Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.541

О ПРОЕКТИВНО РАЗРЕШИМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

А. Р. Чехлов

Аннотация. Описаны проективно разрешимые абелевы группы ступени $\leqslant 2$ в классах нередуцированных периодических расщепляющихся копериодических групп, а также сепарабельных и векторных групп без кручения.

Ключевые слова: проективно разрешимый модуль, проективный коммутант, проективный центр, проективно центральный ряд, сопряженная проекция.

Все модули в статье предполагаются унитарными, кольца — ассоциативными, группы — абелевыми (т. е. модулями над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$). Напомним, что если R — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b. Если $a_1, \dots, a_n \in R$, то $[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$; $Z(R)$ — центр кольца R; $\operatorname{Id} R = \{\pi \in R \mid \pi^2 = \pi\}$.

Через M будем обозначать некоторый модуль; $E(M)$ — кольцо его эндоморфизмов; $\operatorname{Aut} M$ — группа его автоморфизмов; $Pr(M) = \operatorname{Id}(E(M))$ и $\langle H \rangle$ — подмодуль, порожденный подмножеством $H \subseteq M$. Запись $H \leqslant M$ означает, что H — подмодуль в M, запись $H \leqslant fiM$ — что H — вполне инвариантный подмодуль в M, т. е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(M)$. Если $f : A \to B$ — гомоморфизм, то $f|H$ — ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G — модули и $\varnothing \neq X \subseteq B$, то через $\operatorname{Hom}(B, G)X$ обозначим подмодуль в G, порожденный всеми подмножествами fX, где $f \in \operatorname{Hom}(B, G)$. Через 1_M обозначим тождественный автоморфизм модуля M (индекс M иногда опускается). Если $H \leqslant M$ и $\pi H \subseteq H$ для всех $\pi \in Pr(M)$, то подмодуль H называется *проективно инвариантным* (кратко, *pi-подмодулем*) и обозначается через $H \leqslant piM$. В [1–3] автор изучал проективно инвариантные подгруппы. Если $[\xi, \eta]H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in E(M)$, то подмодуль H называется *коммутаторно инвариантным* (*ci-подмодулем*); *ci*-подгруппы исследовались в [4–8]. Напомним, что кольцо называется *нормальным* [9], если все его идемпотенты центральны.

Пусть A — абелева группа. Тогда $A^1 = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} nA$; $r(A)$ — ее ранг; A_p — p-компонента, а $T(A)$ — периодическая часть. Если A — однородная группа без кручения, то $t(A)$ — ее тип.

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, P — множество всех простых чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел, Z_{p^∞} — квазициклическая p-группа, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — группа целых p-адических чисел и Z_n — циклическая группа порядка n.

§ 1. Определения и некоторые свойства

Подмодуль $H \leqslant M$ назовем *коммутаторно-проективно инвариантным* (кратко, *cpi-подмодулем*, обозначение $H \leqslant cpiM$), если $[\xi, \eta]H \subseteq H$ для любых $\xi, \eta \in Pr(M)$.

Проективным центром (кратко, *P-центром*) модуля M назовем его подмодуль $PZ(M) = \{a \in M \mid [\xi,\eta]a = 0$ для всех $\xi,\eta \in Pr(M)\}$.

Подмодуль $P(M) = \langle [\varphi,\psi]M \mid \varphi,\psi \in Pr(M)\rangle$ назовем *проективным коммутантом* (кратко, *P-коммутантом*) модуля M. Определим по индукции $P_0(M) = M$, $P_1(M) = P(M),\dots,P_{n+1}(M) = \langle [\varphi,\psi]P_n(M) \mid \varphi,\psi \in Pr(M)\rangle$ и $P_\alpha(M) = \bigcap\limits_{\sigma<\alpha} P_\sigma(M)$ при предельном ординале α. В [10] показано, что кольцо $E(M)$ нормально в точности когда $P(M) = 0$.

Модуль M назовем *P-разрешимым*, если $P_n(M) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее такое n назовем *ступенью* (или *классом*) P-разрешимости модуля M. Прямые слагаемые P-разрешимых модулей P-разрешимы.

Если $H \leqslant cpiM$, то положим $PZ(M/H) = \{\bar a \in M/H \mid [\pi,\theta]\bar a = 0$ для всех $\pi,\theta \in Pr(M)\}$. Полагаем $PZ_0(M) = 0$,

$$PZ_1(M) = PZ(M),\dots,PZ_{n+1}(M)/PZ_n(M) = PZ(M/PZ_n(M))$$

и $PZ_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\rho<\alpha} PZ_\rho(M)$ при предельном ординале α.

Если $H \subseteq M$, то подмодуль $\langle [\varphi,\psi]H \mid \varphi,\psi \in Pr(M)\rangle$ назовем *P-коммутантом* подмножества H в M и обозначим через $P[H,M]$, а $PN(H) = \{x \in M \mid [\varphi,\psi]x \in H$ для всех $\varphi,\psi \in Pr(M)\}$ назовем *P-нормализатором* H в M. Обозначим $P[H,M]_1 = H + P[H,M]$ и $P[H,M]_{n+1} = P[H,M]_n + P[P[H,M]_n,M]$ при $n \geqslant 1$. Тогда $\overline{H} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [H,M]_n$ — наименьший cpi-подмодуль, содержащий H.

Ряд $M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \dots \subseteq M_{i+n} \subseteq \dots$ подмодулей M_i модуля M назовем *P-центральным*, если $M_i \leqslant cpiM$ и $M_{i+1}/M_i \subseteq PZ(M/M_i)$ (эквивалентно $M_{i+1} \subseteq PN(M_i)$) для всех i.

Если $PZ_\alpha = PZ_\alpha(M)$, то ряд $0 \subseteq PZ_1 \subseteq \dots \subseteq PZ_\alpha \subseteq \dots$ назовем *верхним P-центральным* рядом модуля M, а cpi-подмодули PZ_α — его *P-гиперцентрами*.

Приведем следующие свойства проекций. Некоторые другие свойства приведены в [1–3, 10, 11].

1. *Пусть R — кольцо, $\xi,\theta \in \operatorname{Id} R$ и $\pi = 1-\theta$. Тогда если $\pi\xi\theta = 0$, то $\xi\pi,\pi\xi \in \operatorname{Id} R$.*

Доказательство. Из $\pi\xi\theta = (1-\theta)\xi\theta = \pi\xi(1-\pi) = 0$ имеем $\xi\theta = \theta\xi\theta$, $\pi\xi = \pi\xi\pi$. Отсюда следует справедливость данного свойства.

2. *Пусть $\theta \in Pr(M)$ и $\pi = 1-\theta$. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(а) $G = \theta M \leqslant fiM$;
(б) $\xi\theta = \theta\xi$ *для любого* $\xi \in Pr(M)$ *со свойством* $\ker\theta \subseteq \ker\xi$;
(в) $\pi\xi\theta = 0$ *для любого* $\xi \in Pr(M)$;
(г) $\pi\xi \in Pr(M)$ *для любого* $\xi \in Pr(M)$.

Доказательство. Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) очевидна. Пусть выполнено (б). Если $\varphi \in E(M)$, то $\xi = \theta + \pi\varphi\theta \in Pr(M)$ и $\ker\theta \subseteq \ker\xi$. Из условия $\xi = \xi\theta = \theta\xi = \theta$ следует равенство $\pi\varphi\theta = 0$, что в силу произвольности φ влечет (а) и (в). Импликация (в) $\Rightarrow$ (г) вытекает из свойства 1. Пусть выполнено (г) и $f \in \operatorname{Hom}(G,B)$, где $B = \pi M$. Тогда $\xi = \theta + \pi f\theta \in Pr(M)$, $\pi\xi = \pi f\theta$ и $(\pi\xi)^2 = 0$. Поэтому условие $(\pi\xi)^2 = \pi\xi$ влечет равенство $\pi f\theta = 0$, которое равносильно равенству $\operatorname{Hom}(G,B) = 0$. Следовательно, (г) $\Rightarrow$ (а).

В свойстве 2 условие $\xi \in Pr(M)$ можно заменить на $\xi \in E(M)$.

3. *Если* $a, b \in \mathrm{Id}\, R$, *то* $[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n}] = \begin{cases} [a, b] & \text{при } n = 2k+1, \\ ab + ba - 2bab & \text{при } n = 2k. \end{cases}$

Из свойства 3 следует, что если в кольце R для любых $a, b \in \mathrm{Id}\, R$ найдется $n \in \mathbb{N}$ со свойством $[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n}] = 0$, то R является нормальным кольцом.

В [12, § 106, свойство (ж)] показано, что $eM \cong e'M$ для $e, e' \in Pr(M)$ тогда и только тогда, когда найдутся $\alpha, \beta \in E(M)$ со свойством $\alpha\beta = e$ и $\beta\alpha = e'$. Следующее свойство известно, но встречается реже.

4. *Для проекций* f, e *модуля* M *эквивалентны следующие условия*:
(а) *существует такой* $u \in \mathrm{Aut}\, M$, *что* $f = u^{-1}eu$;
(б) $eM \cong fM$ *и* $(1-e)M \cong (1-f)M$.

Доказательство. (а)⇒(б) Так как f — проекция, а u — автоморфизм, то $(1-f)M = \ker f = u^{-1}(\ker e) = u^{-1}(1-e)M \cong (1-e)M$ и $fM = u^{-1}(eM) \cong eM$.

(б)⇒(а) Воспользуемся доказательством утверждения 5.17 из [9]. Если $v : fM \to eM$, $w : (1-f)M \to (1-e)M$ — изоморфизмы, то пусть u — автоморфизм такой, что $u(x+y) = v(x) + w(y)$, где $x \in fM$, $y \in (1-f)M$. Тогда $u^{-1}(v(x) + w(y)) = x + y$ для всех $v(x) \in eM$, $w(y) \in (1-e)M$. Поэтому $u^{-1}(e(u(x+y))) = u^{-1}(e(v(x))) = u^{-1}(v(x)) = x$ и, значит, $u^{-1}eu = f$.

5. *Если* A *— прямое слагаемое модуля* M *с проекцией* e *и* $B = (1-e)M$, *то*

(а) $H = \bigcap\limits_{u \in \mathrm{Aut}\, M} \mathrm{im}(u^{-1}eu)$ *есть наибольший вполне инвариантный подмодуль модуля* M, *не пересекающийся с* B;

(б) $N = \sum\limits_{u \in \mathrm{Aut}\, M} \mathrm{im}(u^{-1}eu)$ *есть наименьший вполне инвариантный подмодуль модуля* M, *содержащий* A.

Доказательство. (а) Пусть $u \in \mathrm{Aut}\, M$, $\pi = u^{-1}eu$ и $\theta = 1 - \pi$. Тогда если $\varphi \in E(M)$ и $\psi = \theta\varphi\pi$, то $v = 1 + \psi \in \mathrm{Aut}\, M$ и $v^{-1} = 1 - \psi$. Если теперь $x \in H$, то $(v^{-1}ev)x = x$, с другой стороны, $(v^{-1}ev)x = v^{-1}e(1+\psi)x = v^{-1}e(x + \psi x) = v^{-1}x = (1-\psi)x = x - \psi x$, откуда $\psi x = 0$. Это показывает, что $\varphi x \in \pi M$. Так как π — произвольная проекция, сопряженная с e, то $\varphi x \in H$, т. е. $H \leqslant fiM$. Пусть теперь $M = V \oplus W$, где $V = (u^{-1}eu)M$ для некоторого $u \in \mathrm{Aut}\, M$. Если $X \leqslant fiM$, то $X = (X \cap V) \oplus (X \cap W)$. Согласно свойству 4 $V \cong A$, а $W \cong B$. Поэтому условие $X \cap W \neq 0$ влечет существование такого $\alpha \in E(M)$, что $0 \neq \alpha X \subseteq B$. Противоречие с условием $X \cap B = 0$. Следовательно, $X \subseteq V$, и, значит, $X \subseteq H$.

(б) Достаточно показать, что $N = A \oplus \mathrm{Hom}(A, B)A$. Действительно, если $a \in A$, $\varphi \in E(M)$ и $\psi = (1-e)\varphi e$, то $u = 1 + \psi \in \mathrm{Aut}\, M$, $u^{-1} = 1 - \psi$ и $(u^{-1}eu)a = a - (1-e)\varphi a$, где $(1-e)\varphi e a \in \mathrm{Hom}(A, B)A$. Так как $A \subseteq N$, в силу произвольности φ получаем, что $A \oplus \mathrm{Hom}(A, B)A \subseteq N$. Далее, $\mathrm{im}(u^{-1}eu) = \mathrm{im}(u^{-1}e) = u^{-1}\,\mathrm{im}(e) = u^{-1}A \subseteq A + (1-e)u^{-1}A \subseteq A \oplus \mathrm{Hom}(A, B)A$, т. е. $N \subseteq A \oplus \mathrm{Hom}(A, B)A$.

Отметим, что если $A = B \oplus G$, то в [12, теорема 9.6] доказано, что наибольшая вполне инвариантная подгруппа группы A, не пересекающаяся с G, совпадает с пересечением всех дополнительных прямых слагаемых к прямому слагаемому G. Другие подобные свойства установлены в [1, теорема 12; 5, теорема 7].

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 1.1. *Для модуля M равносильны условия:*

1) *M — P-разрешимый модуль ступени $\leqslant n$;*

2) *$[\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\dots[\alpha_1,\alpha_2]=0$ для любых $\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}\in Pr(M)$;*

3) *$P_{n-1}(M)\subseteq PZ(M)$.*

Положим по индукции $PL_1(M)=M$, $PL_{\sigma+1}(M)=P[PL_\sigma(M),M]$ и $PL_\alpha=\bigcap\limits_{\rho<\alpha}PL_\rho(M)$, если α — предельный ординал. Отметим, что $PL_{n+1}(M)=P_n(M)$ для $n\in\mathbb{N}$ и $PL_\alpha(M)\leqslant cpiM$ для каждого α.

Заметим, что

$$PL_{n+1}(M)=\langle[\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\dots[\alpha_1,\alpha_2]a\mid a\in M\rangle,$$

$$PZ_n(M)=\{a\in M\mid[\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\dots[\alpha_1,\alpha_2]a=0\},$$

где в обоих случаях $\alpha_1,\dots,\alpha_{2n}$ пробегают $Pr(M)$.

Если $0=M_0\subseteq M_1\subseteq\dots\subseteq M_{n-1}\subseteq M_n=M$ — *P-центральный* ряд, то получаем включения $M_i\subseteq PZ_i(M)$ и $PL_i(M)\subseteq M_{n-i+1}$ для любых $i=1,\dots,n$. Ряд $PL_1(M)\supseteq PL_2(M)\supseteq\dots$ назовем *нижним P-центральным* рядом модуля M. Из вышеприведенных включений следует, что в P-разрешимом модуле верхний и нижний P-центральные ряды обрываются, причем их длины равны ступени P-разрешимости модуля. В частности, в P-разрешимом модуле все его P-центральные ряды обрываются, минимальная длина таких рядов совпадает со ступенью P-разрешимости модуля.

Лемма 1.2. *Для модуля M равносильны условия:*

(1) *M — P-разрешимый модуль ступени n;*

(2) *$PZ_n(M)=M$ и $PZ_{n-1}(M)\neq M$;*

(3) *$PL_{n+1}(M)=0$ и $PL_n(M)\neq 0$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Так как $PL_i(M)\subseteq PZ_{n-i+1}(M)$, то $PL_1(M)=M\subseteq PZ_n(M)$, т. е. $PZ_n(M)=M$. Допустим, что $PZ_{n-1}(M)=M$. Тогда $PL_2(M)=P(M)\subseteq PZ_{n-2}(M)$ и по индукции $PL_i(M)\subseteq PZ_{n-i}(M)$. Значит, $PL_n(M)=P_{n-1}(M)\subseteq PZ_0(M)=0$; противоречие с условием $P_{n-1}(M)\neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Имеем $PL_{n+1}(M)\subseteq PZ_0(M)=0$. Если $PL_n(M)=0$, то $PL_{n-1}(M)\subseteq PZ_1(M)$. По индукции $PL_{n-k}(M)\subseteq PZ_k(M)$ или $PL_k(M)\subseteq PZ_{n-k}(M)$. Отсюда $PL_1(M)=M\subseteq PZ_{n-1}(M)$; противоречие.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

Если $H\leqslant M$, то обозначим для краткости $H_0=H$ и $H_{i+1}=PN(H_i)$.

Лемма 1.3. *Если M — P-разрешимый модуль ступени n и $H\leqslant M$, то $H_n=M$. В частности, всякий cpi-подмодуль P-разрешимого модуля входит в некоторый P-центральный ряд.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $PZ_i(M)\subseteq H_i$. Для $i=0$ это очевидно, а далее имеем $PZ_{i+1}(M)=PN(PZ_i(M))\subseteq PN(H_i)=H_{i+1}$. Оставшееся утверждение для cpi-подмодулей следует из того, что если $H\leqslant cpiM$, то $H\cap PZ_i(M)\leqslant cpiM$, $H\cap PZ_{i+1}(M)\subseteq PN(H\cap PZ_i(M))$ и $H\subseteq PN(H_i)$.

Лемма 1.4. *Пусть $M=\bigoplus\limits_{j\in I}M_j$, $|I|>1$. Тогда*

(1) *если $M_j\leqslant fiM$ для каждого $j\in I$, то M является P-разрешимым модулем ступени $\leqslant 2$ в том и только в том случае, когда каждый M_j — P-разрешимый модуль ступени $\leqslant 2$, причем если кольцо $E(M_j)$ не является нормальным хотя бы для одного $j\in I$, то M — P-разрешимый модуль ступени 2;*

2) *если M — P-разрешимый модуль ступени 2 и $i \in I$, то*

$$\alpha_i(\mathrm{Hom}(M_j, M_i)M_j) = 0, \quad \alpha_i(P(M_i)) = 0 \quad \text{для каждого } \alpha_i \in \mathrm{Hom}(M_i, M_k)$$

и $[\varphi_i, \psi_i](\mathrm{Hom}(M_j, M_i)M_j)) = 0$ для любых $\varphi_i, \psi_i \in Pr(M_i)$, где $j, k \in I \setminus \{i\}$.

Доказательство. (1) очевидно.

(2) Достаточно показать, что $\mathrm{Hom}(M_j, M_i)M_j \subseteq P(M)$ при $i \neq j$. Действительно, пусть π — проекция M на M_j, $\theta = 1 - \pi$, а $\gamma \in \mathrm{Hom}(M_j, M_i)$. Тогда $\xi = \theta + \theta\gamma\pi \in Pr(M)$ и $[\xi, \pi]M_j = \gamma M_j \subseteq P(M)$.

Лемма 1.5. *Пусть $M = B \oplus G$, где $G \leqslant fiM$ и B, G — P-разрешимые модули ступени $\leqslant 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *M — P-разрешимый модуль ступени $\leqslant 2$;*

(2) *$[\varphi, \psi](\mathrm{Hom}(B, G)B) = 0$ и $\beta(P(B)) = 0$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(G)$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(B, G)$.*

В частности, если кольца $E(B)$ и $E(G)$ нормальны и $\mathrm{Hom}(B, G) \neq 0$, то M — P-разрешимый модуль ступени 2.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1.4.

Достаточность. Пусть $\pi : M \to B$ — проекция, $\theta = 1 - \pi$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Pr(M)$. Имеем $[\gamma, \delta] = (\pi + \theta)[\gamma, \delta](\pi + \theta) = \pi[\gamma, \delta]\pi + \theta[\gamma, \delta]\pi + \theta[\gamma, \delta]\theta$ (учтено, что $\pi[\gamma, \delta]\theta = 0$). Здесь $(\theta[\gamma, \delta]\theta)M = [\gamma|G, \delta|G]G$, где $\gamma|G, \delta|G \in Pr(G)$, а $(\theta[\gamma, \delta]\pi)M = (\theta[\gamma, \delta])B \subseteq \mathrm{Hom}(B, G)B$. Поэтому ввиду леммы 1.4 осталось проверить действие $[\alpha, \beta][\gamma, \delta]$ на B. Если $b \in B$, то $[\gamma, \delta]b = [\pi\gamma, \pi\delta]b + (\theta\gamma\pi\delta - \theta\delta\pi\gamma + [\theta\gamma, \theta\delta])b$. Второе слагаемое принадлежат следу B в G, поэтому оно аннулируются при действии $[\alpha, \beta]$. Далее по свойству 2 $\pi\alpha|B, \pi\beta|B, \pi\gamma|B, \pi\delta|B \in Pr(B)$, поэтому $[\pi\gamma, \pi\delta]B \subseteq P(B)$ и $[\pi\alpha, \pi\beta][\pi\gamma, \pi\delta]B = 0$. Поскольку $(\theta\alpha\pi\beta[\pi\gamma, \pi\delta] - \theta\beta\pi\alpha[\pi\gamma, \pi\delta] + [\theta\alpha, \theta\beta][\pi\gamma, \pi\delta])b \in \mathrm{Hom}(B, G)(P(B)) = 0$, то $[\alpha, \beta][\gamma, \delta]b = 0$.

§ 2. *P*-разрешимые группы ступени 2

Из леммы 1.4 следует, что всякая P-разрешимая группа не содержит прямых слагаемых, разложимых в прямые суммы изоморфных групп. Поэтому делимая группа D является P-разрешимой тогда и только тогда, когда все ее ненулевые p-компоненты имеют ранг 1, а часть без кручения либо нулевая, либо также имеет ранг 1.

Лемма 2.1. *Если A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$, то каждая ее ненулевая p-компонента A_p либо циклическая группа, либо прямая сумма циклической группы B_p и группы Z_{p^∞}, причем в последнем случае если $B_p \neq 0$, то $A/A_p = p(A/A_p)$.*

Доказательство вытекает из леммы 1.4.

Следствие 2.2. *Если A — периодическая группа, то следующие условия эквивалентны:*

(1) *A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$;*

(2) *каждая ненулевая p-компонента группы A либо циклическая группа, либо прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической группы и группы Z_{p^∞}. В частности, если A редуцированна, то ее кольцо эндоморфизмов коммутативно.*

Теорема 2.3. *Если $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$, то A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$ тогда и только тогда, когда*

(1) *каждая группа B, D является P-разрешимой ступени $\leqslant 2$;*

(2) *P-коммутант группы B периодичен;*

(3) *если обе подгруппы D_p, B_p ненулевые, то $B/B_p = p(B/B_p)$;*

(4) *$0 \neq T(D) \neq D$ влечет периодичность B, в этом случае A имеет строение $A = (\bigoplus_{p\in\Pi} A_p) \oplus D_0$, где Π — некоторое множество простых чисел, каждая A_p или циклическая группа, или прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической p-группы и группы Z_{p^∞}, а $D_0 \cong \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Необходимость. Если $0 \neq b \in B$ — элемент бесконечного порядка, то ввиду инъективности группы D найдется гомоморфизм $\alpha : B \to D$ со свойством $\alpha b \neq 0$, причем если часть без кручения D_0 группы D отлична от нуля, то α можно выбрать так, чтобы $\alpha b \in D_0$ и $\gamma\alpha b \neq 0$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{Hom}(D_0, Z_{p^\infty})$. Поэтому в силу леммы 1.4 условие $0 \neq T(D) \neq D$ влечет периодичность B. Наконец, если $B_p \neq 0$, то по лемме 2.1 B_p — циклическая группа, поэтому $B = B_p \oplus E_{(p)}$ для некоторой подгруппы $E_{(p)} \subseteq B$. Если теперь $pE_{(p)} \neq E_{(p)}$, то при условии $D_p \neq 0$ найдется ненулевая композиция гомоморфизмов $E_{(p)} \to B_p \to D_p$, что противоречит лемме 1.4.

Достаточность. Пусть $0 \neq T(D) \neq D$. Имеем $A = B \oplus T(D) \oplus D_0$, где $B \oplus T(D) \leqslant fiA$, $E(B)$ и $E(T(D))$ — коммутативные кольца. Согласно лемме 1.5 $B \oplus T(D)$ — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$. Поскольку след группы D_0 в $B \oplus T(D)$ содержится в подгруппе $T(D)$, а $E(T(D))$ и $E(D_0)$ — коммутативные кольца, из леммы 1.4 следует, что A — P-разрешимая группа ступени 2. Если же $D_0 = 0$, то $E(D)$ — коммутативное кольцо и $D \leqslant fiA$. Далее, если $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то по условию $pE_{(p)} = E(p)$ при $D_p \neq 0$. Так как $B_p \leqslant fiB$ и $E(B_p)$ — коммутативное кольцо, то $P(B) = P(E_{(p)})$ и, значит, $(P(B))_p = 0$. Отсюда ввиду периодичности $P(B)$ вытекает, что $\beta(P(B)) = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Поэтому по лемме 1.5 A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$. Пусть, наконец, D — группа без кручения. Тогда $r(D) = 1$, $D \leqslant fiA$, $E(D)$ — коммутативное кольцо и так как $P(B)$ — периодическая группа, $\beta(P(B)) = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$, следовательно, по лемме 1.5 вновь A P-разрешима ступени $\leqslant 2$. Заметим, что если $D \cong \mathbb{Q}$, а B — периодическая группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов, то и кольцо $E(A)$ также коммутативно, т. е. в теореме возможен случай, когда A — P-разрешимая группа ступени 1.

Отметим, что делимая группа $D = T(D) \oplus D_0$ имеет нормальное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда либо $T(D) = 0$, а $D_0 \cong \mathbb{Q}$, либо $D_0 = 0$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого p с условием $D_p \neq 0$. Нередуцированная группа $A = D \oplus B$ с делимой частью D имеет нормальное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда B — периодическая группа, каждая p-компонента которой является циклической группой, а $D \cong \mathbb{Q}$ либо D — периодическая группа, каждая ненулевая p-компонента которой изоморфна квазициклической p-группе, причем $B_p = 0$ при $D_p \neq 0$ [6, абзац после предложения 2]. Кольца эндоморфизмов вышеупомянутых групп коммутативны.

Следствие 2.4. *Пусть $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$, причем $0 \neq B$ — группа без кручения. Тогда A — P-разрешимая группа ступени 2 в том и только в том случае, когда $E(D)$ — коммутативное кольцо, а $E(B)$ — нормальное кольцо.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.3, а достаточность — из леммы 1.5. Поскольку $\mathrm{Hom}(B, D) \neq 0$, то A — P-разрешимая группа ступени 2.

Следствие 2.5. *Пусть $A = T(A) \oplus R$ — расщепляющаяся смешанная группа с ненулевой делимой частью $D = T(D) \oplus D_0$. Запишем A в виде $A = T \oplus B \oplus T(D) \oplus D_0$, где $T(A) = T \oplus T(D)$. Группа A P-разрешима ступени $\leqslant 2$ в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

(1) *$r(D_0) \leqslant 1$ и $T(D) \cong \bigoplus\limits_{p\in\Pi} Z_{p^\infty}$ (если $\Pi \neq \varnothing$);*

(2) *$T = \bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} T_p$, где каждая T_p — ненулевая циклическая p-группа (если $\Pi_1 \neq \varnothing$);*

(3) *кольцо $E(B)$ нормально и $pB = B$ при $p \in \Pi' = \Pi \cap \Pi_1$;*

(4) *если $B, D_0 \neq 0$, то $T(D) = 0$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.3.

Достаточность. Имеем $T(A) = T \oplus T(D) \leqslant fiA$. Если $D_0 = 0$, то обозначим через G след группы B в $T(A)$; G можно записать в виде $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 = \bigoplus\limits_{p\in\Pi_1\setminus\Pi} G_p \subseteq T$, $G_2 = \bigoplus\limits_{p\in\Pi} G_p \subseteq T(D)$ ($pG = G$ при $p \in \Pi'$, поэтому $G_p \cap T_p = 0$ для таких p). Поскольку $\bigoplus\limits_{p\in\Pi_1\setminus\Pi} T_p \leqslant fiT(A)$ и кольца $E(T), E(T(D))$ коммутативны, $[\varphi, \psi]G = 0$ для любых $\varphi, \psi \in Pr(T(A))$. Поэтому A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$ по лемме 1.5. Если же $B \neq 0$ и $D_0 \cong \mathbb{Q}$, то $A = B \oplus T \oplus D_0$, где $T \oplus D_0 \leqslant fiA$ и $E(B)$ — нормальное, а $E(T \oplus D_0)$ — коммутативное кольца. Вновь по лемме 1.5 A P-разрешима ступени 2. Наконец, при $B = 0$ имеем $A = T \oplus D$, где $E(T)$, $E(T(D))$ — коммутативные кольца и D — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$. Стало быть, и в этом случае A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$.

Теорема 2.6. (1) *Пусть A — вполне разложимая группа без кручения, $A = B \oplus D$, где D — делимая часть группы A. P-разрешимость группы A ступени $\leqslant 2$ равносильна следующему:*

а) *если $D \neq 0$, то $r(D) = 1$, а B — прямая сумма групп ранга 1 не сравнимых между собой типов;*

б) *если $D = 0$, то $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, где типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j не сравнимы при различных i и j, причем либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, C_i — прямая сумма групп ранга 1 не сравнимых между собой типов $> t(B_i)$.*

(2) *Пусть A — сепарабельная (векторная группа) без кручения, $A = B \oplus D$, где D — делимая часть группы A. P-разрешимость группы A ступени $\leqslant 2$ равносильна следующему:*

а) *если $D \neq 0$, то $r(D) = 1$, а B — прямая сумма (прямое произведение) групп ранга 1 не сравнимых между собой типов;*

б) *если $D = 0$, то $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ ($A = \prod\limits_{i\in I} A_i$), типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j не сравнимы при различных i и j, причем либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, C_i — сепарабельная (векторная) группа, типы прямых слагаемых ранга 1 которой не сравнимы между собой и $> t(B_i)$.*

Доказательство. (1) Необходимость следует из леммы 1.4, поскольку для прямого слагаемого $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ группы A, где $r(N_i) = 1$, невозможны следующие соотношения для типов: $t(N_1) = t(N_2)$ или $t(N_1) \leqslant t(N_2) \leqslant t(N_3)$.

Достаточность в случае (а) вытекает из леммы 1.5 поскольку $D \leqslant fiA$ и $E(B)$, $E(D)$ — коммутативные кольца. В случае (б) достаточность следует из того, что $A_i \leqslant fiA$, где согласно лемме 1.5 A_i — P-разрешимые группы ступени $\leqslant 2$.

(2) Прямые слагаемые сепарабельных групп являются сепарабельными группами. Далее, если $\Omega(A)$ — множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A, то $\Omega(A)$ можно разбить на классы эквивалентности $\Omega(A) = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$, где типы $s, t \in \Omega(A)$ считаются эквивалентными, если существуют $t_1, \dots, t_n \in \Omega(A)$ такие, что типы t_i и t_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, 1, \dots, n$ (здесь $t_0 = s$, $t_{n+1} = t$). В этом случае $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, $\Omega(A_i) = \Omega_i$ и $A_i \leqslant fiA$, т. е. типы из $\Omega(A_i)$ и $\Omega(A_j)$ не сравнимы при $i \neq j$ [13, § 19, упражнение 7]. Для векторных групп можно использовать лемму: если η — ненулевой гомоморфизм векторной группы $V = \prod\limits_{i\in I} R_i$ в векторную группу $W = \prod\limits_{j\in J} S_j$ (R_i и S_j — группы ранга 1), то $t(R_i) \leqslant t(S_j)$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$ [12, лемма 96.1]. С учетом этих фактов оставшиеся утверждения доказываются аналогично (1).

Теорема 2.7. *Пусть A — копериодическая группа, D — ее делимая часть и $A = B \oplus D$, $D = T(D) \oplus D_0$. Тогда A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$ в том и только в том случае, когда A алгебраически компактна, $D = (\bigoplus\limits_{p\in\Pi} Z_{p^\infty}) \oplus D_0$, где Π — некоторое множество простых чисел, $r(D_0) \leqslant 1$ и, кроме того,*

(1) если $0 \neq T(D) \neq D$, то $B = \bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} B_p$, каждая B_p — циклическая p-группа и Π_1 — некоторое конечное множество простых чисел;

(2) если $T(D) = 0$ или $D_0 = 0$, то $B = G \oplus C$, $G = \prod\limits_{p\in\Pi_1} B_p$, каждая B_p является (при $\Pi_1 \neq \varnothing$) ненулевой циклической p-группой, $C \cong \prod\limits_{p\in\Pi_2} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, Π_1 и Π_2 — множества простых чисел такие, что $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$, причем если $D \neq 0$, то множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ конечно.

Доказательство. Необходимость. Имеем $A^1 = D \oplus B^1$. Если $B_p \neq 0$, $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то $B^1 = E^1_{(p)}$. Отсюда следует, что B^1 — делимая подгруппа без кручения в B и, значит, $B^1 = 0$, $A^1 = D$. Поэтому группа A алгебраически компактна [12, предложение 54.2]. Если $0 \neq T(D) \neq D$, то по теореме 2.3 B — периодическая группа. Всякая периодическая алгебраически компактная группа ограниченная [12, следствие 40.3], что доказывает (1).

(2) Замыкание $G = (T(B))^-$ в Z-адической топологии периодической части $T(B)$ выделяется в B прямым слагаемым, $B = G \oplus C$, где $\Pi_1 = \{p \in P \mid B_p \neq 0\}$. Если $D_p, B_p \neq 0$, то $pC = C$, поэтому $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. Если множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ бесконечно, то след группы C в G является смешанной группой, а это при условии $D \neq 0$ в силу доказательства леммы 1.4 противоречит теореме 2.3.

Достаточность. В случае (1) A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$ по теореме 2.3. Если выполнены условия (2), то $G \leqslant fi(G \oplus C)$ и $E(G)$, $E(C)$ — коммутативные кольца. Поэтому по лемме 1.5 $G \oplus C$ — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$. Пусть $D \neq 0$. По лемме 1.4 $P(G \oplus C) = \mathrm{Hom}(C, G)C$. Так как множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ конечно, $P(G \oplus C)$ — периодическая группа и $\beta(P(G \oplus C)) = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(G \oplus C, D)$ в силу условия $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. Следовательно, по лемме 1.5 A — P-разрешимая группа ступени $\leqslant 2$.

Отметим, что в теоремах 2.6, 2.7 рассматриваемые группы будут E-разрешимыми (ступени $\leqslant 2$). О E-разрешимых группах см. [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чехлов А. Р.* О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 6. С. 211–218.

2. *Чехлов А. Р.* О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 1. С. 31–36.

3. *Чехлов А. Р.* Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 942–953.

4. *Чехлов А. Р.* О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 2. С. 78–84.

5. *Чехлов А. Р.* О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2009. № 2. С. 85–99.

6. *Чехлов А. Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 520–539.

7. *Чехлов А. Р.* E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. 2010. № 1. С. 59–71.

8. *Чехлов А. Р.* О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1163–1174.

9. *Туганбаев А. А.* Теория колец (Арифметические модули и кольца). М.: МЦНМО, 2009.

10. *Чехлов А. Р.* О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 451–464.

11. *Чехлов А. Р.* О некоторых классах абелевых групп // Абелевы группы и модули. 1984. Вып. 5. С. 137–152.

12. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.

13. *Крылов П. А., Михалев А. В., Туганбаев А. А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2007.

Статья поступила 18 октября 2011 г.

Чехлов Андрей Ростиславович
Национальный исследовательский Томский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра алгебры,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
`cheklov@math.tsu.ru`