u)$:

$$az_u^2 = k'l^2 z_u - kl^2 z_{uu}. \tag{2.5}$$

Из (2.3) имеем

$$z_u = l^2/(af_1(u)), \quad z_{uu} = -l^2 f_1'/(af_1^2(u)).$$

Подставив полученные выражения в (2.5), приходим к соотношению

$$1 = k' f_1(u) + k(u) f_1',$$

которое обращается в тождество, если $f_1(u)$ удовлетворяет (1.14). Итак, получили, что решение (2.3) уравнения (1.7) удовлетворяет уравнению (1.1), если f_1 определено из соотношения (1.14).

Аналогично для случая, когда $z = (4t + R)/(Nx + M)^2$, выписываем уравнение (1.1) и переходим от функции $u(z)$ к функции $z(u)$. Затем подставляем в полученное уравнение $z(u) = -1/[N^2(w + N_1)]$. Если $f_1(u)$ удовлетворяет уравнению (1.15), приходим к тождеству. $\square$

Теорема 3. *Если характеристики уравнения* (1.7) *исходят из начального многообразия* $t = 0$, $u = u(x, 0)$, *вдоль которого выполняется соотношение*

$$u_{xx}(x, 0) = r_1(u) u_x^2(x, 0), \quad r_1(u) = \frac{f_2}{f_1}, \tag{2.6}$$

и если $f_1(u)$ *удовлетворяет условию* (1.10), *то полученная интегральная поверхность уравнения* (1.7) *является интегральной поверхностью уравнения* (1.1).

Доказательство. Будем решать уравнение (2.6), полагая $u_x(x, 0) = p(u)$. Тогда либо $p(u) = \mathrm{const}$, либо $p(u) \neq \mathrm{const}$. Подробно рассмотрим случай $p(u) \neq \mathrm{const}$. Тогда $p' = r_1(u)p(u)$. Отсюда получаем

$$u_x(x, 0) = a \exp\left(\int r_1(u) du\right),\ a > 0, \qquad \int - \exp\left(\int r_1(u) du\right) du = ax + b.$$

Такое начальное условие будет выполняться, если $u = u(v)$ при $v = a(t)x + b(t)$ является решением уравнения (1.7). После подстановки $u = u(v)$ в (1.7) получаем

$$a(t)^2 u_v^2 - f_1(u)(a_t x + b_t) u_v = 0, \quad u_v \neq 0,$$

тогда либо

$$\begin{gathered} a = \mathrm{const}, \quad b_t = b = \mathrm{const}, \quad v = ax + bt, \\ v = \frac{a^2}{b}(w + m), \quad w = \int \frac{du}{f_1(u)}, \quad m = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

либо

$$\begin{gathered} a_t = -Na^3(t), \quad b_t = -Na^2(t)b(t), \quad N = \mathrm{const}, \\ a^2 = \frac{1}{2(Nt + M)}, \quad M = \mathrm{const}, \quad b = \frac{K}{\sqrt{Nt + M}}, \\ K = \mathrm{const}, \quad v = \frac{x/\sqrt{2} + K}{\sqrt{Nt + M}}, \quad v^2 = (C - 2w)/N. \end{gathered} \tag{2.8}$$

При доказательстве теоремы 2 было показано, что если $v = ax + bt$, то решение (2.7) уравнения (1.7) удовлетворяет уравнению (1.1), если f_1 определено из соотношения (1.14).

Остановимся на случае, когда решение уравнения (1.7) имеет вид

$$z = v^2 = (C - 2w)/N, \quad z = v^2 = \frac{(x/\sqrt{2} + K)^2}{Nt + M}.$$

Здесь также нетрудно заметить, что этот случай сводится к уже описанному ранее в теореме 2. Так как в теореме 2 этот случай подробно не рассмотрен, рассмотрим его здесь.

Выпишем уравнение (1.1), полагая, что $u = u(z)$, тогда получим

$$\begin{gathered} u_t = -u_z zN/(Nt + M), \quad u_x = \sqrt{2} u_z \frac{x/\sqrt{2} + K}{Nt + M}, \\ u_{xx} = 2u_{zz} \left(\frac{x/\sqrt{2} + K}{Nt + M} \right)^2 + \frac{u_z}{Nt + M}, \\ -u_z zN = 2k'(u) u_z^2 z + k(u)(2u_{zz} z + u_z). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Перейдем в уравнении (2.9) от функции $u(z)$ к функции $z(u)$:

$$-z_u^2 zN = 2k'(u) z_u z + k(u)\big(-2z_{uu} z + z_u^2\big),$$

и подставим в полученное уравнение для $z = z(u)$ значение $z(u) = (C - 2w)/N$. Тогда

$$1 = k' f_1 + k(f_1' - 1/(C - 2w)).$$

Отсюда следует, если $f_1(u)$ удовлетворяет (1.15), то решение уравнения (1.7) является решением уравнения (1.1). □

3. О решении начальных и краевых задач

Пусть для уравнения (1.1) задано начальное условие $u(x, 0) = g(x)$, и предположим, что обратная функция для функции $u = g(x)$ имеет вид $x = G(u)$. Если для заданного начального условия выполняется зависимость (2.6), то, как доказано выше, решение уравнения (1.7) является решением уравнения (1.1) с заданным начальным условием. Для каких $x = G(u)$ это будет иметь место? По правилам вычисления производных для обратных функций

$$u_x(x, 0) = g_x = 1/G_u, \quad u_{xx}(x, 0) = g_{xx} = -G_{uu}/G_u^3.$$

Отсюда имеем

Следствие 4. *Если для заданного* $k(u)$ *и* $f_1(u)$, *удовлетворяющего* (1.10),

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1 - k'(u) f_1(u)}{k(u) f_1(u)} = -\frac{G_{uu}}{G_u},$$

то решение начальной задачи для уравнения (1.1) *будет совпадать с решением данной задачи для уравнения* (1.7).

Пусть для уравнения (1.1) задано краевое условие $u(0, t) = f(t)$ и обратная функция для $u = f(t)$ имеет вид $t = F(u)$, и пусть для заданного краевого условия выполняется зависимость (2.1).

Следствие 5. *Если для заданного* $k(u)$ *и* $f_1(u)$, *удовлетворяющего* (1.10),

$$\frac{4f_2 - 3f_1'}{f_1} = \frac{4 - 4k'(u) f_1(u)}{k(u) f_1(u)} - \frac{3f_1'(u)}{f_1(u)} = -\frac{F_{uu}}{F_u},$$

то решение краевой задачи для уравнения (1.1) *будет совпадать с решением данной задачи для уравнения* (1.7).

4. Решение краевых задач

Для уравнения (1.1) будем решать краевую задачу $u(0,t) = (T-t)^{-1}$. В данном случае $F(u) = T - 1/u$. Для получения решения такой краевой задачи можно воспользоваться уравнением первого порядка, если выполняется зависимость

$$\frac{4f_2 - 3f_1'}{f_1} = \frac{2}{u}, \quad f_2 = \frac{1 - k'(u)f_1(u)}{k(u)}. \tag{4.1}$$

Из соотношения (4.1) получаем дополнительную связь между функциями $k(u)$ и $f_1(u)$:

$$k' + k\left(\frac{1}{2u} + \frac{3}{4}\frac{f_1'}{f_1}\right) = \frac{1}{f_1}. \tag{4.2}$$

Зависимость (1.14) дает $k(u) = (u + c_o)/f_1(u)$. Из соотношения (1.15) имеем

$$k'(u) + k(u)\left(\frac{f_1'}{f_1} + \frac{1}{f_1(2w + c_o)}\right) = \frac{1}{f_1}. \tag{4.3}$$

Итак, решение краевой задачи сводится к решению этой задачи для уравнения (1.7), если $k(u)$ и $f_1(u)$ удовлетворяют зависимостям (4.2) и (1.14) или зависимостям (4.2) и (4.3).

В первом случае, подставляя $k(u)$ в (4.2), находим

$$f_1 = Au^2, \quad k(u) = \frac{u + c_o}{Au^2}, \quad A = \text{const}, \quad c_o = \text{const}. \tag{4.4}$$

Во втором случае, приравнивая коэффициенты при $k(u)$ в (4.2) и в (4.3), получаем

$$\frac{f_1'}{4f_1} + \frac{1}{f_1(2w + c_o)} = \frac{1}{2u}, \quad \sqrt{f_1}(w + 0.5c_o) = A^2 u, \quad A = \text{const}.$$

Тогда для определения функции $f_1(u)$ имеем уравнение Бернулли

$$f_1' - \frac{2}{u}f_1 = -\frac{2}{A^2 u}f_1^{1/2}.$$

Отсюда следует, что либо

$$f_1 = \text{const}, \quad k(u) = \frac{B}{\sqrt{u}} + \frac{2}{3f_1}u, \quad B = \text{const}, \tag{4.5}$$

либо

$$k(u) = (au + b)^{-3/2}u^{-1/2}\left(\theta + \frac{\sqrt{u(au + b)}}{a} - \frac{b}{2a\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{au + b} + \sqrt{au}}{\sqrt{au + b} - \sqrt{au}}\right), \tag{4.6}$$

$$f_1 = (au + b)^2, \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad \theta = \text{const}.$$

Пусть $k(u) = 1/u$. Тогда согласно (4.4) такое $k(u)$ получаем, положив $A = 1$, $c_o = 0$. Этому $k(u)$ соответствует $f_1 = u^2$.

Будем решать поставленную выше краевую задачу для уравнения

$$u_x^2 - u^2 u_t = 0.$$

В этом случае $u = u(z)$, причем согласно (2.3)

$$z = at + lx, \quad z = \frac{l^2}{a}(w + L), \quad w = \int \frac{du}{f_1(u)}.$$

Тогда

$$u = 1/(L - ax/l - a^2 t/l^2).$$

Эта функция удовлетворяет краевому условию, если $L = T$, $a = l$. Окончательно

$$u = \frac{1}{T - t - x}. \tag{4.7}$$

Утверждение 1. *Решение* (4.7) *краевой задачи* $u(x,t) = 1/(T-t)$ *для уравнения*

$$u_x^2 - u^2 u_t = 0$$

является точным решением этой краевой задачи для уравнения (1.1) *при* $k(u) = 1/u$.

Для уравнения (1.1), считая, что $k(u) = u$, будем решать краевую задачу. Такое значение $k(u)$ получим из условия (4.5), если положим $B = 0$, $f_1 = 2/3$. Решаем краевую задачу для уравнения

$$u_x^2 - 2u_t/3 = 0. \tag{4.8}$$

В этом случае $u = u(z)$, а согласно (2.4)

$$z = \frac{4t + R}{(Nx+M)^2}, \quad z = -\frac{1}{N^2(w+N_1)}, \quad w = \frac{3u}{2}.$$

Решение уравнения (4.8) будет удовлетворять краевому условию $u(0,t) = 1/(T-t)$, если $N_1 = 0$, $M = \pm N\sqrt{6}$, $R = -4T$. В этом случае

$$u = (x \pm \sqrt{6})^2/6[(T-t)]. \tag{4.9}$$

Утверждение 2. *Решение* (4.9) *краевой задачи* $u(0,t) = 1/(T-t)$ *для уравнения*

$$u_x^2 - 2u_t/3 = 0$$

является точным решением краевой задачи для уравнения (1.1) *при* $k(u) = u$.

Пусть

$$k(u) = (au+b)^{-3/2} u^{-1/2} \left(\theta + \frac{\sqrt{u(au+b)}}{a} - \frac{b}{2a\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{au+b} + \sqrt{au}}{\sqrt{au+b} - \sqrt{au}} \right).$$

Тогда согласно (4.6) решение краевой задачи для уравнения (1.1) будет совпадать с решением краевой задачи для уравнения

$$u_x^2 - (au+b)^2 u_t = 0.$$

Решаем для уравнения первого порядка краевую задачу аналогично вышеизложенному:

$$z = \frac{4t + R}{(Nx+M)^2}, \quad z = -\frac{1}{N^2(w+N_1)}, \quad w = -\frac{1}{a(au+b)}.$$

Получим

$$u(x,t) = \frac{ab(x+2/b)^2}{4(a/b)(a/b+T-t) - a^2(x+2/b)^2}. \tag{4.10}$$

Утверждение 3. *Решение* (4.10) *краевой задачи* $u(0,t) = 1/(T-t)$ *для уравнения*

$$u_x^2 - (au+b)^2 u_t = 0$$

является точным решением данной краевой задачи для уравнения (1.1), *если*

$$k(u) = (au+b)^{-3/2} u^{-1/2} \left(\theta + \frac{\sqrt{u(au+b)}}{a} - \frac{b}{2a\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{au+b} + \sqrt{au}}{\sqrt{au+b} - \sqrt{au}} \right).$$

5. Пример решения начально-краевой задачи

Пусть для уравнения (1.1) при $k(u) = u$ заданы условия

$$u(x,0) = x^2, \tag{5.1}$$

$$u(0,t) = \frac{1}{T-t}. \tag{5.2}$$

Для краевой задачи (1.1), (5.2) получено решение (4.9). Построим решение начальной задачи (1.1), (5.2).

Чтобы для получения решения можно было воспользоваться предлагаемым подходом, использующим соответствующее уравнение первого порядка, для начального условия должно выполняться соотношение

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1-k'(u)f_1}{f_1 k(u)} = \frac{1-f_1}{uf_1} = \frac{1}{2u}, \quad f_1 = \frac{2}{3}$$

и соотношение (4.3) или соотношение (1.14). Для $f_1 = 2/3$ соотношение (4.3) выполняется. Отсюда следует, что решение начальной задачи для уравнения (1.1) будет совпадать с решением такой задачи для уравнения

$$u_x^2 - 2u_t/3 = 0.$$

Решение для данного уравнения имеет вид

$$z = v^2 = (C-2w)/N, \quad z = v^2 = \frac{(x/\sqrt{2}+K)^2}{Nt+M}.$$

Отсюда получаем, что

$$u(x,t) = \frac{C}{3} - \frac{N(x/\sqrt{2}-K)^2}{3(Nt+M)}.$$

Начальное условие удовлетворяется, если $C = 0$, $K = 0$, $N = -6M$. Окончательно имеем

$$u^+(x,t) = \frac{x^2}{(1-6t)}.$$

Положим в (4.9) $T = 1/6$. Замечаем, что в точке $\{0,0\}$ функция имеет разрыв: $u(0,0) = 6$, $u^+(0,0) = 0$. Будем строить линию разрыва, проходящую через точку $\{0,0\}$. В уравнении (1.1) сделав замену переменных $x - \varphi(t) = \xi$, $t = \eta$, получим уравнение

$$u_\eta = u_\xi \varphi_t + u_\xi^2 + u u_{\xi\xi}.$$

Выпишем решения этого уравнения в новых переменных, полагая, что $\xi = 0$ — искомая линия сильного разрыва:

$$u(0,\eta) = \frac{(\varphi(\eta)-\sqrt{6})^2}{1-6\eta}, \quad u^+(0,\eta) = \frac{\varphi^2(\eta)}{1-6\eta}. \tag{5.3}$$

В соотношениях (5.3) вдоль линии разрыва $\xi = 0$ должно выполняться условие $u_\eta(0,\eta) = u_\eta^+(0,\eta)$. Имеем

$$u_\eta^+ = \frac{2\varphi\varphi_\eta}{1-6\eta} + \frac{6\varphi^2}{(1-6\eta)^2}, \tag{5.4}$$

$$u_\eta = \frac{2(\varphi-\sqrt{6})\varphi_\eta}{1-6\eta} + \frac{6(\varphi-\sqrt{6})^2}{(1-6\eta)^2}. \tag{5.5}$$

Приравнивая (5.4) и (5.5), получаем уравнение для определения функции $\varphi(\eta)$:

$$\varphi_\eta + \frac{6}{1-6\eta}\varphi = \frac{3\sqrt{6}}{1-6\eta}.$$

Отсюда $\varphi = A(1-6\eta) + \sqrt{3}/\sqrt{2}$, $A = \text{const}$. Потребуем, чтобы линия разрыва $\xi = 0$ проходила через точку $x = 0$, $t = 0$. Тогда $\varphi(t) = 3t\sqrt{6}$ и окончательный вид линии разрыва следующий: $x = 3t\sqrt{6}$ $(0 \le t < 1/6)$.

Таким образом, получаем решение начально-краевой задачи для уравнения (1.1) с условиями (5.1), (5.2):

$$\begin{cases} u(x,t) = (x-\sqrt{6})^2/(1-6t), & x - 3t\sqrt{6} \le 0, \\ u(x,t) = x^2/(1-6t), & x - 3t\sqrt{6} \ge 0. \end{cases}$$

Заключение

В работе предлагается метод построения такого уравнения в частных производных первого порядка, среди решений которого (см. следствие 3) содержатся точные решения уравнения нелинейной теплопроводности. Показано, что в некоторых случаях точное решение краевой задачи для уравнения нелинейной теплопроводности может быть сведено к решению соответствующей задачи для уравнения в частных производных первого порядка. Указанным методом построено решение одной начально-краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубина Л. И., Ульянов О. Н.* О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.
2. *Рубина Л. И., Ульянов О. Н.* Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 130–145.
3. *Vazquez J. L., Galaktionov V.* A stability technique for evolution partial differential equations. A dynamical system approach. Boston: Birkhauser, 2004. (Prog. Nonlinear Differ. Equ. Their Appl.; V. 56).
4. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1962.

Статья поступила 16 марта 2011 г., окончательный вариант — 25 января 2012 г.

Рубина Людмила Ильинична
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
rli@imm.uran.ru,

Ульянов Олег Николаевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990;
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
secretary@imm.uran.ru