Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.56+512.57+510.53

О РЕШЕТКАХ ПОДКЛАССОВ

М. В. Семенова, А. Замойска-Джениo

Аннотация. Изучается строение решеток подклассов различных типов классов; среди них решетки под[квази]многообразий, а также решетки относительных [финитарных] предмногообразий. Доказана теорема редукции для [финитарных] предмногообразий, обобщающая результат В. А. Горбунова. Дан ответ на один вопрос Д. Е. Пальчунова. Установлены свойства решеток относительных подклассов, связанные с теорией вычислимости.

Ключевые слова: аксиоматизируемый класс, многообразие, квазимногообразие, предмногообразие, тождество, квазитождество, решетка.

1. Введение

Работа посвящена исследованию строения решеток подклассов различных типов. Изучение подобных решеток имеет многолетнюю историю, начало которой было положено в работах Гаррета Биркгофа и Анатолия Ивановича Мальцева. В [1, 2] они независимо поставили вопрос о том, какие решетки представимы решетками [квази]многообразий, т. е. классов, определимых [квази]тождествами. К настоящему времени получен ряд замечательных результатов, касающихся этого вопроса. За более подробным изложением некоторых из них мы отсылаем читателя к монографии В. А. Горбунова [3, гл. 5] (см. также обзорную статью [4]) и библиографию в указанных работах. Отметим, что решетки псевдомногообразий конечных алгебр изучались в ряде работ (см., например, [5]).

В предложении 5.2 мы показываем, что решетка нижних подполурешеток произвольной нижней полурешетки с наибольшим элементом изоморфна решетке финитарных предмногообразий, содержащихся в некотором финитарном предмногообразии. Предложение 5.10 утверждает, что решетка полных нижних подполурешеток произвольной алгебраической решетки изоморфна решетке предмногообразий, содержащихся в некотором квазимногообразии. В теореме 7.1 даем частичное обращение этих результатов (см. также следствие 7.2).

В [6] Д. Е. Пальчунов показал, что любая не более чем счетная полная решетка изоморфна решетке относительно аксиоматизируемых классов. В [6, проблема 1] он поставил вопрос, справедлив ли этот результат для *произвольных* полных решеток. Мы даем положительный ответ на этот вопрос в следствии 6.2, доказательство которого основано на одном результате В. А. Горбунова из [7] (см. также [3] и предложение 5.1).

Первый автор поддержан Советом по грантам Президента РФ (гранты МД–2587.2010.1 и НШ-3669.2010.1), Фондом Йозефа Мяновского, а также Фондом Польской Науки. Второй автор поддержан Варшавской Политехникой (грант 504G/1120/0087/000) и фондом «Династия».

В [8, теорема 8.1] (см. также [3, теорема 5.5.16]) В. А. Горбунов доказал так называемую теорему редукции для псевдоквазимногообразий. Более точно, он показал, что решетка предмногообразий произвольного псевдоквазимногообразия, сигнатура которого содержит лишь конечное число предикатных символов, изоморфна обратному пределу конечных ограниченных снизу решеток. В настоящей работе мы рассматриваем более общий случай и доказываем теорему редукции для [финитарных] предмногообразий, не предполагая никаких ограничений на сигнатуру (см. теоремы 8.1, 8.2). Теорема редукции Горбунова является следствием доказанных нами результатов (см. следствие 8.5). При доказательстве этой общей теоремы редукции мы используем характеризационную теорему для решеток [финитарных] предмногообразий (см. теорему 7.1).

А. М. Нуракунов в работе [9] показал, что существуют квазимногообразия алгебр (алгебраических систем, сигнатура которых не содержит предикатных символов) такие, что множество [типов изоморфизма] конечных подрешеток их решеток квазимногообразий не вычислимо. Этот результат показывает, в частности, что проблема нахождения полного описания решеток квазимногообразий является чрезвычайно сложной. В теореме 9.3, используя идеи А. М. Нуракунова [9], мы строим квазимногообразия предикатных систем такие, что для решеток [квази]многообразий, а также решеток [финитарных] предмногообразий указанных квазимногообразий множество [типов изоморфизма] их конечных подрешеток не вычислимо. Этот результат дополняет отмеченный выше результат А. М. Нуракунова.

Все классы считаем *абстрактными*, т. е. замкнутыми относительно изоморфизма. Например, для любого множества I под $\{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$ всегда подразумеваем класс изоморфных копий систем из множества $\{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$.

За всеми понятиями, не определенными здесь, отсылаем читателя к [3].

2. Основные понятия теории решеток

Для решетки L пусть L^∂ обозначает решетку, двойственную к L. Для произвольного элемента $a \in L$ полагаем $\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}$.

Определение 2.1. Пара $\langle X, C\rangle$, где X — множество и $C : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ — оператор на X, называется *пространством замыкания*, если для любых $A \subseteq B \subseteq X$ выполнены следующие условия:

(i) $A \subseteq C(A)$;

(ii) $C^2(A) = C(A)$;

(iii) $C(A) \subseteq C(B)$.

Множество $A \subseteq X$ *замкнуто*, если $C(A) = A$.

Пространство замыкания $\langle X, C\rangle$ называется *алгебраическим*, если для любого $A \subseteq X$ выполнено равенство $C(A) = \bigcup\{C(F) \mid F \subseteq A \text{ конечно}\}$.

Пусть $\mathbb{L}(X, C)$ обозначает множество всех замкнутых подмножеств в X. Упорядоченное по включению, это множество является полной решеткой, в которой

$$\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i; \quad \bigvee_{i\in I} A_i = C\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)$$

для произвольного семейства $\{A_i \in \mathbb{L}(X, C) \mid i \in I\}$. Решетки вида $\mathbb{L}(X, C)$ называем *решетками замыкания*. Следующий результат хорошо известен и утверждает, что решетки замыкания — это в точности все полные решетки (см. [10, теорема 5.3] или [11, теорема 2.12], а также [12, теорема 4.2]).

Теорема 2.2. *Решетка полна тогда и только тогда, когда она изоморфна некоторой решетке замыкания.*

Доказательство. Нужно рассмотреть множество $X = L$ и оператор на нем, определенный так: $C(A) = \downarrow \bigvee A$ для любого $A \subseteq X$. $\square$

Следующая теорема также хорошо известна и утверждает, что решетки замыкания алгебраических пространств замыкания — это в точности все алгебраические решетки (см. [10, теоремы 5.5, 5.8; 3, предложение 1.3.6; 11, теорема 2.16; 12, теоремы 5.1, 5.2]).

Теорема 2.3. *Решетка является алгебраической тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке замыкания некоторого алгебраического пространства замыкания.*

Доказательство. Пусть X является множеством всех компактных элементов алгебраической решетки L. Оператор замыкания определим так: $C(A) = X \cap \downarrow \vee A$ для любого $A \subseteq X$. $\square$

Определение 2.4. Пусть L — полная решетка. Подмножество $A \subseteq L$ называется *полной нижней подполурешетой* в L, если $\bigwedge X \in A$ для любого $X \subseteq A$. Полная нижняя подполурешетка $A \subseteq L$ называется *алгебраическим подмножеством* в L, если $\bigvee X \in A$ для любого непустого направленного вверх подмножества X в A.

Бинарное отношение R на нижней полурешетке $\langle S, \wedge \rangle$ *дистрибутивно*, если для любых $a, b, c \in S$ отношение $(c, a \wedge b) \in R$ влечет $c = a' \wedge b'$ для некоторых a', $b' \in S$ таких, что $(a', a) \in R$ и $(b', b) \in R$. Очевидно, что отношение равенства $=$ дистрибутивно.

Для нижней полурешетки с наибольшим элементом $\langle S, \wedge, 1 \rangle$ и для бинарного отношения $R \subseteq S^2$ пусть $\mathrm{Sub}(S, R)$ обозначает множество всех R-замкнутых подполурешеток в S, т. е. $X \in \mathrm{Sub}(S, R)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- $\bigwedge F \in X$ для любого конечного $F \subseteq X$;
- $b \in X$ и $(a, b) \in R$ влечет $a \in X$.

Для полной решетки L пусть $\mathrm{Sub}_c(L)$ обозначает множество всех полных R-замкнутых подполурешеток в L, а $\mathrm{Sp}(L)$ — множество всех алгебраических подмножеств в L. Мы пишем $\mathrm{Sub}(L)$ вместо $\mathrm{Sub}(L, =)$ и $\mathrm{Sub}_c(L)$ вместо $\mathrm{Sub}_c(L, =)$. Упорядоченные по включению, перечисленные выше множества образуют полные решетки, в которых решеточное пересечение совпадает с теоретико-множественным пересечением. Что же касается решеточных объединений, имеет место следующая

Лемма 2.5. *Пусть L — нижняя полурешетка, и пусть бинарное отношение $R \subseteq L^2$ дистрибутивно.*

(i) $A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\}$ *для любых* $A, B \in \mathrm{Sub}(L, R)$.

(ii) *Если решетка L полна, то* $A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\}$ *для любых* $A, B \in \mathrm{Sub}_c(L, R)$.

(iii) *Если решетка L непрерывна вверх и полна, то* $A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\}$ *для любых* $A, B \in \mathrm{Sp}(L)$.

Доказательство. Утверждения (i), (ii) тривиальны, утверждение (iii) следует из [3, предложение 1.3.11]. $\square$

3. Биркгофовы классы

Для произвольной фиксированной сигнатуры σ пусть $\mathbf{K}(\sigma)$ обозначает класс всех алгебраических систем сигнатуры σ. Пусть также $\mathbf{T}(\sigma)$ обозначает многообразие всех σ-систем, определенное тождеством $\forall xy\ x = y$.

Следуя В. А. Горбунову [3], для произвольного класса $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ через $\mathbf{V}(\mathbf{K})$ [$\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ соответственно] будем обозначать наименьшее [квази]многообразие, содержащее класс $\mathbf{K}$. Пусть $\mathbf{H}(\mathbf{K})$ — класс систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, которые являются гомоморфными образами систем из $\mathbf{K}$; пусть $\mathbf{P}(\mathbf{K})$ [$\mathbf{P}^{\omega}(\mathbf{K})$ соответственно] — класс систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, которые изоморфны декартовым произведениям [конечного числа] систем из $\mathbf{K}$; пусть $\mathbf{P}_s(\mathbf{K})$ [$\mathbf{P}_s^{\omega}(\mathbf{K})$ соответственно] — класс систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, которые изоморфны подпрямым произведениям [конечного числа] систем из $\mathbf{K}$; пусть $\mathbf{L}_s(\mathbf{K})$ — класс систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, которые изоморфны надпрямым пределам систем из $\mathbf{K}$; также пусть $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ — класс систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, которые изоморфны подсистемам систем из $\mathbf{K}$. Наконец, пусть $\mathbf{K}_{fin}$ — класс всех конечных систем из $\mathbf{K}$.

Для любого оператора $\mathbf{O}$, определенного выше, и для любых двух классов $\mathbf{K}, \mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ пишем $(\mathbf{O}\cap\mathbf{K})(\mathbf{K}')$ вместо $\mathbf{O}(\mathbf{K}')\cap\mathbf{K}$. Согласно теореме Биркгофа и [3, разд. 2.3]

$$\mathbf{V}(\mathbf{K}) = \mathbf{HSP}(\mathbf{K}) = \mathbf{HP}_s\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{HP}_s(\mathbf{K}),$$

в то время как согласно [13, теорема 5.2] (см. также [3, теорема 2.3.6]) $\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathbf{K})$. Класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ называется [*финитарным*] *предмногообразием*, если $\mathbf{K} = \mathbf{SP}(\mathbf{K}) = \mathbf{P}_s\mathbf{S}(\mathbf{K})$ [$\mathbf{K} = \mathbf{SP}^{\omega}(\mathbf{K}) = \mathbf{P}_s^{\omega}\mathbf{S}(\mathbf{K})$ соответственно].

Понятие финитарного предмногообразия (в случае сигнатуры, не содержащей предикатных символов) было введено А. Верницким в [14, 15]. Согласно [16] класс систем является предмногообразием тогда и только тогда, когда он определяется бесконечными импликациями.

Следующее определение введено В. А. Горбуновым (см. [3, разд. 2.5]).

Определение 3.1. Пусть $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Тогда класс $\mathbf{K}'$ называется $\mathbf{K}$-[*квази*]*эквациональным*, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \operatorname{Mod}(\Sigma)$ для некоторого множества [квази]тождеств Σ сигнатуры σ.

Определение 3.2. Пусть $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Тогда класс $\mathbf{K}'$ называется [*финитарным*] $\mathbf{K}$-*предмногообразием*, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{A}$ для некоторого [финитарного] предмногообразия $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$.

Равносильно $\mathbf{K}'$ является [финитарным] $\mathbf{K}$-предмногообразием тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{SP}(\mathbf{K}')$ [$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{SP}^{\omega}(\mathbf{K}')$ соответственно].

Определение 3.3. Класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ называется *псевдоквазимногообразием*, если он является финитарным предмногообразием.

Пусть $\operatorname{Lv}(\mathbf{K})$ обозначает множество всех $\mathbf{K}$-эквациональных подклассов в $\mathbf{K}$, а $\operatorname{Lq}(\mathbf{K})$ — множество всех $\mathbf{K}$-квазиэквациональных подклассов в $\mathbf{K}$. Пусть также $\operatorname{Lp}(\mathbf{K})$ [$\operatorname{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ соответственно] обозначает класс всех [финитарных] $\mathbf{K}$-предмногообразий. Упорядоченные по включению, $\operatorname{Lv}(\mathbf{K})$, $\operatorname{Lq}(\mathbf{K})$, $\operatorname{Lp}(\mathbf{K})$ и $\operatorname{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ образуют полные решетки. Отметим, что в случае [финитарных] предмногообразий слово «решетка» употребляется также в отношении собственного класса.

Замечание 3.4. Очевидно, что для псевдоквазимногообразия $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ множество $\operatorname{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ всех псевдоквазимногообразий, содержащихся в $\mathbf{K}$, является алгебраической решеткой мощности, не превосходящей континуума. Более того, если σ содержит лишь конечное число предикатных символов, то $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$.

Определение 3.5 [3, разд. 2.5.1]. Класс $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ называется *гомоморфно замкнутым в* $\mathbf{K}$, если $\mathbf{H}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}'$. Класс $\mathbf{K}'$, гомоморфно замкнутый в $\mathbf{K}$, называется [l-]*проективно полным в* $\mathbf{K}$, если для любой алгебраической системы $\mathscr{A} \in \mathbf{K}'$ найдется система $\mathscr{B} \in \mathbf{K}'$, которая [$l$-]проективна в $\mathbf{K}$ и $\mathscr{A} \in \mathbf{H}(\mathscr{B})$.

Теорема 3.6 [3, теорема 2.5.2]. *Пусть* $\mathbf{K}$ *— предмногообразие и класс* $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$ *проективно полон в* $\mathbf{K}$. *Тогда для любого непустого подкласса* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{V}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}' = (\mathbf{H} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K}')(\mathbf{S} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{A}).$$

В частности, непустой подкласс $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}'$ *является* $\mathbf{K}'$*-эквациональным тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *замкнут относительно операторов* $\mathbf{H}\cap\mathbf{K}'$, $\mathbf{S}\cap\mathbf{K}'$ *и* $\mathbf{P}_s\cap\mathbf{K}'$.

Теорема 3.7 [3, теорема 2.5.3]. *Пусть* $\mathbf{K}$ *— предмногообразие и класс* $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$ l*-проективно полон в* $\mathbf{K}$. *Тогда для любого непустого подкласса* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}' = (\mathbf{L}_s \cap \mathbf{K}')(\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K}')(\mathbf{S} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{A}).$$

В частности, непустой подкласс $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}'$ *является* $\mathbf{K}'$*-квазиэквациональным тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *замкнут относительно операторов* $\mathbf{L}_s \cap \mathbf{K}'$, $\mathbf{S} \cap \mathbf{K}'$ *и* $\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K}'$.

Следующая теорема является аналогом теорем 3.6, 3.7 для [финитарных] $\mathbf{K}$-предмногообразий. Она дает явную характеризацию относительных [финитарных] предмногообразий для гомоморфно замкнутых классов так же, как теоремы 3.6, 3.7 характеризуют относительные [квази]эквациональные подклассы l-проективно полных классов.

Теорема 3.8. *Пусть* $\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *и класс* $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$ *гомоморфно замкнут в* $\mathbf{K}$. *Тогда для любого непустого подкласса* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$ *имеют место равенства*

$$\mathbf{SP}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}' = (\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K}')(\mathbf{S} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{A}); \quad \mathbf{SP}^{\omega}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}' = (\mathbf{P}_s^{\omega} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{S} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{A}).$$

В частности, непустой подкласс $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}'$ *является* [*финитарным*] $\mathbf{K}'$*-предмногообразием тогда и только тогда, когда* $\mathbf{A}$ *замкнут относительно операторов* $\mathbf{S} \cap \mathbf{K}'$ *и* $\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K}'$ [*относительно операторов* $\mathbf{S} \cap \mathbf{K}'$ *и* $\mathbf{P}_s^{\omega} \cap \mathbf{K}'$ *соответственно*].

Доказательство. Докажем лишь первое равенство, доказательство второго аналогично (см. также доказательство теоремы 2.5.2 в [3]).

Пусть $\mathscr{A} \in \mathbf{SP}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{K}'$. Поскольку $\mathscr{A} \in \mathbf{SP}(\mathbf{A})$, найдутся алгебраические системы $\mathscr{A}_i \in \mathbf{A}$, $i \in I$, такие, что $\mathscr{A}$ вложима в $\prod\limits_{i\in I} \mathscr{A}_i$. Пусть p_i обозначает i-ю проекцию для любого $i \in I$. Система $\mathscr{B}_i = p_i(\mathscr{A})$ принадлежит классу $\mathbf{H}(\mathscr{A})$ для любого $i \in I$. Более того, $\mathscr{B}_i \in \mathbf{S}(\mathscr{A}_i) \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{A}) \subset eq\mathbf{K}$, поскольку класс $\mathbf{K}$ замкнут относительно подсистем. Поэтому $\mathscr{B}_i \in \mathbf{H}(\mathscr{A}) \cap \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}'$, так как последний класс гомоморфно замкнут в $\mathbf{K}$. Таким образом, $\mathscr{B}_i \in (\mathbf{S} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{A})$ для всех $i \in I$. Отсюда следует, что $\mathscr{A} \in (\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K}')(\mathbf{S} \cap \mathbf{K}')(\mathbf{A})$. Обратное включение очевидно. $\square$

Определение 3.9 [3, разд. 2.5.2]. Класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ называется [*квази*]*биркгофовым*, если любой непустой подкласс $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$, замкнутый относительно операторов $\mathbf{H}\cap\mathbf{K}$, $\mathbf{P}_s\cap\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}\cap\mathbf{K}$ [$\mathbf{L}_s\cap\mathbf{K}$, $\mathbf{P}_s\cap\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}\cap\mathbf{K}$ соответственно], является $\mathbf{K}$-[квази]эквациональным классом.

Следующее определение является аналогом определения 3.9.

Определение 3.10. Класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ называется [*финитарно*] *предбиркгофовым*, если любой непустой подкласс $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$, замкнутый относительно операторов $\mathbf{P}_s\cap\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}\cap\mathbf{K}$ [$\mathbf{P}_s^\omega\cap\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}\cap\mathbf{K}$ соответственно], является [финитарным] $\mathbf{K}$-предмногобразием.

Из теорем 3.6–3.8 вытекает

Следствие 3.11. *Пусть* $\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *и класс* $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$ *гомоморфно замкнут в* $\mathbf{K}$. *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если* $\mathbf{K}$ *— предмногообразие и класс* $\mathbf{K}'$ *проективно полон в* $\mathbf{K}$, *то* $\mathbf{K}'$ *является биркгофовым классом.*

(ii) *Если* $\mathbf{K}$ *— предмногообразие и класс* $\mathbf{K}'$ l*-проективно полон в* $\mathbf{K}$, *то* $\mathbf{K}'$ *является квазибиркгофовым классом.*

(iii) *Класс* $\mathbf{K}'$ *является* [*финитарным*] *предбиркгофовым классом.*

Следующее утверждение является аналогом леммы 5.4.1 из [3] для [финитарных] предмногообразий.

Лемма 3.12. *Пусть* $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *и* $\mathbf{K}$ *является предбиркгофовым подклассом в* $\mathbf{A}$. *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Для любого множества* $\{\mathbf{K}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Lp}(\mathbf{A})$ *выполнено равенство*

$$\bigvee_{\mathbf{K}}\{\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K} \mid i \in I\} = \Big(\bigvee_{\mathbf{A}}\{\mathbf{K}_i \mid i \in I\}\Big) \cap \mathbf{K}.$$

(ii) *Если* $\mathbf{K}'$ *— предбиркгофов подкласс в* $\mathbf{A}$, *то отображение* $\varphi : \mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Lp}(\mathbf{K}')$, $\varphi : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} \cap \mathbf{K}'$, *является полным решеточным гомоморфизмом.*

(iii) *Аналогичные утверждения справедливы для решеток финитарных предмногообразий* $\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$ *и* $\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K}')$ *при условии, что классы* $\mathbf{K}$ *и* $\mathbf{K}'$ *являются финитарными предбиркгофовыми подклассами в* $\mathbf{A}$.

Доказательство. (i) Поскольку класс $\bigcup\limits_{i\in I}\mathbf{K}_i$ замкнут относительно оператора $\mathbf{S}\cap\mathbf{A}$, имеем

$$(\mathbf{S}\cap\mathbf{K})\Big(\bigcup_{i\in I}\mathbf{K}_i\Big) = \Big(\bigcup_{i\in I}\mathbf{K}_i\Big)\cap\mathbf{K} = \bigcup_{i\in I}(\mathbf{K}_i\cap\mathbf{K}) = (\mathbf{S}\cap\mathbf{K})\Big(\bigcup_{i\in I}(\mathbf{K}_i\cap\mathbf{K})\Big).$$

Используя то, что $\mathbf{K}$ является предбиркгофовым подклассом в $\mathbf{A}$, получаем

$$\Big(\bigvee_{\mathbf{A}}\{\mathbf{K}_i \mid i\in I\}\Big)\cap\mathbf{K} = \mathbf{SP}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathbf{K}_i\Big)\cap\mathbf{K} = (\mathbf{P}_s\cap\mathbf{K})(\mathbf{S}\cap\mathbf{K})\Big(\bigcup_{i\in I}\mathbf{K}_i\Big)$$
$$= (\mathbf{P}_s\cap\mathbf{K})(\mathbf{S}\cap\mathbf{K})\Big(\bigcup_{i\in I}(\mathbf{K}_i\cap\mathbf{K})\Big) = \mathbf{SP}\Big(\bigcup_{i\in I}(\mathbf{K}_i\cap\mathbf{K})\Big)\cap\mathbf{K} = \bigvee_{\mathbf{K}}\{\mathbf{K}_i\cap\mathbf{K} \mid i\in I\}.$$

(ii) Нетрудно видеть, что отображение φ определено корректно и сохраняет произвольные пересечения. Для любого множества $\{\mathbf{K}_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ из (i) следует, что

$$\varphi\Big(\bigvee_{\mathbf{K}}\{\mathbf{K}_i \mid i\in I\}\Big) = \varphi\Big(\mathbf{SP}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathbf{K}_i\Big)\cap\mathbf{K}\Big) = \mathbf{SP}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathbf{K}_i\Big)\cap\mathbf{K}'$$

$$= \Big(\mathbf{SP}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathbf{K}_i\Big)\cap\mathbf{A}\Big)\cap\mathbf{K}' = \Big(\bigvee_{\mathbf{A}}\{\mathbf{SP}(\mathbf{K}_i)\cap\mathbf{A}\mid i\in I\}\Big)\cap\mathbf{K}'$$
$$= \bigvee_{\mathbf{K}'}\{\mathbf{SP}(\mathbf{K}_i\cap\mathbf{A}\cap\mathbf{K}')\mid i\in I\} = \bigvee_{\mathbf{K}'}\{\mathbf{SP}(\mathbf{K}_i\cap\mathbf{K}\cap\mathbf{K}')\mid i\in I\}$$
$$= \bigvee_{\mathbf{K}'}\{\mathbf{K}_i\cap\mathbf{K}'\mid i\in I\} = \bigvee_{\mathbf{K}'}\{\varphi(\mathbf{K}_i)\mid i\in I\},$$

т. е. φ сохраняет также произвольные объединения.

Доказательство (iii) аналогично доказательству (i), (ii) с заменой $\mathbf{P}$ на $\mathbf{P}^\omega$. $\square$

Следствие 3.13. *Пусть $\mathbf{S}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}\subseteq\mathbf{K}(\sigma)$ и $\mathscr{A}\in\mathbf{K}(\sigma)$. Тогда отображения*

$$\varphi:\mathrm{Lp}(\mathbf{K})\to\mathrm{Lp}(\mathbf{H}(\mathscr{A})\cap\mathbf{K}),\quad \varphi:\mathbf{X}\mapsto\mathbf{X}\cap\mathbf{H}(\mathscr{A});$$
$$\psi:\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})\to\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{H}(\mathscr{A})\cap\mathbf{K}),\quad \psi:\mathbf{X}\mapsto\mathbf{X}\cap\mathbf{H}(\mathscr{A})$$

являются полными решеточными гомоморфизмами.

Доказательство. Класс $\mathbf{K}$, очевидно, гомоморфно замкнут в себе. Кроме того, класс $\mathbf{H}(\mathscr{A})\cap\mathbf{K}$ также гомоморфно замкнут в $\mathbf{K}$. Поэтому оба этих класса являются [финитарными] предбиркгофовыми подклассами в $\mathbf{K}$ согласно следствию 3.11(iii), а отображения φ и ψ являются полными решеточными гомоморфизмами согласно лемме 3.12(ii),(iii). $\square$

4. Одноэлементные предикатные системы

Рассмотрим сигнатуру $\sigma = \{p_i \mid i\in I\}$, состоящую лишь из одноместных предикатных символов. Для любого множества $X\subseteq I$ пусть $\mathscr{A}_X$ обозначает систему из $\mathbf{T}(\sigma)$ такую, что $\mathscr{A}_X\models\forall x\ p_i(x)$ тогда и только тогда, когда $i\in X$. Очевидно, класс $\mathbf{T}(\sigma)$ состоит из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_X$, $X\subseteq I$.

Лемма 4.1. *Для сигнатуры $\sigma=\{p_i\mid i\in I\}$, состоящей лишь из одноместных предикатных символов, верны следующие утверждения.*

(i) *Для любых множеств $X,Y\subseteq I$ включение $\mathscr{A}_Y\in\mathbf{H}(\mathscr{A}_X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $X\subseteq Y$.*

(ii) *Для любого множества $X\subseteq I$ выполнено равенство $\mathbf{S}(\mathscr{A}_X)=\{\mathscr{A}_X\}$.*

(iii) *Если $X_j\subseteq I$ для любого $j\in J$, то $\prod\limits_{j\in J}\mathscr{A}_{X_j}\cong\mathscr{A}_X$, где $X=\bigcap\limits_{j\in J}X_j$.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из определения гомоморфизма (см. [3, разд. 1.1.2]). Утверждение (ii) очевидно. Пусть $X_j\subseteq I$ для любого $j\in J$, и пусть $X=\bigcap\limits_{j\in J}X_j$. Тогда для любого $i\in X$ выполняется

$$\prod_{j\in J}\mathscr{A}_{X_j}\models\forall x\ p_i(x)\ \Leftrightarrow\ \mathscr{A}_{X_j}\models\forall x\ p_i(x)\ \text{для всех}\ j\in J$$
$$\Leftrightarrow i\in X_j\ \text{для всех}\ j\in J\ \Leftrightarrow\ i\in\bigcap_{j\in J}X_j = X\ \Leftrightarrow\ \mathscr{A}_X\models\forall x\ p_i(x).$$

Поэтому справедливо утверждение (iii). $\square$

Пусть $\langle X,C\rangle$ — пространство замыкания. Полагаем $\sigma(X)=\{p_x\mid x\in X\}$. Пусть $\Sigma(X,C)$ состоит из [в общем случае бесконечных] импликаций вида

$$\forall x\ \bigwedge_{a\in A}p_a(x)\to p_b(x),\quad A\subseteq X,\ b\in C(A).$$

Очевидно, если множество X конечно, то сигнатура $\sigma(X)$ конечна, а $\Sigma(X,C)$ — конечное множество квазитождеств.

Класс $\mathrm{Mod}(\Sigma(X,C))$, очевидно, замкнут относительно подсистем и декартовых произведений и поэтому является предмногообразием. Таким образом, класс $\mathbf{K}(X,C) = \mathrm{Mod}(\Sigma(X,C)) \cap \mathbf{T}(\sigma(X))$ также является предмногообразием.

Лемма 4.2. *Для любого пространства замыкания $\langle X, C\rangle$ класс $\mathbf{K}(X,C)$ состоит из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_B$, где $B \in \mathbb{L}(X,C)$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} \in \mathbf{K}(X,C)$ и $B = \{a \in X \mid \mathscr{A} \models \forall x\ p_a(x)\}$. Тогда $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}_B$ и для любого $b \in C(B)$ имеем $\mathscr{A} \models \forall x \bigwedge\limits_{a\in B} p_a(x) \to p_b(x)$. Поэтому $b \in B$ и $B = C(B) \in \mathbb{L}(X,C)$.

Обратно, пусть $B \in \mathbb{L}(X,C)$. Предположим, что $A \subseteq X$, $b \in C(A)$ и $\mathscr{A}_B \models \forall x\ p_a(x)$ для любого $a \in A$. Это означает, что $A \subseteq B$, т. е. $C(A) \subseteq B$, так как последнее множество замкнуто. Таким образом, $b \in B$ и $\mathscr{A}_B \models \forall x\ p_b(x)$. Следовательно, $\mathscr{A}_B \models \Sigma(X,C)$, другими словами, $\mathscr{A}_B \in \mathbf{K}(X,C)$. $\square$

Пусть $\langle X, C\rangle$ — алгебраическое пространство замыкания и $\Delta(X,C)$ состоит из квазитождеств вида

$$\forall x \bigwedge_{a\in A} p_a(x) \to p_b(x), \quad A \subseteq X \text{ конечно, } b \in C(A).$$

Если X конечно, то $\Delta(X,C)$ также конечно. Класс $\mathrm{Mod}(\Delta(X,C))$ является квазимногообразием. Поэтому $\mathbf{A}(X,C) = \mathrm{Mod}(\Delta(X,C)) \cap \mathbf{T}(\sigma(X))$ также является квазимногообразием.

Лемма 4.3. *Для любого алгебраического пространства замыкания $\langle X, C\rangle$ класс $\mathbf{A}(X,C)$ состоит из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_B$, где $B \in \mathbb{L}(X,C)$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} \in \mathbf{A}(X,C)$ и $B = \{a \in X \mid \mathscr{A} \models \forall x\ p_a(x)\}$. Тогда $\mathscr{A} \cong \mathscr{A}_B$ и для любого $b \in C(B)$ существует конечное подмножество $F \subseteq B$ такое, что $b \in C(F)$. Поскольку $\forall x \bigwedge\limits_{a\in F} p_a(x) \to p_b(x) \in \Delta(X,C)$, заключаем, что $\mathscr{A} \models \forall x \bigwedge\limits_{a\in F} p_a(x) \to p_b(x)$, т. е. $\mathscr{A} \models \forall x\ p_b(x)$. Поэтому $b \in B$ и $B = C(B) \in \mathbb{L}(X,C)$.

Доказательство того, что $\mathscr{A}_B \models \Delta(X,C)$ для любого $B \in \mathbb{L}(X,C)$, аналогично доказательству леммы 4.2. $\square$

5. Представление решетками подклассов

Следующее предложение показывает, в частности, что любая полная решетка изоморфна решетке относительных эквациональных подклассов некоторого предмногообразия. Это утверждение доказано В. А. Горбуновым [7, пример 4.9]. Здесь дадим короткое прямое доказательство.

Предложение 5.1. *Для любой полной решетки L существуют сигнатура σ, состоящая лишь из одноместных предикатных символов, и предмногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ такие, что $L^\partial \cong \mathrm{Lv}(\mathbf{K})$ и $\mathrm{Sub}_c(L) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$.*

Доказательство. Поскольку решетка L полна, согласно теореме 2.2 найдется пространство замыкания $\langle X, C\rangle$ такое, что $L \cong \mathbb{L}(X,C)$. Пусть $\sigma = \sigma(X)$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}(X,C)$. Тогда $\mathbf{K}$ является предмногообразием. Пусть $\psi : L \to \mathbb{L}(X,C)$ — соответствующий изоморфизм. Из леммы 4.2 следует, что класс $\mathbf{K}$ состоит из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_{\psi(a)}$, где $a \in L$.

Определим отображение $\varphi : \mathbb{L}(X,C) \to \mathrm{Lv}(\mathbf{K})$ по правилу

$$\varphi : B \mapsto \{\mathscr{A}_F \in \mathbf{T}(\sigma) \mid F \in \mathbb{L}(X,C) \text{ и } B \subseteq F\}, \quad B \in \mathbb{L}(X,C).$$

Нетрудно проверить, что φ определено корректно и является двойственным изоморфизмом, т. е. $L^\partial \cong \mathrm{Lv}\big(\mathbf{K}\big)$.

Определим отображение $\varphi' : \mathrm{Sub}_c(L) \to \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ по правилу

$$\varphi' : B \mapsto \{\mathscr{A}_{\psi(b)} \in \mathbf{T}(\sigma) \mid b \in B\}, \quad B \in \mathrm{Sub}_c(L).$$

Тогда отображение φ' также определено корректно и является изоморфизмом, т. е. $\mathrm{Sub}_c(L) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$. $\square$

Следующее предложение является аналогом предложения 5.1 для финитарных предмногообразий.

Предложение 5.2. *Для любой нижней полурешетки $\langle S, \wedge, 1\rangle$ с наибольшим элементом существуют сигнатура σ, состоящая лишь из одноместных предикатных символов, и финитарное предмногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ такие, что $\mathrm{Sub}(S) \cong \mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \{p_a \mid a \in S\}$ состоит из одноместных предикатных символов, а класс $\mathbf{K}$ — из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_{\downarrow b}$, где $b \in S$. Согласно лемме 4.1(iii) для любого $n < \omega$ и для любых $b_0, \dots, b_{n-1} \in S$ имеем $\mathscr{A}_{\downarrow b_0} \times \dots \times \mathscr{A}_{\downarrow b_{n-1}} \cong \mathscr{A}_{\downarrow b}$, где $b = b_0 \wedge \dots \wedge b_{n-1}$, в то время как $\mathbf{S}(\mathscr{A}_{\downarrow a}) = \{\mathscr{A}_{\downarrow a}\}$ для любого $a \in S$ согласно лемме 4.1(ii). Поэтому класс $\mathbf{K}$ является финитарным предмногообразием.

Определим отображение $\varphi : \mathrm{Sub}(S) \to \mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$ по правилу

$$\varphi : B \mapsto \{\mathscr{A}_{\downarrow b} \in \mathbf{T}(\sigma) \mid b \in B\}, \quad B \in \mathrm{Sub}(S).$$

Снова согласно лемме 4.1(ii),(iii) отображение φ определено корректно.

Покажем, что φ является изоморфизмом решеток. Пусть $A, B \in \mathrm{Sub}(S)$. Если $A \subseteq B$ в $\mathrm{Sub}(S)$, то, очевидно, $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$. Поэтому φ сохраняет порядок. Если $A \nsubseteq B$ в $\mathrm{Sub}(S)$, то $\mathscr{A}_{\downarrow a} \in \varphi(A) \backslash \varphi(B)$ для любого $a \in A \backslash B$. Поэтому отображение φ взаимно однозначно. Пусть $\mathbf{K'} \in \mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$ и $A = \{a \in S \mid \mathscr{A}_{\downarrow a} \in \mathbf{K'}\}$. Доказательство того, что $A \in \mathrm{Sub}(S)$, использует примененный выше прием, а также лемму 4.1(ii),(iii). Отсюда следует, что отображение φ сюръективно, поэтому является решеточным изоморфизмом. $\square$

Следующее предложение показывает, что любая полная коалгебраическая решетка изоморфна решетке относительных эквациональных подклассов некоторого квазимногообразия. Это утверждение доказано в [13, 17] (см. также [3, теорема 5.2.8]). Здесь дадим короткое прямое доказательство этого утверждения.

Предложение 5.3. *Для любой полной коалгебраической решетки L существуют сигнатура σ, состоящая лишь из одноместных предикатных символов, и квазимногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ такие, что $L \cong \mathrm{Lv}\big(\mathbf{K}\big)$.*

Доказательство. Поскольку двойственная решетка L^∂ является алгебраической, согласно теореме 2.3 существует алгебраическое пространство замыкания $\langle X, C\rangle$ такое, что $L^\partial \cong \mathbb{L}(X,C)$. Пусть $\sigma = \sigma(X)$ и $\mathbf{K} = \mathbf{A}(X,C)$. Тогда $\mathbf{K}$ является квазимногообразием. Как и в доказательстве предложения 5.1, определим отображение $\varphi : \mathbb{L}(X,C) \to \mathrm{Lv}(\mathbf{K})$ по правилу

$$\varphi : B \mapsto \{\mathscr{A}_F \in \mathbf{T}(\sigma) \mid F \in \mathbb{L}(X,C) \text{ и } B \subseteq F\}, \quad B \in \mathbb{L}(X,C).$$

Тогда φ является двойственным изоморфизмом из $\mathbb{L}(X,C)$ на $\mathrm{Lv}(\mathbf{K})$. $\square$

Следствие 5.4. *Класс всех полных алгебраических решеток совпадает с классом решеток, изоморфных решеткам относительных эквациональных подклассов квазимногообразий.*

Доказательство. Согласно [3, предложение 5.1.1] для любого квазимногообразия $\mathbf{K}$ решетка $\mathrm{Lv}(\mathbf{K})$ является полной и алгебраической. Требуемое утверждение следует из предложения 5.3. $\square$

Используя методы, сходные с описанными выше, можно доказать следующие утверждения (см. [18]).

Предложение 5.5. *Для любой полной решетки L существуют сигнатура σ, состоящая из одного одноместного предикатного символа и $|L|$ константных символов [из $|L|+1$ константных символов соответственно], и класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ такие, что $L \cong \mathrm{Lv}\big(\mathbf{K}\big)$ и $\mathrm{Sub}_c(L^\partial) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$.*

Предложение 5.6. *Для любой полурешетки $\langle S, \wedge, 1\rangle$ с наибольшим элементом существуют сигнатура σ, состоящая из одного одноместного предикатного символа и $|S|$ константных символов [из $|S|+1$ константных символов соответственно], и класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ такие, что $\mathrm{Sub}(S) \cong \mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$.*

Предложение 5.7. *Пусть L — полная решетка такая, что для всех $A, B \in \mathrm{Sp}(L)$ имеет место равенство*

$$A \vee B = \{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Тогда существуют сигнатура σ, состоящая лишь из одноместных предикатных символов, и предмногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ такие, что решетка $\mathrm{Sp}(L)$ вложима в решетку $\mathrm{Lq}\big(\mathbf{K}\big)$.

Доказательство. Согласно теореме 2.2 найдется пространство замыкания $\langle X, C\rangle$ такое, что $L \cong \mathbb{L}(X, C)$; пусть $\psi : L \to \mathbb{L}(X, C)$ — соответствующий изоморфизм. Полагаем $\sigma = \sigma(X)$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}(X, C)$, где $\sigma(X)$ и $\mathbf{K}(X, C)$ определены в разд. 4. Тогда $\mathbf{K}$ является предмногообразием. Из леммы 4.2 следует, что класс $\mathbf{K}$ состоит из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_{\psi(a)}$, где $a \in L$.

Определим отображение $\varphi : \mathrm{Sp}(L) \to \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ по правилу

$$\varphi : B \mapsto \{\mathscr{A}_{\psi(b)} \in \mathbf{T}(\sigma) \mid b \in B\}, \quad B \in \mathrm{Sp}(L).$$

Утверждение 1. *Отображение φ определено корректно.*

Доказательство. Пусть $B \in \mathrm{Sp}(L)$. Согласно лемме 4.1(ii) класс $\varphi(B)$ замкнут относительно подсистем. Пусть $\{b_i \mid i \in I\} \subseteq B$. По лемме 4.1(iii) получаем

$$\prod_{i\in I} \mathscr{A}_{\psi(b_i)} \cong \mathscr{A}_{\bigcap\limits_{i\in I} \psi(b_i)} = \mathscr{A}_{\psi(\bigwedge\limits_{i\in I} b_i)} \in \varphi(B),$$

поскольку ψ является изоморфизмом и $\bigwedge\limits_{i\in I} b_i \in B$, так как B замкнуто относительно произвольных пересечений. Таким образом, класс $\varphi(B)$ замкнут относительно декартовых произведений.

Наконец, пусть I — непустое направленное вверх множество, и пусть множество $\{b_i \mid i \in I\} \subseteq B$ таково, что $\mathscr{A}_{\psi(b_j)} \in \mathbf{H}(\mathscr{A}_{\psi(b_i)})$ для любого $i \leq j$ в I и $\varinjlim\limits_{i\in I} \mathscr{A}_{\psi(b_i)} \in \mathbf{K}$. В силу леммы 4.2 это означает, что $\varinjlim\limits_{i\in I} \mathscr{A}_{\psi(b_i)} \cong \mathscr{A}_{\psi(c)}$ для некоторого $c \in L$. Согласно лемме 4.1(i) и [3, разд. 1.2.5] $\psi(b_i) \subseteq \psi(b_j) \subseteq \psi(c)$, т. е. $b_i \leq b_j \leq c$ для всех $i \leq j$. Таким образом, множество $\{b_i \mid i \in I\}$ направлено вверх, поэтому $c \geq b = \bigvee_{i\in I} b_i \in B$, поскольку B замкнуто относительно объединений непустых направленных вверх множеств. Следовательно, $\psi(b) \subseteq \psi(c)$. С другой стороны, по определению надпрямого предела и лемме 4.1(i)

$$\mathscr{A}_{\psi(c)} \cong \varinjlim_{i\in I} \mathscr{A}_{\psi(b_i)} \cong \mathscr{A}_{\bigcup\limits_{i\in I} \psi(b_i)},$$

откуда

$$\psi(c) = \bigcup_{i\in I} \psi(b_i) \subseteq \bigvee_{i\in I} \psi(b_i) = \psi\Big(\bigvee_{i\in I} b_i\Big) = \psi(b) \subseteq \psi(c),$$

поскольку ψ является изоморфизмом. Суммируя сказанное выше, получаем $\psi(b) = \psi(c)$, т. е. $c = b \in B$. Поэтому класс $\varphi(B)$ также замкнут относительно надпрямых пределов, содержащихся в $\mathbf{K}$. Согласно теореме 3.7 $\varphi(B) \in \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. $\square$

Утверждение 2. *Отображение φ является решеточным вложением.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathrm{Sp}(L)$. Если $A \subseteq B$ в $\mathrm{Sp}(L)$, то $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$. Поэтому φ сохраняет порядок. Если $A \nsubseteq B$ в $\mathrm{Sp}(L)$, то $\mathscr{A}_{\psi(x)} \in \varphi(A)\backslash\varphi(B)$ для любого $x \in A\backslash B$. Поэтому отображение φ взаимно однозначно.

Пусть $a \in L$. Если $\mathscr{A}_{\psi(a)} \in \varphi(A) \cap \varphi(B)$, то согласно нашему определению $a \in A\cap B$, т. е. $\mathscr{A}_{\psi(a)} \in \varphi(A\cap B)$. Поэтому φ сохраняет пересечения. (В действительности, используя приведенные выше рассуждения, можно показать, что φ сохраняет произвольные пересечения.) Если $\mathscr{A}_{\psi(a)} \in \varphi(A \vee B)$, то согласно нашему определению $a \in A \vee B = \{x \wedge y \mid x \in A,\ y \in B\}$. Поэтому по лемме 4.1(iii) для некоторых $x \in A$ и $y \in B$

$$\mathscr{A}_{\psi(a)} = \mathscr{A}_{\psi(x\wedge y)} = \mathscr{A}_{\psi(x)\cap\psi(y)} \cong \mathscr{A}_{\psi(x)} \times \mathscr{A}_{\psi(y)} \in \varphi(A) \vee \varphi(B).$$

Таким образом, φ сохраняет также объединения, т. е. является вложением. $\square$

Согласно утверждению 2 решетка $\mathrm{Sp}(L)$ вложима в решетку $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. $\square$

Следствие 5.8. *Для любой полной непрерывной вверх решетки L существуют сигнатура σ, состоящая лишь из одноместных предикатных символов, и предмногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ такие, что решетка $\mathrm{Sp}(L)$ вложима в решетку $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$.*

Пример 5.9. Если решетка L удовлетворяет условиям предложения 5.7, то решетка $\mathrm{Sp}(L)$, вообще говоря, не обязана быть изоморфной решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. Однако, отображение φ из доказательства предложения 5.7 определяет изоморфизм, если решетка L является алгебраической, как показывает предложение 5.10 ниже.

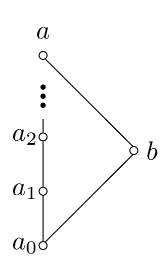

Рис. 1. Решетка L^*.

Пусть L^* обозначает полную решетку, изображенную на рис. 1. Эта решетка удовлетворяет всем предположениям предложения 5.7. Пусть $\langle L^*, C\rangle$ — пространство замыкания такое, что $C(X) = \downarrow \bigvee X$ для любого $X \subseteq L^*$. Тогда $L^* \cong \mathbb{L}(L^*, C)$ согласно теореме 2.2. Поскольку решетка L^* не является алгебраической, пространство замыкания $\langle L^*, C\rangle$ также не является алгебраическим. Полагаем $\sigma = \sigma(L^*)$ и $\mathbf{K} = \mathbf{K}(L^*, C)$, где $\sigma(X)$ и $\mathbf{K}(X, C)$ определены в разд. 4.

Согласно лемме 4.2 класс $\mathbf{K}$ состоит из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_{\downarrow u}$, где $u \in L^*$. Можно также проверить, что множество $\Sigma(L^*, C)$ бесконечных импликаций, определенное в разд. 4, эквивалентно следующему множеству импликаций Σ:

$$\forall x \ \bigwedge_{i\in I} p_{a_i}(x) \to p_a(x), \quad I \subseteq \omega \text{ бесконечно};$$

$\forall x\ p_{a_i}(x) \wedge p_b(x) \to p_a(x),\ 0 < i < \omega;\quad \forall x\ p_v(x) \to p_u(x),\ u \leq v$ в L^*; $\quad \forall x\ p_{a_0}(x)$.

Поэтому класс $\mathbf{K} = \mathbf{T}(\sigma) \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$ является предмногообразием. Более того, решетка $\mathrm{Sp}(L^*)$ вложима в $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ по предложению 5.7.

Однако решетки $\mathrm{Sp}(L^*)$ и $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ не изоморфны. Действительно, предположим противное: пусть существует изоморфизм

$$\xi : \mathrm{Sp}(L^*) \to \mathrm{Lq}(\mathbf{K}).$$

Для любого $i < \omega$ квазимногообразие $\mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_i}) = \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_i}) \cap \mathbf{K}$ состоит из изоморфных копий систем из множества $\{\mathscr{A}_{L^*}, \mathscr{A}_{\downarrow a_i}\}$ согласно лемме 4.1(ii),(iii). Поэтому $\mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_i})$ является атомом в решетке $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ для любого $i < \omega$. Поскольку ξ является изоморфизмом, для любого $i < \omega$ найдется $u_i \in L^*$ такой, что $\xi(\{u_i, 1\}) = \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_i})$. Так как по лемме 4.1(ii),(iii) для любых $i, j < \omega$ [$\mathbf{K}$-]квазиэквациональный класс $\mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_i}) \vee \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_j})$ состоит из изоморфных копий систем из множества $\{\mathscr{A}_{L^*}, \mathscr{A}_{\downarrow a_i}, \mathscr{A}_{\downarrow a_j}\}$, заключаем, что элементы u_i и u_j должны быть сравнимы в решетке L^*. Более того, поскольку $\mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_i}) \neq \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_j})$ для всех $i \neq j$, множество $\{u_i \mid i < \omega\}$ образует бесконечную цепь в L^*. Это означает, что существует бесконечное множество $J \subseteq \omega$ такое, что $\{a_j \mid j \in J\} \subseteq \{u_i \mid i < \omega\}$. Пусть $\xi(\{a_j, 1\}) = \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_{i(j)}})$ для любого $j \in J$.

Полагаем $\mathbf{B} = \bigvee\limits_{j\in J} \xi(\{a_j, 1\}) = \bigvee\limits_{j\in J} \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_{i(j)}})$ в $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. Тогда нетрудно проверить, что класс $\mathbf{B}$ состоит из изоморфных копий систем из множества $\{\mathscr{A}_{L^*}\} \cup \{\mathscr{A}_{\downarrow a_{i(j)}} \mid j \in J\}$ и определяется в $\mathbf{K}$ множеством квазитождеств

$$\forall x\ p_{a_i}(x) \to p_a(x),\ i \notin \{i(j) \mid i \in J\};\quad \forall x\ p_b(x) \to p_1(x).$$

Поэтому $\mathbf{B} \in \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$.

Поскольку $a \in \bigvee\limits_{j\in J} \{a_j, 1\}$ в решетке $\mathrm{Sp}(L^*)$, имеем

$$\xi(\{a, 1\}) \subseteq \xi\Big(\bigvee_{j\in J} \{a_j, 1\}\Big) = \bigvee_{j\in J} \xi(\{a_i, 1\}) = \mathbf{B}.$$

Так как $\{a, 1\}$ является атомом в $\mathrm{Sp}(L^*)$, класс $\xi(\{a, 1\})$ должен быть атомом в $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$. Поэтому должно найтись $j \in J$ такое, что $\xi(\{a, 1\}) = \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_{i(j)}}) \cap \mathbf{K} = \mathbf{Q}(\mathscr{A}_{\downarrow a_{i(j)}}) = \xi(\{a_j, 1\})$. В силу того, что ξ является изоморфизмом, последняя цепочка равенств влечет равенство $a = a_j$, что невозможно. Это противоречие показывает, что $\mathrm{Sp}(L^*) \ncong \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$.

Конечно, вложение φ из доказательства предложения 5.7 не является изоморфизмом в этом случае. Действительно, класс $\mathbf{B}$ не имеет прообраза относительно φ, так как множество $\{u \in L^* \mid \mathscr{A}_{\downarrow u} \in \mathbf{B}\} = \{1\} \cup \{a_{i(j)} \mid j \in J\}$ не принадлежит $\mathrm{Sp}(L^*)$.

Следующее предложение показывает, в частности, что решетка алгебраических подмножеств алгебраической решетки изоморфна некоторой решетке квазимногообразий. Часть этого предложения доказана в [19, теорема 2.3] с использованием топологических рассуждений. Здесь дадим короткое прямое доказательство этого результата.

Предложение 5.10. *Для любой полной алгебраической решетки L существуют сигнатура σ, состоящая лишь из одноместных предикатных символов, и квазимногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ такие, что $L^{\partial} \cong \mathrm{Lv}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Sp}(L) \cong \mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, $\mathrm{Sub}_c(L) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ и $\mathrm{Sub}(L) \cong \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.3 существует алгебраическое пространство замыкания $\langle X, C\rangle$ такое, что $L \cong \mathbb{L}(X, C)$; пусть $\psi : L \to \mathbb{L}(X, C)$ — соответствующий изоморфизм. Полагаем $\sigma = \sigma(X)$ и $\mathbf{K} = \mathbf{A}(X, C)$, где $\sigma(X)$ и $\mathbf{A}(X, C)$ определены в разд. 4. Тогда $\mathbf{K}$ является квазимногообразием. Из леммы 4.3 следует, что класс $\mathbf{K}$ состоит из изоморфных копий систем $\mathscr{A}_{\psi(a)}$, где $a \in L$.

Определим отображение $\varphi : \mathrm{Sub}_c(L) \to \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ по правилу

$$\varphi : B \mapsto \{\mathscr{A}_{\psi(b)} \in \mathbf{T}(\sigma) \mid b \in B\}, \quad B \in \mathrm{Sp}(L).$$

Тогда φ определено корректно и является решеточным изоморфизмом, т. е. $\mathrm{Sub}_c(L) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$. Более того, ограничение φ на $\mathrm{Sp}(L)$ определяет изоморфизм из $\mathrm{Sp}(L)$ на $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$.

Остальные утверждения следуют из предложения 5.3 и доказательства предложения 5.2. $\square$

Замечание 5.11. Известно, что решетки квазимногообразий вполне полудистрибутивны вверх и коалгебраические (см. [3, теорема 5.1.12, предложение 5.1.1]. В противоположность этому примеры 5.12 и 5.13 ниже показывают, что в общем случае решетки вида $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ и $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$, где $\mathbf{K}$ — предмногообразие, не являются ни полудистрибутивными вверх, ни даже непрерывными вниз.

Пример 5.12. Пусть L^* обозначает решетку, изображенную на рис. 1. Согласно предложению 5.1 $\mathrm{Sub}_c(L^*) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ для некоторого предмногообразия $\mathbf{K}$. Решетка $\mathrm{Sub}_c(L^*)$ не является непрерывной вниз. Действительно, пусть

$$A_i = \{a\} \cup \{a_j \mid i \le j < \omega\} \text{ для любого } i < \omega; \quad B = \{a, b\}.$$

Для любого $i < \omega$ имеем $A_i \vee B = \{a_0, a, b\} \cup \{a_j \mid i \le j < \omega\}$, поэтому

$$\bigcap_{i<\omega} (A_i \vee B) = \{a_0, a, b\}.$$

С другой стороны,

$$\Big(\bigcap_{i<\omega} A_i\Big) \vee B = \{a\} \vee \{a, b\} = \{a, b\}.$$

Похожие рассуждения показывают, что решетка $\mathrm{Sp}(L^*)$ также не является непрерывной вниз.

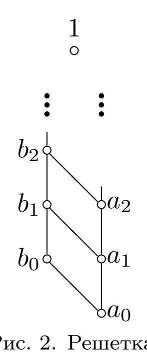

Рис. 2. Решетка M.

Пример 5.13 [7, пример 4.10]. Пусть M обозначает полную решетку, изображенную на рис. 2. Согласно предложению 5.1 $\mathrm{Sub}_c(M) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ для некоторого предмногообразия $\mathbf{K}$. Решетка $\mathrm{Sub}_c(M)$ не полудистрибутивна вверх. Действительно, пусть

$$B = \{1\} \cup \{b_i \mid i < \omega\}; \quad A_0 = \{1\} \cup \{a_{2i} \mid i < \omega\};$$
$$A_1 = \{1\} \cup \{a_{2i+1} \mid i < \omega\}.$$

Для любого $i < 2$ имеем $A_i \vee B = M$, но

$$(A_0 \cap A_1) \vee B = \{1\} \vee B = B \subset M.$$

Похожие рассуждения показывают, что решетки $\mathrm{Sp}(M)$ и $\mathrm{Sub}(M)$ также не полудистрибутивны вверх.

Из предложений 5.1, 5.2, 5.7 и примера 5.13 легко вытекает

Следствие 5.14. *Существует предмногообразие* $\mathbf{K}$ *такое, что ни* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$, *ни* $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$, *ни* $\mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ *не вложимы ни в какую решетку квазимногообразий.*

В связи с замечанием 5.11 возникают следующие вопросы.

Проблема 1. *Удовлетворяют ли решетки [финитарных] предмногообразий какому-нибудь нетривиальному решеточному свойству? Какие решетки изоморфны решеткам [финитарных] предмногообразий?*

Проблема 1 является аналогом проблемы, поставленной Г. Биркгофом [1] и А. И. Мальцевым [2] о том, какие решетки изоморфны решеткам [квази]многообразий. Хорошо известно (см. [20, теорема 2.84]), что конечные ограниченные решетки порождают многообразие всех решеток. Согласно [21] для любой конечной решетки L решетка $\mathrm{Sub}_c(L) = \mathrm{Sub}(L)$ конечная ограниченная снизу. Таким образом, решетки [финитарных] предмногообразий порождают многообразие всех решеток. Поэтому согласно предложению 5.1 решетки [финитарных] предмногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству.

6. Относительно аксиоматизируемые классы систем

В [6, теорема 8] доказано, что любая не более чем счетная полная решетка изоморфна решетке относительно аксиоматизируемых подклассов некоторого класса систем и поставил вопрос, верен ли этот результат для *произвольной* полной решетки [6, проблема 1]. Здесь дадим положительный ответ на этот вопрос (см. следствие 6.2 ниже). Подчеркнем, что положительный ответ на упомянутый вопрос, по существу, вытекает из результатов [7] (см. также [3] и предложение 5.1).

Отметим также, что следствие 6.2 может быть получено из предложений 5.5, 5.6 для сигнатуры, содержащей одноместный предикатный символ и символы констант, а также для сигнатуры, состоящей только из констант.

Определение 6.1 [6, определение 26]. Пусть $\mathbf{K}$ — некоторый класс алгебраических систем сигнатуры σ, и пусть Δ — некоторое множество предложений первого порядка той же сигнатуры. Класс $\mathbf{K}'$ *аксиоматизируем в* $\mathbf{K}$ *относительно* Δ, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathrm{Mod}(\Sigma)$ для некоторого подмножества $\Sigma \subseteq \Delta$.

Из определения 6.1 следует, что класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он аксиоматизируем в $\mathbf{K}(\sigma)$ относительно множества всех предложений первого порядка сигнатуры σ. Далее, для любого множества предложений Δ и любого класса $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ множество всех аксиоматизируемых подклассов в $\mathbf{K}$ относительно Δ образует полную решетку. Следуя [6], обозначаем эту решетку через $\mathbb{A}(\mathbf{K}, \Delta)$. Следствие, приведенное ниже, показывает, что любая полная решетка изоморфна решетке относительно аксиоматизируемых классов.

Следствие 6.2. *Для любой полной решетки* L *существуют сигнатура* σ, *предмногообразие* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *и множество* Δ *предложений первого порядка той же самой сигнатуры такие, что* $L \cong \mathbb{A}(\mathbf{K}, \Delta)$.

Доказательство. Нужно взять σ и $\mathbf{K}$, как в доказательстве предложения 5.1, и в качестве Δ рассмотреть множество всех тождеств сигнатуры σ. $\square$

Следствие 6.3. *Класс всех полных коалгебраических решеток совпадает с классом всех решеток вида* $\mathbb{A}(\mathbf{K}, \Delta)$, *где* $\mathbf{K}$ *— квазимногообразие, а* Δ *— множество всех предложений первого порядка.*

Доказательство вытекает из [3, предложение 5.1.1] и предложения 5.3.

Следствие 6.4. *Для любой конечной решетки L существуют конечная сигнатура σ и множество Δ предложений первого порядка сигнатуры σ такие, что $L \cong \mathbb{A}(\mathbf{K}(\sigma), \Delta)$.*

Доказательство. Нужно взять σ, как в доказательстве предложения 5.1. Если L конечна, то множество импликаций $\Sigma(X, C)$ является конечным множеством квазитождеств, которое эквивалентно одному предложению первого порядка; обозначим это предложение через ψ. Пусть Δ состоит из всех предложений первого порядка сигнатуры σ, которые являются конъюнкцией некоторого тождества и ψ. $\square$

Замечание 6.5. Следствие 6.4 доказано в [6, теорема 9], в то время как следствие 6.2 доказано в той же работе в предположении, что решетка L не более чем счетна (см. [6, теорема 8]). Это привело автора [6] к вопросу о том, верно ли, что любая полная решетка изоморфна решетке относительно аксиоматизируемых классов (см. [6, проблема 1]). Следствие 6.2 дает положительный ответ на этот вопрос. Подчеркнем, что этот положительный ответ вытекает, по существу, из результатов В. А. Горбунова. Отметим также, что теоремы 8, 9 из [6] доказаны для сигнатуры, состоящей из одного двуместного предикатного символа.

7. Характеризационные теоремы

Для алгебраической системы $\mathscr{A} \in \mathbf{K}(\sigma)$ и класса $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ пусть $\operatorname{Con}_{\mathbf{K}} \mathscr{A}$ обозначает множество конгруэнций θ на $\mathscr{A}$ таких, что $\mathscr{A}/\theta \in \mathbf{K}$. Если $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\sigma)$, то пишем $\operatorname{Con} \mathscr{A}$ вместо $\operatorname{Con}_{\mathbf{K}} \mathscr{A}$. Для $\theta, \theta' \in \operatorname{Con} \mathscr{A}$ пишем $\theta' \mathrm{E} \theta$, если система $\mathscr{A}/\theta'$ вложима в систему $\mathscr{A}/\theta$. Отношение E называется *отношением вложимости.* Очевидно, оно дистрибутивно.

Следующая теорема является аналогом для предмногообразий характеризационной теоремы, доказанной для квазимногообразий в [13, 17] (см. также [3, следствие 5.2.2]).

Теорема 7.1. *Пусть $\mathscr{A} \in \mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$.*
(i) *Если $\mathbf{A}$ — предмногообразие, то* $\operatorname{Lp}(\mathbf{H}(\mathscr{A}) \cap \mathbf{A}) \cong \operatorname{Sub}_c(\operatorname{Con}_{\mathbf{A}} \mathscr{A}, \mathrm{E})$.
(ii) *Если $\mathbf{A}$ — финитарное предмногообразие, то*

$$\operatorname{Lp}^{\omega}(\mathbf{H}(\mathscr{A}) \cap \mathbf{A}) \cong \operatorname{Sub}(\operatorname{Con}_{\mathbf{A}} \mathscr{A}, \mathrm{E}).$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение (i). Класс $\mathbf{K} = \mathbf{H}(\mathscr{A}) \cap \mathbf{A}$ гомоморфно замкнут в $\mathbf{A}$, поэтому $\mathbf{K}$ является предбиркгофовым классом по следствию 3.11(iii). Поскольку $\mathbf{A}$ содержит тривиальную σ-систему, частично упорядоченное множество $\operatorname{Con}_{\mathbf{A}} \mathscr{A}$ содержит наибольший элемент. Более того, если $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq \operatorname{Con}_{\mathbf{A}} \mathscr{A}$ и $\theta = \bigwedge_{i \in I} \theta_i$, то $\mathscr{A}/\theta$ является подпрямым произведением систем $\mathscr{A}/\theta_i$, $i \in I$, которые все принадлежат классу $\mathbf{A}$. Так как $\mathbf{A}$ замкнут относительно подпрямых произведений, заключаем, что $\mathscr{A}/\theta \in \mathbf{A}$. Поэтому $\theta \in \operatorname{Con}_{\mathbf{A}} \mathscr{A}$ и последнее множество замкнуто относительно произвольных пересечений. Таким образом, $\operatorname{Con}_{\mathbf{A}} \mathscr{A}$ образует полную решетку.

Определим отображение $\varphi : \operatorname{Sub}_c(\operatorname{Con}_{\mathbf{A}} \mathscr{A}, \mathrm{E}) \to \operatorname{Lp}(\mathbf{K})$ по правилу

$$\varphi : B \mapsto \{\mathscr{A}/\theta \mid \theta \in B\}.$$

Оно определено корректно: если $B \in \mathrm{Sub}_c(\mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\,\mathscr{A}, \mathrm{E})$ и $\mathscr{B} \in (\mathbf{S} \cap \mathbf{K})(\mathscr{A}/\theta)$ для некоторой конгруэнции $\theta \in B$, то $\mathscr{B} \in \mathbf{K} = \mathbf{H}(\mathscr{A}) \cap \mathbf{A}$. Поэтому существует конгруэнция $\theta' \in \mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\,\mathscr{A}$ такая, что система $\mathscr{A}/\theta' \cong \mathscr{B}$ вложима в систему $\mathscr{A}/\theta$. Это означает, что $\theta' \mathrm{E} \theta$, т. е. $\theta' \in B$. Поэтому класс $\varphi(B)$ замкнут относительно $\mathbf{S} \cap \mathbf{K}$.

Предположим, что $\mathscr{B} \in (\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K})(\mathscr{A}/\theta_i \mid i \in I)$ для некоторого множества $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq B$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathscr{B} \in \mathbf{K} = \mathbf{H}(\mathscr{A}) \cap \mathbf{A}$. Поэтому существует конгруэнция $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\,\mathscr{A}$ такая, что $\mathscr{A}/\theta \cong \mathscr{B}$. Это означает, что $\theta \mathrm{E} \bigwedge_{i \in I} \theta_i$, т. е. $\theta \in B$ и класс $\varphi(B)$ замкнут относительно $\mathbf{P}_s \cap \mathbf{K}$. Поскольку $\mathbf{K}$ является предбиркгофовым классом, $\varphi(B) \in \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ согласно теореме 3.8.

Определим также отображение $\psi : \mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Sub}_c(\mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\,\mathscr{A}, \mathrm{E})$ по правилу

$$\psi : \mathbf{K}' \mapsto \{\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{A}}\,\mathscr{A} \mid \mathscr{A}/\theta \in \mathbf{K}'\}.$$

Это отображение определено корректно. Действительно, поскольку $\mathbf{K}'$ является $\mathbf{K}$-предмногообразием, имеем $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{SP}(\mathbf{K}')$. Пусть $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq \psi(\mathbf{K}')$ и $\theta = \bigwedge_{i \in I} \theta_i$. Тогда $\mathscr{A}/\theta$ является подпрямым произведением систем $\mathscr{A}/\theta_i$, $i \in I$, которые принадлежат классу $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{A}$. Так как класс $\mathbf{A}$ замкнут относительно подпрямых произведений, заключаем, что $\mathscr{A}/\theta \in \mathbf{SP}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{A}$. Более того, $\mathscr{A}/\theta \in \mathbf{H}(\mathscr{A})$ влечет

$$\mathscr{A}/\theta \in \mathbf{SP}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{A} \cap \mathbf{H}(\mathscr{A}) = \mathbf{SP}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}',$$

т. е. $\theta \in \psi(\mathbf{K}')$, и последнее множество замкнуто относительно произвольных пересечений. Пусть $\theta \in \psi(\mathbf{K}')$ и $\theta' \mathrm{E} \theta$. Это означает, что система $\mathscr{A}/\theta'$ вложима в систему $\mathscr{A}/\theta \in \mathbf{K}' \subseteq \mathbf{A}$. Поскольку класс $\mathbf{A}$ замкнут относительно подсистем, $\mathscr{A}/\theta' \in \mathbf{SP}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{A}$. Более того, $\mathscr{A}/\theta' \in \mathbf{H}(\mathscr{A})$ влечет

$$\mathscr{A}/\theta' \in \mathbf{SP}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{A} \cap \mathbf{H}(\mathscr{A}) = \mathbf{SP}(\mathbf{K}') \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}',$$

т. е. $\theta' \in \psi(\mathbf{K}')$, и последнее множество замкнуто относительно E. Поэтому ψ определено корректно. Поскольку оба отображения φ и ψ сохраняют порядок и являются взаимно обратными, получаем требуемое заключение.

Для доказательства утверждения (ii) можно провести те же рассуждения, что и в доказательстве (i), с использованием оператора $\mathbf{P}^\omega$ вместо $\mathbf{P}$. $\square$

Для любого класса $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ и для любого кардинала κ пусть $\mathbf{K}_\kappa$ обозначает класс всех κ-порожденных систем из $\mathbf{K}$.

Следствие 7.2. *Для любого предмногообразия* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *и для любого кардинала* κ

$$\mathrm{Lp}(\mathbf{K}_\kappa) \cong \mathrm{Sub}_c(\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\,\mathscr{F}_{\mathbf{K}}(\kappa), \mathrm{E}).$$

Доказательство. Очевидно, $\mathbf{K}_\kappa = \mathbf{H}(\mathscr{F}_{\mathbf{K}}(\kappa)) \cap \mathbf{K}$. Требуемое заключение следует из теоремы 7.1. $\square$

8. Теорема редукции

В этом разделе при доказательстве теорем 8.1 и 8.2 предполагаем следующую версию аксиомы выбора для классов (см. (CAC 1) в [22, разд. II.2]).

Если $\mathbf{S}$ *— класс непустых множеств,*
то существует функция F *такая, что* $F(x) \in x$ *для любого* $x \in \mathbf{S}$.

Теорема 8.1. *Для любого предмногообразия* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *решетка* $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$ *изоморфна обратному пределу решеток вида* $\mathrm{Sub}_c(S,R)$, *где* S — *полная нижняя полурешетка с наибольшим элементом, а* R — *дистрибутивное отношение на* S.

Доказательство. Пусть I обозначает класс всех подмножеств $\mathbf{K}$, упорядоченный по включению, и пусть $\mathscr{A}_i = \prod\{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in i\}$ и $\mathbf{K}_i = \mathbf{H}(\mathscr{A}_i) \cap \mathbf{K}$ для всех $i \in I$. Поскольку класс $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, гомоморфно замкнут в $\mathbf{K}$, он является предбиркгофовым подклассом в $\mathbf{K}$ согласно следствию 3.11. Более того, поскольку $\mathbf{K}_i \subseteq \mathbf{K}_j$, отображение

$$\varphi_{ji} : \mathrm{Lp}(\mathbf{K}_j) \to \mathrm{Lp}(\mathbf{K}_i), \quad \varphi_{ji} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} \cap \mathbf{K}_i$$

является полным решеточным гомоморфизмом для любых $i \subseteq j$ в I по лемме 3.12. Кроме того, $\varphi_{kj}\varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ и φ_{ii} — тождественное отображение для любых $i \subseteq j \subseteq k$ в I. Поэтому тройка $\Lambda = \langle I, \mathbf{K}_i, \varphi_{ji} \rangle$ является обратным спектром. Покажем, что $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \cong \varprojlim \Lambda$.

Действительно, определим отображение $\varphi : \mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \to \varprojlim \Lambda$ по правилу

$$\varphi : \mathbf{X} \mapsto \langle \mathbf{X} \cap \mathbf{K}_i \mid i \in I \rangle.$$

Согласно лемме 3.12 отображение φ определено корректно. Пусть $\langle \mathbf{X}_i \mid i \in I \rangle \in \varprojlim \Lambda$. Это означает, что $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_j \cap \mathbf{K}_i \subseteq \mathbf{X}_j$ для всех $i \subseteq j$. Покажем, что класс $\mathbf{X} = \bigcup\{\mathbf{X}_i \mid i \in I\}$ является предмногообразием. Действительно, если $\mathscr{A} \in \mathbf{S}(\mathbf{X}_i)$ для некоторого $i \in I$, то для множества $j = i \cup \{\mathscr{A}\}$ имеем

$$\mathscr{A} \in \mathbf{S}(\mathbf{X}_i) \cap \mathbf{K}_j \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{X}_j) \cap \mathbf{K}_j \subseteq \mathbf{X}_j.$$

Если $\mathscr{A}_\xi \in \mathbf{S}(\mathbf{X}_{i_\xi})$ для некоторого множества индексов Ξ и некоторых $i_\xi \in I$, $\xi \in \Xi$, то $\mathscr{A}_\xi \in \mathbf{X}_{\bigcup\{i_\xi \mid \xi \in \Xi\}}$ для всех $\xi \in \Xi$, поэтому для множества $j = \bigcup\{i_\xi \mid \xi \in \Xi\} \cup \{\prod\limits_{\xi \in \Xi} \mathscr{A}_\xi\}$ имеем

$$\prod_{\xi \in \Xi} \mathscr{A}_\xi \in \mathbf{P}(\mathbf{X}_{\bigcup\{i_\xi \mid \xi \in \Xi\}}) \cap \mathbf{K}_j \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{X}_j) \cap \mathbf{K}_j \subseteq \mathbf{X}_j.$$

Таким образом, $\mathbf{SP}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$. Далее, для любого $i \in I$

$$\mathbf{X} \cap \mathbf{K}_i = \bigcup\{\mathbf{X}_j \cap \mathbf{K}_i \mid j \in I\} = \bigcup\{\mathbf{X}_j \cap \mathbf{K}_i \mid i \subseteq j\} = \mathbf{X}_i.$$

Поэтому $\varphi(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X} \cap \mathbf{K}_i \mid i \in I \rangle = \langle \mathbf{X}_i \mid i \in I \rangle$ и отображение φ сюръективно.

Более того, из леммы 3.12 следует, что φ является полным решеточным гомоморфизмом. Пусть $\mathscr{A} \in \mathbf{X} \backslash \mathbf{Y}$ для некоторых $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathrm{Lp}(\mathbf{K})$, и пусть $i = \{\mathscr{A}\}$. Тогда $\mathscr{A} \in \varphi(\mathbf{X})(i) \setminus \varphi(\mathbf{Y})(i)$, т. е. $\varphi(\mathbf{X}) \nleq \varphi(\mathbf{Y})$. Это означает, что отображение φ взаимно однозначно, поэтому является изоморфизмом.

Наконец, для любого $i \in I$ имеем $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}_i) = \mathrm{Lp}(\mathbf{H}(\mathscr{A}_i) \cap \mathbf{K}) \cong \mathrm{Sub}_c(\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\, \mathscr{A}_i, \mathrm{E})$ согласно теореме 7.1(i), откуда вытекает утверждение теоремы. $\square$

Следующее утверждение является аналогом теоремы 8.1 для финитарных предмногообразий.

Теорема 8.2. *Для любого финитарного предмногообразия* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *решетка* $\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K})$ *изоморфна обратному пределу решеток вида* $\mathrm{Sub}(S,R)$, *где* S — *нижняя полурешетка с наибольшим элементом, а* R — *дистрибутивное отношение на* S.

Доказательство. Пусть I обозначает класс всех конечных подмножеств в $\mathbf{K}$, упорядоченный по включению, пусть $\mathscr{A}_i = \prod\{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in i\}$ и $\mathbf{K}_i = \mathbf{H}(\mathscr{A}_i) \cap \mathbf{K}$

для всех $i \in I$. Так как класс $\mathbf{K}_i$ гомоморфно замкнут в $\mathbf{K}$ для любого $i \in I$, он является финитарным предбиркгофовым подклассом в $\mathbf{K}$ согласно следствию 3.11. Так же, как и в следствии 3.11, устанавливается, что отображение

$$\varphi_{ji} : \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K}_j) \to \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K}_i), \quad \varphi_{ji} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{X} \cap \mathbf{K}_i$$

является полным решеточным гомоморфизмом для любых $i \subseteq j$ в I, тройка $\Lambda = \langle I, \mathbf{K}_i, \varphi_{ji} \rangle$ является обратным пределом и $\mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K}) \cong \varprojlim \Lambda$. $\square$

В качестве следствия получаем следующий результат. Отметим, что всюду далее достаточно предполагать обычную аксиому выбора для множеств.

Следствие 8.3. *Для любого псевдоквазимногообразия* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ *решетка* $\mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ *изоморфна обратному пределу решеток вида* $\mathrm{Sub}(S, R)$*, где* S *— нижняя полурешетка с наибольшим элементом, а* R *— дистрибутивное отношение на* S.

Доказательство следующей леммы несложно (см. [23, следствие 3.9] или [3, предложение 2.5.12]), а также [14, теорема 1.2] (только лишь для систем, сигнатура которых не содержит предикатных символов).

Лемма 8.4. *Пусть* σ *содержит конечное число предикатных символов. Для любого псевдоквазимногообразия* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ *имеет место равенство* $\mathbf{K} = \mathbf{SP}(\mathbf{K})_{fin}$.

Следствие 8.5 [3, теорема 5.5.16; 8, теорема 8.1]. *Пусть* σ *содержит конечное число предикатных символов и* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ *является псевдоквазимногообразием. Тогда решетка* $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ *изоморфна обратному пределу конечных ограниченных снизу решеток.*

Доказательство. Если σ содержит лишь конечное число предикатных символов, то полурешетка $\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\, \mathscr{A}_i$ из доказательства теоремы 8.2 является конечной решеткой, поскольку система $\mathscr{A}_i$ конечна для любого $i \in I$. Так как отношение вложимости E является дистрибутивным квазипорядком, решетка $\mathrm{Sub}(\mathrm{Con}_{\mathbf{K}}\, \mathscr{A}_i, \mathrm{E})$ конечная ограниченная снизу согласно [24, теорема 4.2]. Требуемое заключение следует из теоремы 8.2 и замечания 3.4. $\square$

Нетрудно проверить (см. [3, лемма 5.5.17, следствие 5.5.18]), что если $\mathbf{K}$ является локально конечным квазимногообразием, то отображение

$$\varphi : \mathrm{Lq}(\mathbf{K}) \to \mathrm{Lp}(\mathbf{K}_{fin}); \quad \varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}_{fin}$$

определяет изоморфизм. Поэтому из следствия 8.5 (см. также [8, следствие 7.3]) получаем результат, который был установлен В. А. Горбуновым.

Следствие 8.6 [3, следствие 5.5.4]. *Если сигнатура* σ *содержит конечное число предикатных символов, а* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ *— локально конечное квазимногообразие, то решетка* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *изоморфна обратному пределу конечных ограниченных снизу решеток.*

Для псевдоквазимногообразия $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ пусть I обозначает множество всех конечных подмножеств в $\mathbf{K}$, пусть $\mathbf{K}_i = \mathbf{H}\bigl(\prod\{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in i\}\bigr) \cap \mathbf{K}$ для всех $i \in I$ и $\mathbf{L}_q = \{\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}_i)) \mid i \in I\}$. Следующее утверждение обобщает результат [3, следствие 5.5.22].

Следствие 8.7. *Пусть σ содержит конечное число предикатных символов и $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ — псевдоквазимногообразие. Тогда* $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \in \mathbf{SP}_u\mathbf{H}(\mathbf{L}_q) \cap \mathbf{SP}_u(\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K})))$. *В частности, любое универсальное предложение, истинное в* $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}))$, *также истинно в* $\mathrm{Lp}(\mathbf{K})$.

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 8.2, а также замечанию 3.4 имеем $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \cong \varinjlim\{I, \mathrm{Lp}(\mathbf{K}_i), \varphi_{ij}\}$, где $\mathbf{K}_i = \mathbf{H}(\mathscr{A}_i) \cap \mathbf{K}$. Если σ содержит лишь конечное число предикатных символов, то класс $\mathbf{K}_i$ содержит конечное число неизоморфных систем для любого $i \in I$. Поэтому $\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}_i)) \cong \mathrm{Lp}(\mathbf{P}_i)$ согласно [3, лемма 5.5.17], где $\mathbf{P}_i$ обозначает псевдоквазимногообразие, порожденное $\mathbf{K}_i$. Класс $\mathbf{P}_i$, очевидно, гомоморфно замкнут в себе. Более того, класс $\mathbf{K}_i = \mathbf{H}(\mathscr{A}_i) \cap \mathbf{K}$ также гомоморфно замкнут в $\mathbf{P}_i$. Поэтому оба этих класса являются финитарными предбиркгофовыми подклассами в $\mathbf{P}_i$ согласно следствию 3.11(iii). Таким образом, $\mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K}_i) \in \mathbf{H}(\mathrm{Lp}(\mathbf{P}_i)) = \mathbf{H}(\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K}_i)))$ по лемме 3.12(ii). Согласно [3, теорема 1.2.9] $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \in \mathbf{SP}_u\mathbf{H}(\mathbf{L}_q)$.

Далее, из [3, леммы 5.5.20, 5.5.21] следует, что $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \cong \varinjlim \mathrm{Lp}(\mathbf{V}_i)$, где $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}(\mathscr{A}_i) \cap \mathbf{K}$ для всех $i \in I$. Поскольку $\mathrm{Lp}(\mathbf{V}_i) \cong \mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{V}_i))$ согласно [3, лемма 5.5.17], из [3, теорема 1.2.9] заключаем, что $\mathrm{Lp}(\mathbf{K}) \in \mathbf{SP}_u(\mathrm{Lq}(\mathbf{Q}(\mathbf{K})))$. $\square$

Следующая теорема показывает, что похожий результат имеет место и для решеток псевдомногообразий. Этот результат был установлен в [5] для псевдомногообразий алгебр, однако его доказательство остается верным и для систем, сигнатура которых содержит конечное число предикатных символов.

Теорема 8.8 [5, теорема 2.1]. *Пусть σ содержит конечное число предикатных символов, и пусть $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)_{fin}$ — псевдомногообразие. Тогда решетка* $\mathrm{Lpv}(\mathbf{K})$ *псевдомногообразий, содержащихся в* $\mathbf{K}$, *принадлежит классу*

$$\mathbf{HSP}_u(\mathrm{Lv}(\mathbf{V}(\mathscr{A})) \mid \mathscr{A} \in \mathbf{K}).$$

В частности, любое позитивное универсальное предложение, истинное в $\mathrm{Lv}(\mathbf{V}(\mathbf{K}))$, *также истинно в* $\mathrm{Lpv}(\mathbf{K})$.

9. Некоторые свойства невычислимости для решеток относительных подклассов

В [9] доказана следующая

Теорема 9.1 [9, теорема 1]. *Пусть сигнатура σ содержит по крайней мере одну операцию, не являющуюся константой. Тогда существует квазимногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$ такое, что множество [типов изоморфизма] конечных подрешеток решетки квазимногообразий* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ *вычислимо перечислимо, но не вычислимо.*

При доказательстве этого результата использовано одно вспомогательное утверждение (см. [9, лемма 3]). Следующее утверждение является небольшой его модификацией.

Лемма 9.2. *Пусть $\mathbf{L}$ — бесконечное вычислимое множество попарно друг в друга не вложимых подпрямо неразложимых конечных решеток, каждая из которых содержит по крайней мере три элемента. Пусть K — решетка и множество $\mathbf{L}_0 \subseteq \mathbf{L} \cap \mathbf{S}(K)$ таково, что $K \leq_s \prod\{L \mid L \in \mathbf{L}_0\} \times \mathbf{2}$.*

(i) *Если множество $\mathbf{L}_0$ вычислимо перечислимо, но не вычислимо, то множество всех конечных подрешеток в K вычислимо перечислимо, но не вычислимо.*

(ii) *Если множество* $\mathbf{L}_0$ *не вычислимо перечислимо, то множество всех конечных подрешеток в* K *не является вычислимо перечислимым.*

В следующей теореме, используя лемму 9.2, покажем, что существуют квазимногообразия одноэлементных предикатных систем такие, что множество типов изоморфизма конечных подрешеток их решеток [квази]многообразий, а также их решеток [финитарных] предмногообразий не является вычислимым. Это означает, что не существует алгоритма, который по заданной конечной решетке определял бы, вложима эта решетка в такую решетку [квази]многообразий или [финитарных] предмногообразий или нет. Поэтому проблема нахождения полной структурной характеризации решеток, изоморфных решеткам [квази]многообразий, выглядит безнадежной (см. упомянутую выше проблему Биркгофа [1] и Мальцева [2]).

Теорема 9.3. *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Существуют счетная сигнатура* τ, *содержащая лишь одноместные предикатные символы, и квазимногообразие* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\tau)$ *такие, что множество всех типов изоморфизма конечных подрешеток решетки относительных многообразий* $\mathrm{Lv}(\mathbf{K})$ *вычислимо перечислимо, но не вычислимо* [*не вычислимо перечислимо соответственно*].

(ii) *Существуют счетная сигнатура* σ, *содержащая лишь одноместные предикатные символы, и квазимногообразие* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ *такие, что* $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lp}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lp}^{\omega}(\mathbf{K})$ *и множество всех типов изоморфизма конечных подрешеток этой решетки вычислимо перечислимо, но не вычислимо* [*не вычислимо перечислимо соответственно*].

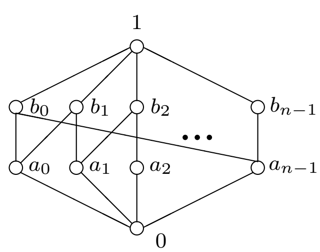

Рис. 3. Решетка L_n.

Доказательство Будем использовать идеи из [9]. Для любого $n > 2$ пусть L_n обозначает решетку, изображенную на рис. 3, пусть $\mathbf{2}$ обозначает двухэлементную решетку и $S_n = L_n \backslash \{1\}$ — нижняя полурешетка, полученная из L_n вычеркиванием наибольшего элемента. Тогда для любого $n > 2$ решетка $\mathrm{Sub}(L_n)$ подпрямо неразложима согласно [9, лемма 17]. Более того, $\mathrm{Sub}(L_m)$ вложима в $\mathrm{Sub}(L_n)$ тогда и только тогда, когда $m = n$ согласно [9, лемма 18]. По лемме 9.2 для любого вычислимо перечислимого, но не вычислимого множества $X \subseteq \{n \in \omega \mid n > 2\}$ если $L \leq_s \prod\{\mathrm{Sub}(L_n) \mid n \in X\} \times \mathbf{2}$ и $\{\mathrm{Sub}(L_n) \mid n \in X\} \subseteq \mathbf{S}(L)$, то множество всех типов изоморфизма конечных подрешеток решетки L вычислимо перечислимо, но не вычислимо. Кроме того, если X не вычислимо перечислимо, то и множество всех типов изоморфизма конечных подрешеток решетки L не вычислимо перечислимо.

Итак, зафиксируем множество $X \subseteq \{n \in \omega \mid n > 2\}$, которое является вычислимо перечислимым, но не вычислимым.

(i) Решетка $K = \prod\{\mathrm{Sub}(L_n) \mid n \in X\} \times \mathbf{2}$ является алгебраической, поэтому согласно предложению 5.3 существуют сигнатура τ, содержащая лишь одноместные предикатные символы, и квазимногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\tau)$ такие, что $\mathrm{Lv}(\mathbf{K}) \cong K^{\partial}$. Поэтому множество всех типов изоморфизма конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lv}(\mathbf{K})$ вычислимо перечислимо, но не вычислимо по лемме 9.2.

(ii) Без ограничения общности можем предполагать, что $S_m \cap S_n = \varnothing$ при $m > n > 2$. Полагаем $L = \bigcup\{S_n \mid n \in X\} \cup \{\perp, \top\}$ и считаем, что $x \leq y$ в L тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

$$x, y \in S_n \text{ для некоторого } n > 2 \text{ и } x \leq y \text{ в } S_n; \quad x = \perp; \quad y = \top.$$

Тогда L является бесконечной решеткой высоты 5. В частности, L является алгебраической решеткой и $\mathrm{Sp}(L) = \mathrm{Sub}_c(L) = \mathrm{Sub}(L)$. Очевидно, что $\{\mathrm{Sub}(L_n) \mid n \in X\} \subseteq \mathbf{S}(\mathrm{Sub}(L))$. Более того, отображение $\varphi : \mathrm{Sub}(L) \to \prod\{\mathrm{Sub}(L_n) \mid n \in X\} \times \mathbf{2}$, определенное по правилу

$$\varphi(A) = \begin{cases} \langle (A \cap S_n) \cup \{1\} \mid n \in X\rangle^\frown\langle 0\rangle, & \text{если } \bot \notin A, \\ \langle (A \cap S_n) \cup \{1\} \mid n \in X\rangle^\frown\langle 1\rangle, & \text{если } \bot \in A, \end{cases}$$

является подпрямым вложением. Далее, согласно предложениям 5.2 и 5.10 существуют счетная сигнатура σ, содержащая лишь одноместные предикатные символы, и квазимногообразие $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{T}(\sigma)$ такие, что $\mathrm{Lq}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lp}(\mathbf{K}) = \mathrm{Lp}^\omega(\mathbf{K}) \cong \mathrm{Sub}(L)$. Таким образом, множество всех типов изоморфизма конечных подрешеток решетки $\mathrm{Lq}(\mathbf{K})$ вычислимо перечислимо, но не вычислимо по лемме 9.2.

Выбирая X не вычислимо перечислимым, докажем все оставшиеся утверждения теоремы. $\square$

Благодарности

Настоящая работа была начата во время визита первого автора в Варшавскую Политехнику в июне 2010 г. в рамках совместного проекта Польской и Российской Академий наук. Работа была продолжена во время визита второго автора в Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН в Новосибирске в июле 2010 г., который был поддержан Европейским Союзом в рамках Европейского Общественного Фонда (программа развития Варшавской Политехники), а также во время визита в октябре 2011 г., поддержанного фондом «Династия». Работа была завершена во время визита первого автора в Варшаву в 2011–12 учебном году, который был поддержан Фондом Йозефа Мяновского и Фондом Польской Науки. Авторы выражают глубокую благодарность перечисленным фондам за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.* Universal algebra // Proc. First Canadian mathematical congress (Montreal, 1945). Toronto: Univ. Toronto Press, 1946. P. 310–326.

2. *Мальцев А. И.* О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Междунар. конгр. математиков (Москва, 1966). М.: Мир, 1968. С. 217–231.

3. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. книга, 1999.

4. *Adams M., Adaricheva K., Dziobiak W., Kravchenko A.* Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev // Studia Logica. 2004. V. 78, N 1–2. P. 357–378.

5. *Agliano P., Nation J. B.* Lattices of pseudovarieties // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). 1989. V. 46, N 2. P. 177–183.

6. *Pal'chunov D. E.* Lattices of relatively axiomatizable classes // Lect. Notes Artificial Intelligence. 2007. V. 4390. P. 221–239.

7. *Горбунов В. А.* Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. II // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 4. С. 369–397.

8. *Горбунов В. А.* Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. III // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 6. С. 646–666.

9. *Nurakunov A. M.* Quasivariety lattices having no reasonable description // Int. J. Algebra Comput. 2012. V. 22, N 3. P. 1–17.

10. *Burris S., Sankappanavar H. P.* A course in universal algebra. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1981.

11. *McKenzie R. N., McNulty G. F., Taylor W. F.* Algebras, lattices, varieties. I. Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/Cole, 1987.

12. *Смирнов Д. М.* Многообразия алгебр. Новосибирск: Наука, 1992.
13. *Горбунов В. А., Туманов В. И.* Строение решеток квазимногообразий // Тр Ин-та математики СО АН СССР. 1982. Т. 2. С. 12–44.
14. *Vernitski A.* Finite quasivarieties and self-referential conditions // Stud. Log. 2004. V. 78, N 1–2. P. 337–348.
15. *Vernitski A.* On using the join operation to define classes of algebras // Comm. Algebra. 2008. V. 36, N 3. P. 1088–1096.
16. *Banaschewski B., Herrlich H.* Subcategories defined by implications // Houston J. Math. 1976. V. 2. P. 149–171.
17. *Горбунов В. А., Туманов В. И.* О строении решеток квазимногообразий // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 272–275.
18. *Nurakunov A. M., Semenova M. V., Zamojska-Dzienio A.* On lattices connected with various types of classes of algebraic structures // available at http://www.mini.pw.edu.pl/~azamojsk/publications.html.
19. *Горбунов В. А., Туманов В. И.* Об одном классе решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 59–80.
20. *Freese R., Ježek J., Nation J. B.* Free lattices. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Math. Surv. Monogr.; V. 42).
21. *Repnitskiĭ V. B.* On finite lattices which are embeddable into subsemigroup lattices // Semigroup Forum. 1993. V. 46, N 3. P. 388–397.
22. *Rubin H., Rubin J. E.* Equivalents of the axiom of choice. II. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1985. (Stud. Logic Found. Math.; V. 116).
23. *Горбунов В. А.* Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. I // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 2. С. 142–168.
24. *Семенова М. В.* О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. I. Полурешетки // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 215–230.

Статья поступила 2 апреля 2011 г.

Семенова Марина Владимировна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`udav17@gmail.com; semenova@math.nsc.ru`

Замойска-Дженио Анна
Факультет математики и информационных наук,
Варшавская Политехника, Площадь Политехники, 1,
00-661 Варшава, Польша
`A.Zamojska@elka.pw.edu.pl`