Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 517.987+519.214

КОНСТАНТЫ ОЦЕНОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. В. Седалищев

Аннотация. Для случая непрерывного времени доказаны неравенства, позволяющие при наличии степенных оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана получить оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа. Эти результаты имеют очевидные точные аналоги и в классе стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Ключевые слова: эргодическая теорема фон Неймана, эргодическая теорема Биркгофа, скорость сходимости эргодических средних, спектральная мера, корреляционная функция, стационарный в широком смысле стохастический процесс.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{S}, \lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, $\{T^t, t \in \mathbb{R}^+\}$ — полупоток на нем, т. е. такая однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов T^t пространства Ω, что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Напомним, что *эндоморфизмом* пространства Ω называется отображение $T : \Omega \to \Omega$ такое, что для всех $A \in \mathfrak{S}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{S}$ и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ введем эргодические средние:

$$A_t f(\omega) = \frac{1}{t} \int_0^t f(T^\tau \omega)\, d\tau.$$

Индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование п. в. предела

$$f^* = \lim_{t\to\infty} A_t f$$

и равенство $\int f\, d\lambda = \int f^*\, d\lambda$.

Через $\{U^t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ обозначим однопараметрическую полугруппу изометрических операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U^t f = f \circ T^t$. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование в $L_2(\Omega)$ предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t U^\tau f\, d\tau = \lim_{t\to\infty} A_t f,$$

равного f^*, причем f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов полугруппы $\{U^t\}$.

Определим корреляционную функцию $b_t f$ и спектральную меру σ_f вектора f относительно нашей динамической системы. А именно, положим $b_t f =$

$(U^t f, f)$ при $t \geq 0$ и $b_t f = \overline{b_{-t} f}$ при $t < 0$. Как известно (см., например, [1, гл. 1, § 7]), в этом случае корректно определена (единственная) спектральная мера σ_f, т. е. такая конечная борелевская мера на прямой, что

$$b_t f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d\sigma_f(x)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Скорость сходимости будем измерять для эргодической теоремы фон Неймана как скорость сходимости к нулю при $t \to \infty$ числовых величин $\|A_t f - f^*\|_2^2$, для эргодической теоремы Биркгофа — как скорость сходимости к нулю числовых величин $P_t^\varepsilon = \lambda\bigl\{\sup\limits_{s\geq t} |A_s f - f^*| \geq \varepsilon\bigr\}$, поскольку сходимость для любого $\varepsilon > 0$ при $t \to \infty$ величины P_t^ε к нулю эквивалентна сходимости п. в. $A_t f$ к f^*.

В случае дискретного времени А. Г. Качуровский в обзоре [2] изложил, как можно оценить скорости сходимости в двух упоминавшихся эргодических теоремах. В частности, в [2] подробно обсуждается, почему характеристиками динамической системы, ответственными за скорость сходимости в статистической теореме, являются корреляционные коэффициенты и спектральная мера (более того, достаточно знания только поведения этой меры в окрестности нуля). Кроме того, там доказано, что помимо упомянутых характеристик величина $\|A_t f - f^*\|_2^2$ также является характеристикой динамической системы, ответственной за скорость сходимости в индивидуальной теореме, и приведены различные оценки в терминах «O» и «o» величин $\|A_n f - f^*\|_2^2$ и P_n^ε при различных предположениях о корреляционных коэффициентах и поведении в нуле меры σ_f. Впоследствии оценки А. Г. Качуровского величин P_n^ε были улучшены В. Ф. Гапошкиным в работах [3, 4]. Отметим также работы [5, 6], где уточнены некоторые результаты А. Г. Качуровского и В. Ф. Гапошкина из их упомянутых ранее работ в направлении перехода от «O» и «o» к алгебраическим неравенствам.

Заметим, что не все результаты о скоростях сходимости в эргодических теоремах могут быть перенесены со случая дискретного времени на случай непрерывного времени (см., например, [7]). Тем не менее в [8] удалось перенести все основные результаты по статистической теореме для дискретного времени на время непрерывное. В данной работе асимптотические результаты о взаимосвязи $\|A_n f - f^*\|_2^2$ и P_n^ε для дискретного времени будут перенесены на время непрерывное с последующим уточнением в направлении перехода от «O» и «o» к алгебраическим неравенствам. Прежде чем приступить к работе, приведем в консолидированной форме уточненные В. Ф. Гапошкиным результаты А. Г. Качуровского для дискретного времени, которые и будут переноситься на время непрерывное.

Теорема 1 [4]. *Пусть $\|A_n f - f^*\|_2^2 = O(n^{-\alpha})$ при $n \to \infty$. Тогда*

1) *если $\alpha \in (0, 1)$, то $P_n^\varepsilon = O(n^{-\alpha})$ при $n \to \infty$, причем эта оценка неулучшаема (см. [2]);*

2) *если $\alpha = 1$, то $P_n^\varepsilon = O\bigl(\frac{\ln^2(n+1)}{n}\bigr)$ при $n \to \infty$;*

3) *если $\alpha \in (1, 2]$, то $P_n^\varepsilon = O\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$ при $n \to \infty$.*

Заметим в этой связи, что рассмотрение столь узкого диапазона $\alpha \in (0, 2]$ закономерно, поскольку скорости сходимости в теореме фон Неймана выше квадратичной быть не может, за исключением случая $f - f^* = 0$ λ-п. в. В случае дискретного времени это результат В. Ф. Гапошкина (см. [9, следствие 5]), в случае непрерывного времени доказательство можно провести похожим на дискретный случай способом (см. [8, замечание 3]).

Обозначим через $L_2^0(\Omega)$ подпространство в $L_2(\Omega)$ функций, имеющих нулевое среднее. Пусть $g \in L_2^0(\Omega)$. Положим $\Lambda_m(\omega) = \sup\limits_{\substack{2^m < t < 2^{m+1},\\ t\in\mathbb{R}^+}} \left|\int\limits_{[t]}^{t} g\circ T^\tau(\omega)\,d\tau\right|$, а также введем (следуя [4]) по аналогии со случаем дискретного времени следующие обозначения:

$$\delta_m^*(\omega) = \sup_{\substack{2^m \le t < 2^{m+1},\\ t\in\mathbb{R}^+}} |A_t g(\omega)|; \quad q_m(\varepsilon) = \lambda\{\delta_m^* \ge \varepsilon\};$$

$$\delta_m(\omega) = \max_{\substack{2^m < k < 2^{m+1},\\ k\in\mathbb{N}}} \left|\int\limits_{2^m}^{k} g\circ T^\tau(\omega)\,d\tau\right|.$$

В этих обозначениях при условии $2^m \le t < 2^{m+1}$ очевидно неравенство

$$P_t^\varepsilon = \lambda\{\sup_{s\ge t}|A_s g| \ge \varepsilon\} \le \sum_{k=1}^{\infty} q_{m+k-1}(\varepsilon) = \sum_{k=m}^{\infty} q_k(\varepsilon). \tag{1}$$

Отметим, что в случае непрерывного времени выполнение соотношения $\|A_t g\|^2 = O(t^{-\alpha})$ гарантирует в силу определения символа «O» существование некоторой константы $B > 0$ такой, что для всех $t > 0$ будет выполнено неравенство $\|A_t g\|_2^2 \le B(t+1)^{-\alpha}$, поскольку для таких t операторы A_t являются сжатиями (см., например, [10, гл. VIII, § 7]), а значит, $\|A_t g\|_2^2$ при $t > 0$ ограничена $\|g\|_2^2$, и проблем с возможной неограниченностью величин $\|A_t g\|_2^2$ в окрестностях некоторых точек $t \ge 0$ не возникает.

Следующие ниже технические леммы дают необходимые в дальнейшем неравенства.

Лемма 1. *Справедливы оценки*

$$\delta_m^*(\omega) \le |A_{2^m} g(\omega)| + 2^{-m}\delta_m(\omega) + 2^{-m}\Lambda_m(\omega);$$

$$q_m(\varepsilon) \le 3\big(\|A_{2^m} g\|^2 + 2^{-2m}\|\delta_m\|_2^2 + 2^{-2m}\|\Lambda_m\|_2^2\big)\varepsilon^{-2}.$$

Доказательство. Первое неравенство леммы становится очевидным, если записать $A_t g$ при $2^m \le t < 2^{m+1}$ в следующем виде:

$$A_t g = \frac{2^m}{t} A_{2^m} g + \frac{1}{t}\left(\int\limits_{2^m}^{[t]} g\circ T^\tau(\omega)\,d\tau + \int\limits_{[t]}^{t} g\circ T^\tau(\omega)\,d\tau\right).$$

Возводя в квадрат уже доказанное первое неравенство леммы и применяя к правой части полученного элементарное неравенство $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$, после интегрирования будем иметь, что

$$\|\delta_m^*\|_2^2 \le 3\big(\|A_{2^m} g\|^2 + 2^{-2m}\|\delta_m\|_2^2 + 2^{-2m}\|\Lambda_m\|_2^2\big).$$

Для завершения доказательства остается применить неравенство Чебышева.

Лемма 2. *Если при некотором $0 \le \alpha \le 2$ для всех $t \ge 0$ выполнено неравенство $\|A_t g\|_2^2 \le B(t+1)^{-\alpha}$, то для любого натурального m справедлива оценка*

$$\|\Lambda_m\|_2^2 \le B.$$

Доказательство. Будем поточечно оценивать квадрат $\int\limits_{[t]}^{t} g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau$. Пусть $t-[t]$ имеет следующее разложение в двоичную дробь: $t-[t] = 2^{-s_1} + 2^{-s_2} + \dots$, где $s_1 < s_2 < \dots$ — последовательность номеров ненулевых цифр после запятой в двоичном разложении $t-[t]$. Число членов этой последовательности будем обозначать через N (в случае бесконечности этого числа полагаем $N = \infty$). Введем при допустимых $k \in \mathbb{N}$ полезное для дальнейшего изложения обозначение:

$$I_k = \left[[t] + \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-s_i}, [t] + \sum_{i=1}^{k} 2^{-s_i}\right).$$

Очевидно, что $[[t], t) = \bigcup\limits_{1\le k\le N} I_k$. Через $|I_k| = 2^{-s_k}$ будем обозначать длину полуинтервала I_k. Тогда

$$\int\limits_{[t]}^{t} g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{I_k} g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau = \sum_{k=1}^{N} 2^{s_k/2}|I_k| \frac{1}{2^{s_k/2}|I_k|} \int\limits_{I_k} g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского $\left(\sum\limits_{k=1}^{N} a_k b_k\right)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{N} a_k^2 \sum\limits_{l=1}^{N} b_l^2$ к правой части последнего равенства, после интегрирования будем иметь

$$\|\Lambda_m\|_2^2 \le \sum_{k=1}^{N} 2^{s_k}|I_k|^2 \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^{s_l}} \left\| \frac{1}{|I_l|} \int\limits_{I_l} g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau \right\|_2^2.$$

В силу стационарности в широком смысле процесса $\{g \circ T^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}^+}$ выполнено равенство $\left\|\frac{1}{|I_l|}\int\limits_{I_l} g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau\right\|_2^2 = \|A_{|I_l|} g\|_2^2$, откуда следует, что

$$\|\Lambda_m\|_2^2 \le \sum_{k=1}^{N} 2^{s_k}|I_k|^2 \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{2^{s_l}} \|A_{|I_l|} g\|_2^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{2k}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \|A_{2^{-l}} g\|_2^2$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{B}{(1+2^{-l})^\alpha} \le B\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)^2 = B,$$

что и завершает доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Если для некоторой последовательности $\{Y_j\}_1^\infty$ в $L^2(\Omega)$ при всех $m \ge 0$, $n \ge 1$ и некотором $\beta > 1$ справедлива оценка $\left\|\sum\limits_{j=m+1}^{m+n} Y_j\right\|_2^2 \le Bn^\beta$, то при всех $m \ge 0$, $n \ge 1$*

$$\left\| \max_{1\le k\le n} \left| \sum_{j=m+1}^{m+k} Y_j \right| \right\|_2^2 \le BC_\beta n^\beta,$$

где $C_\beta = (1 - 2^{(1-\beta)/2})^{-2}$.

Лемма 4. *Если для некоторой последовательности $\{Y_j\}_1^\infty$ в $L^2(\Omega)$ при всех $m \geq 0$, $n \geq 1$ справедлива оценка $\Bigl\| \sum\limits_{j=m+1}^{m+n} Y_j \Bigr\|_2^2 \leq Bn$, то при всех $m \geq 0$, $n \geq 1$*

$$\Bigl\| \max_{1\leq k\leq n} \Bigl| \sum_{j=m+1}^{m+k} Y_j \Bigr| \Bigr\|_2^2 \leq B(\log_2 2n)^2 n.$$

Леммы 3 и 4 получаются как частные случаи теорем 1 и 3 из [11] (в обеих теоремах надо положить $g(F_{b,n}) = Bn$).

Следующая ниже теорема 2 является аналогом для непрерывного времени приводившейся ранее теоремы В. Ф. Гапошкина для дискретного времени. Она позволяет получить численную оценку скорости сходимости в теореме Биркгофа с непрерывным временем при условии, что известна скорость сходимости в теореме фон Неймана, т. е. скорость стремления к нулю $\|A_t f - f^*\|_2^2$ при $t \to \infty$. Доказательство этой теоремы будет получено переработкой доказательств В. Ф. Гапошкина из [4] с последующей адаптацией к случаю непрерывного времени. Поскольку в ходе доказательства будет использоваться только стационарность в широком смысле стохастического процесса $\{(f - f^*)\circ T^t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, то в силу этого теорема 2 имеет точные аналоги в классе стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Следует отметить, что константа B и показатель α из условия теоремы 2 ниже в силу результатов [8] могут быть вычислены по поведению спектральной меры σ_{f-f^*} в окрестности нуля или по скорости убывания при $t \to \infty$ корреляционной функции $b_t(f - f^*)$.

Теорема 2. *Пусть для любого $t > 0$ выполнено неравенство $\|A_t f - f^*\|_2^2 \leq B(t+1)^{-\alpha}$, где B — некоторая положительная константа, $0 < \alpha \leq 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех $t \geq 2$ выполнено неравенство*

$$P_t^\varepsilon = \lambda\{\sup_{s\geq t} |A_s f - f^*| \geq \varepsilon\} < \varphi(\alpha, t) B\varepsilon^{-2},$$

причем в зависимости от α

1) *если $\alpha \in (0,1)$, то $\varphi(\alpha,t) = \frac{3\cdot 2^\alpha}{1-2^{-\alpha}}\bigl(1 + \frac{1}{(1-2^{\frac{\alpha-1}{2}})^2}\bigr)t^{-\alpha} + 16t^{-2}$,*

2) *если $\alpha = 1$, то $\varphi(\alpha,t) = 12\frac{(1+\log_2 t)^2+3}{t} + 16t^{-2}$,*

3) *если $\alpha \in (1,2]$, то $\varphi(\alpha,t) = 12\bigl(1 + \frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\bigr)t^{-1} + 16t^{-2}$.*

Доказательство. Будем доказывать по аналогии со случаем дискретного времени, как это делалось В. Ф. Гапошкиным в [4], с некоторыми необходимыми изменениями. Из соображений дальнейшего удобства положим $g = f - f^*$. Тогда $g \in L_2^0(\Omega)$ и мы должны доказать справедливость неравенства $P_t^\varepsilon = \lambda\{\sup\limits_{s\geq t} |A_s g| \geq \varepsilon\} < \varphi(\alpha,t)B\varepsilon^{-2}$ при предположении $\|A_t g\|_2^2 \leq B(t+1)^{-\alpha}$.

Зафиксируем $t \geq 2$ и найдем по нему натуральное m такое, что $2^m \leq t < 2^{m+1}$. Введем полезное для дальнейшего обозначение:

$$Y_j(\omega) = \int\limits_{2^m+j-1}^{2^m+j} g\circ T^\tau(\omega)\, d\tau, \quad \text{где } j \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $Y_j = (2^m + j)A_{2^m+j} - (2^m + j - 1)A_{2^m+j-1} \in L_2(\Omega)$. В силу условия теоремы и стационарности $\{g\circ T^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}^+}$ для любых целых $M \geq 0$, $N \geq 1$

будем иметь

$$\left\| \sum_{j=M+1}^{M+N} Y_j \right\|_2^2 = \left\| \int\limits_{2^m+M}^{2^m+M+N} g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau \right\|_2^2 = \left\| \int\limits_0^N g \circ T^\tau(\omega)\, d\tau \right\|_2^2 \le BN^2(N+1)^{-\alpha} \le BN^{2-\alpha},$$

т. е. к последовательности $\{Y_j\}_1^\infty$ можно применять леммы 3 и 4 при наличии соответствующей скорости убывания $\|A_t g\|_2^2$, что и будет использовано далее.

Доказательство п. 1. Воспользуемся леммой 3, подставив $\beta = 2 - \alpha > 1$:

$$\|\delta_m\|_2^2 = \left\| \max_{\substack{2^m < k < 2^{m+1},\\ k \in \mathbb{N}}} \left| \int\limits_{2^m}^{k} g(T^\tau \omega)\, d\tau \right| \right\|_2^2 = \left\| \max_{\substack{1 \le k \le 2^m - 1,\\ k \in \mathbb{N}}} \left| \int\limits_{2^m}^{2^m+k} g(T^\tau \omega)\, d\tau \right| \right\|_2^2$$

$$= \left\| \max_{1 \le k \le 2^m - 1} \left| \sum_{j=1}^{k} Y_j \right| \right\|_2^2 \le BC_{2-\alpha}(2^m - 1)^{2-\alpha} < BC_{2-\alpha} 2^{m(2-\alpha)}.$$

Применяя в лемме 1 эту оценку и оценку из леммы 2, получим следующее неравенство:

$$q_m(\varepsilon) < 3B((1 + C_{2-\alpha})2^{-m\alpha} + 2^{-2m})\varepsilon^{-2}.$$

С учетом него оценка (1) дает неравенство

$$P_t^\varepsilon < 3B\left((1 + C_{2-\alpha}) \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k\alpha} + \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-2k} \right)\varepsilon^{-2} = 3B\left((1 + C_{2-\alpha}) \frac{2^{-m\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} + \frac{4}{3} \cdot 2^{-2m} \right)\varepsilon^{-2}.$$

Остается вспомнить, что $2^m \le t < 2^{m+1}$, а значит, $2^{-m\alpha} < 2^\alpha t^{-\alpha}$ и $2^{-2m} < 4t^{-2}$.

Доказательство п. 2. Воспользуемся леммой 4:

$$\|\delta_m\|_2^2 = \left\| \max_{\substack{2^m < k < 2^{m+1},\\ k \in \mathbb{N}}} \left| \int\limits_{2^m}^{k} g(T^\tau \omega)\, d\tau \right| \right\|_2^2 = \left\| \max_{\substack{1 \le k \le 2^m - 1,\\ k \in \mathbb{N}}} \left| \int\limits_{2^m}^{2^m+k} g(T^\tau \omega)\, d\tau \right| \right\|_2^2$$

$$= \left\| \max_{1 \le k \le 2^m - 1} \left| \sum_{j=1}^{k} Y_j \right| \right\|_2^2 \le B(\log_2 2(2^m - 1))^2 (2^m - 1) < B(m+1)^2 2^m.$$

Используя в лемме 1 эту оценку и оценку из леммы 2, получим следующее неравенство:

$$q_m(\varepsilon) < 3B(2^{-m} + (m+1)^2 2^{-m} + 2^{-2m})\varepsilon^{-2}.$$

С учетом него оценка (1) дает неравенство

$$P_t^\varepsilon < 3B\left(\sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} + 2\sum_{k=m}^{\infty} (k+1)^2 2^{-(k+1)} + \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-2k} \right)\varepsilon^{-2}$$

$$= 3B\left(\frac{1}{2^{m-1}} + 2\sum_{k=m+1}^{\infty} k^2 2^{-k} + \frac{4}{3} \cdot 2^{-2m} \right)\varepsilon^{-2}$$

$$= 3B\left(\frac{1}{2^{m-1}} + 2 \cdot \frac{(m+1)^2 + 2(m+1) + 3}{2^m} + \frac{4}{3} \cdot 2^{-2m} \right)\varepsilon^{-2}$$

$$= 6B\left(\frac{(m+2)^2 + 3}{2^m} + \frac{2}{3} \cdot 2^{-2m} \right)\varepsilon^{-2}.$$

В предыдущих выкладках было использовано равенство

$$\sum_{k=N}^{\infty} k^2 2^{-k} = \frac{N^2+2N+3}{2^{N-1}}, \tag{2}$$

которое можно доказать по индукции. Индукционный переход очевиден, а для доказательства базиса индукции можно воспользоваться легко проверяемым равенством

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3} \quad \text{при } |x|<1. \tag{3}$$

Полагая $\psi(t) = \frac{(2+\log_2 t)^2+3}{t}$, перепишем последнюю оценку для P_t^ε в другой форме:

$$P_t^\varepsilon < 6B\frac{(m+2)^2+3}{2^m}\varepsilon^{-2} + 4B\varepsilon^{-2}\cdot 2^{-2m} = 6B\psi(2^m)\varepsilon^{-2} + 4B\varepsilon^{-2}\cdot 2^{-2m}. \tag{4}$$

Как нетрудно проверить, $\psi(t)$ — монотонно убывающая функция. Так как $2^m \le t < 2^{m+1}$, то $\psi(2^m) < \psi\left(\frac{t}{2}\right) = 2\frac{(1+\log_2 t)^2+3}{t}$ и $2^{-2m} < 4\cdot t^{-2}$. Остается подставить эти неравенства в (4).

Доказательство п. 3. Введем обозначение:

$$X_j(\omega) = \int_{j-1}^{j} g\circ T^\tau(\omega)\,d\tau, \quad \text{где } j\in\mathbb{N}.$$

Тогда $\int\limits_{2^m}^{k} g(T^\tau\omega)\,d\tau = \sum\limits_{l=2^m+1}^{k} X_l$.

В этот раз для оценки $\|\delta_m\|_2^2$ применим метод двоичных разбиений сумм. Для этого построим равномерную по k оценку для $\left|\sum\limits_{l=2^m+1}^{k} X_l\right|$. Запишем двоичное представление числа k в виде $k = 2^m+2^{p_1}+\dots+2^{p_{s_k}}$, где $0\le p_{s_k}<\dots<p_1\le m-1,\ s_k\le m$. Тогда целочисленный промежуток $(2^m,k]$ представляется в виде $(2^m,k] = \bigcup\limits_{t=1}^{s_k} J_t$, где $J_1 = (2^m, 2^m+2^{p_1}],\ J_2 = (2^m+2^{p_1}, 2^m+2^{p_1}+2^{p_2}],\dots$. При $p=0,1,\dots,m-1$, $j=1,2,\dots,2^{m-p}$ обозначим через $I_{m,p,j}$ целочисленный промежуток $(2^m+(j-1)2^p, 2^m+j2^p]$ и положим $\Delta_{m,p,j} = \sum\limits_{l\in I_{m,p,j}} X_l$, $j=1,\dots,2^{m-p}$, $p=0,\dots,m-1$. Очевидно, что $J_t = I_{m,p_t,j_t}$, где $1\le j_t\le 2^{m-p_t}$, а именно $j_1=1$, $j_2 = 2^{p_1-p_2}+1$, $j_3 = 2^{p_1-p_3}+2^{p_2-p_3}+1,\dots$. Поэтому для любых $k\in(2^m,2^{m+1})$

$$\left|\sum_{l=2^m+1}^{k} X_l\right|^2 = \left|\sum_{t=1}^{s_k}\Delta_{m,p_t,j_t}\right|^2 \le \frac{\pi^2}{6}\sum_{t=1}^{s_k}(p_t+1)^2|\Delta_{m,p_t,j_t}|^2$$
$$\le \frac{\pi^2}{6}\sum_{p=0}^{m-1}(p+1)^2\sum_{j=1}^{2^{m-p}}|\Delta_{m,p,j}|^2.$$

Здесь использовано неравенство

$$\left|\sum a_j\right|^2 \le \sum(j+1)^2|a_j|^2\sum(j+1)^{-2} \le \frac{\pi^2}{6}\sum(j+1)^2|a_j|^2.$$

Так как правая часть полученного неравенства не зависит от k, для δ_m справедлива оценка

$$\delta_m \le \frac{\pi^2}{6}\sum_{p=0}^{m-1}(p+1)^2\sum_{j=1}^{2^{m-p}}|\Delta_{m,p,j}|^2.$$

В силу стационарности процесса $\{g\circ T^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}^+}$ и условия теоремы имеем

$$\|\Delta_{m,p,j}\|_2^2 \le B2^{2p}(2^p+1)^{-\alpha} < B2^{p(2-\alpha)}, \quad j=1,2,\dots,2^{m-p}.$$

Следовательно,

$$\|\delta_m\|_2^2 < \frac{\pi^2}{6}B\sum_{p=0}^{m-1}(p+1)^2 2^{p(1-\alpha)}2^m < \frac{\pi^2}{6}B\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^2 2^{p(1-\alpha)}2^m.$$

В силу (2)

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^2 2^{p(1-\alpha)} = 2^{\alpha-1}\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^2 2^{(p+1)(1-\alpha)} = 2^{\alpha-1}\sum_{p=0}^{\infty}p^2(2^{1-\alpha})^p$$
$$= 2^{\alpha-1}\frac{(1+2^{1-\alpha})2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3} = \frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}.$$

В итоге получаем неравенство

$$\|\delta_m\|_2^2 < \frac{\pi^2}{6}B\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}2^m.$$

Используя в лемме 1 эту оценку и оценку из леммы 2, приходим к неравенству

$$q_m(\varepsilon) < 3B\left(2^{-m\alpha}+\frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}2^{-m}+2^{-2m}\right)\varepsilon^{-2}$$
$$< 3B\left(\left(1+\frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\right)2^{-m}+2^{-2m}\right)\varepsilon^{-2}.$$

С учетом этого неравенства оценка (1) дает

$$P_t^\varepsilon < 6B\left(1+\frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\right)2^{-m}\varepsilon^{-2}+4\cdot 2^{-2m}\varepsilon^{-2}.$$

Остается вспомнить, что $2^m \le t < 2^{m+1}$, а значит, $2^{-m} < 2t^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
2. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
3. *Гапошкин В. Ф.* О скорости убывания вероятностей ε-уклонений средних стационарных процессов // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 3. С. 366–372.
4. *Гапошкин В. Ф.* Несколько примеров к задаче об ε-уклонениях для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и ее приложения. 2001. Т. 46, № 2. С. 370–375.
5. *Качуровский А. Г., Седалищев В. В.* Константы оценок скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 8. С. 21–40.
6. *Качуровский А. Г., Седалищев В. В.* О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 624–628.
7. *Беляев Ю.К.* Один пример процесса с перемешиванием // Теория вероятностей и ее приложения. 1961. Т. 6, № 1. С. 101–102.

8. *Джулай Н. А., Качуровский А. Г.* Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1039–1052.

9. *Гапошкин В. Ф.* Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 6. С. 1366–1392.

10. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

11. *Móricz F.* Moment inequalities and the strong laws of large numbers // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1976. Bd 35, Heft 4. S. 299–314.

Статья поступила 30 декабря 2011 г.

Седалищев Владимир Викторович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
vvs1988@yandex.ru