Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.54

О ГРУППАХ, В КОТОРЫХ ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА 5 ЯВЛЯЮТСЯ 5–ГРУППАМИ

С. Астилл, К. Паркер, Р. Валдекер

Аннотация. Основная теорема настоящей статьи показывает, что группа нечетного порядка, допускающая знакопеременную группу степени 5 с элементом порядка 5 и действием без неподвижных точек, является нильпотентной индекса не более чем два. Для всех нечетных простых r, отличных от 5, построена r-группа класса два, допускающая знакопеременную группу степени 5 с указанными свойствами. Данная теорема исправляет предыдущий результат, который утверждает отсутствие таких групп класса два. Полученный результат позволяет сформулировать теорему, дающую точную информацию о группах, в которых централизатор каждого элемента порядка пять является 5-группой.

Ключевые слова: конечная группа.

1. Введение

В [1] Дольфи, Джабара и Лючидо описали конечные группы, в которых централизатор любого элемента порядка 5 является 5-группой. Однако основной результат из [1] является неточным: рассматривая группы G, в которых $F^*(G/F(G)) \cong \mathrm{Alt}(5)$ и $F(G)$ имеет нечетный порядок, авторы ошибочно полагали, что $F(G)$ абелева. Как мы считаем, ошибка произошла в [1] на с. 1294. Наш основной результат — это исправленная версия их теоремы.

Теорема 1.1 [1]. *Пусть G — конечная группа, в которой централизатор любого элемента порядка 5 является 5-группой. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(i) *G — 5-группа или $5'$-группа;*

(ii) *G — разрешимая группа и выполняется одно из свойств:*

(a) *G — разрешимая группа Фробениуса такая, что либо ядро Фробениуса, либо дополнение Фробениуса является 5-группой;*

(b) *G — 2-группа Фробениуса такая, что $F(G)$ — $5'$-группа и $G/F(G)$ — группа Фробениуса, у которой ядро является циклической 5-группой, а дополнение — циклической группой порядка 2 или 4;*

(c) *G — 2-группа Фробениуса такая, что $F(G)$ — 5-группа, $G/F(G)$ — группа Фробениуса, у которой ядро является циклической $5'$-группой, а дополнение — циклической 5-группой;*

(iii) *$G/F(G) \cong \mathrm{Alt}(5)$ или $\mathrm{Sym}(5)$, а $F(G) = O_2(G)O_{2'}(G)$, где $O_2(G)$ нильпотентна индекса не более чем три, а $O_{2'}(G) = O_{\{2,5\}'}(G)$ нильпотентна индекса не более чем два;*

(iv) *$G/F(G) \cong \mathrm{Alt}(6)$, $\mathrm{Sym}(6)$ или $\mathrm{M}(9)$, а $F(G) = O_2(G)O_3(G)$, где $O_2(G)$ и $O_3(G)$ — элементарные абелевы группы;*

(v) $G/F(G) \cong \mathrm{Alt}(7)$ *и* $F(G) = O_2(G)$ *является элементарной абелевой группой;*

(vi) $G/F(G) \cong {}^2\mathrm{B}_2(8)$ *или* ${}^2\,\mathrm{B}_2(32)$, *а* $F(G) = O_2(G)$ — *элементарная абелева группа;*

(vii) $G/F(G) \cong \mathrm{PSU}_4(2)$ *или* $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSU}_4(2))$, *а* $F(G) = O_2(G)$ *является элементарной абелевой группой;*

(viii) $G/F(G) \cong \mathrm{PSL}_2(49)$, $\mathrm{PGL}_2(49)$ *или* $\mathrm{M}(49)$, *а* $F(G) = O_7(G)$ — *элементарная абелева группа;*

(ix) $E(G) \cong \mathrm{PSL}_2(5^e)$, *где* $e \geq 2$ *и либо* $G \cong \mathrm{PSL}_2(5^e)$, *либо* $G \cong \mathrm{PGL}_2(5^e)$, *либо* e *четно и* $G \cong \mathrm{M}(5^e)$;

(x) $E(G) \cong \mathrm{PSL}_2(p)$, *где* p — *простое число, которое может быть записано в виде* $p = 2 \cdot 5^e \pm 1$ *для некоторого неотрицательного целого* e;

(xi) $G \cong \mathrm{PSL}_2(11)$, $\mathrm{PSL}_3(4)$, $\mathrm{PSL}_3(4){:}2_f$, $\mathrm{PSL}_3(4){:}2_i$, $\mathrm{PSp}_4(7)$, $\mathrm{PSU}_4(3)$, $\mathrm{Mat}(11)$ *или* $\mathrm{Mat}(22)$.

Будем использовать обозначения из [1]. Для всех нечетных простых p и всех $m \in \mathbb{N}$ пишем $\mathrm{M}(p^{2m})$ для обозначения нерасщепленного расширения $\mathrm{PSL}_2(p^{2m})$ такого, что $|\,\mathrm{M}(p^{2m}) : \mathrm{PSL}_2(p^{2m})| = 2$. В п. (xi) теоремы 1.1 через 2_f обозначаем полевой автоморфизм порядка 2, а через 2_i — обратно-транспонирующий автоморфизм. Всюду далее элементарные абелевы группы могут быть тривиальными. Отметим, что $G/F(G)$-модули из $F(G)$ явно описываются во всех случаях.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 строим примеры r-групп класса два для всех нечетных простых r, $r \neq 5$, которые допускают действие $\mathrm{Alt}(5)$ с элементом порядка 5, действующим без нетривиальных неподвижных точек. Это доказывает, что утверждение из [1] неверно. Далее в разд. 3 показываем, что не существует групп G таких, что $O_{\{2,5\}'}(G)$ нильпотентна индекса три, $G/O_{\{2,5\}'}(G) \cong \mathrm{Alt}(5)$ и есть элемент порядка 5, действующий без неподвижных точек. Это основной результат статьи, и наше доказательство поддерживается некоторыми рассуждениями из [2].

Заметим, что авторы работы [1] для доказательства того, что $\mathrm{PSL}_2(49)$ не может действовать на неабелевой 7-группе, используют тот факт, что если $\mathrm{Alt}(5)$ действует на 7-группе, то 7-группа является абелевой. В разд. 4 мы даем альтернативное доказательство этого факта, а также доказываем, что такая абелева группа должна быть элементарной абелевой, и показываем, что в п. (iv) теоремы 1.1 подгруппа $O_3(G)$ элементарная абелева. Это усиливает результат из [1].

Благодарности. Второй автор признателен DFG за финансовую поддержку, а первый и второй авторы благодарят математическое отделение в Халле за гостеприимство.

2. Построение группы класса два, допускающей Alt(5) с элементом порядка 5, действующим без неподвижных точек

В данном разделе покажем, что теорема 1.1(iii) не может быть усилена до утверждения, что $O_{2'}(G)$ абелева, построив примеры с $O_{2'}(G)$ класса два.

Пусть r нечетное простое, $r \neq 5$, а W — 5-мерное векторное пространство над $\mathrm{GF}(r)$ с базисом $\{a_1, \ldots, a_5\}$. Пусть $X := \mathrm{Sym}(5)$ действует естественно перестановками на этом базисе. Это действие поднимается до точного линейного действия X на W, которое в действительности является редукцией по модулю r соответствующего целочисленного представления X. Пусть V — $\mathrm{GF}(r)X$-подмодуль в W с базисом $\mathfrak{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, где полагаем $v_i := a_1 - a_{i+1}$ для всех $1 \leq i \leq 4$. Легко проверить, что элемент порядка 5 из X действует без неподвижных точек на V и $W = V \oplus \langle a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \rangle$. Положим $Y := X' \cong \mathrm{Alt}(5)$ и заметим, что ограничение V на Y является неприводимым $\mathrm{GF}(r)Y$-модулем. Обозначим этот модуль также через V.

Напомним, что $V \wedge V$ изоморфен подмодулю в $V \otimes V$, порожденному векторами $v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i$ при $1 \leq i < j \leq 4$.

Лемма 2.1. *$\mathrm{GF}(r)Y$-модуль $V \wedge V$ не имеет композиционных факторов, изоморфных V.*

Доказательство. Пусть $U := V \wedge V$. Проводя несложные вычисления с $S = \langle (2,3)(4,5), (2,4)(3,5) \rangle$, получаем $C_U(S) = 0$. Поскольку $C_V(S) = \langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rangle$, отсюда следует требуемый результат. □

Нам необходимо следующее утверждение о саморасширениях V посредством V.

Лемма 2.2. *Любой $\mathrm{GF}(r)Y$-модуль со всеми композиционными факторами, изоморфными V, вполне приводим.*

Доказательство. Надо показать, что $\mathrm{Ext}^1_Y(V, V) = 0$ (обозначения см., например, в [3]). Если $r > 3$, то ввиду $r \neq 5$ утверждение следует из теоремы Машке. Предположим, что $r = 3$. Пусть H обозначает подгруппу в Y, которая изоморфна $\mathrm{Alt}(4)$. Напомним, что V является прямым слагаемым в естественном подстановочном модуле W для Y. Следовательно, если обозначим через 1_H тривиальный $\mathrm{GF}(3)H$-модуль, то W — это индуцированный модуль $1_H \uparrow^Y$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Ext}^1_Y(W, V) = \mathrm{Ext}^1_Y(1_H \uparrow^Y, V) = \mathrm{Ext}^1_H(1_H, V \downarrow_H),$$

где второе равенство вытекает из леммы Шапиро [3, следствие 3.3.2]. Далее, $V \downarrow_H$ является прямой суммой точного 3-мерного модуля и тривиального модуля. Так как H содержит четвертную подгруппу Клейна и эта подгруппа действует взаимно просто на 3-мерном модуле, этот модуль имеет только тривиальные расширения с тривиальным H-модулем.

Поскольку $\dim \mathrm{Ext}^1_Y(1_H, 1_H) = 1$ (см., например, [3, следствие 3.5.2]), то $\dim \mathrm{Ext}^1_Y(1_H, V \downarrow H) = 1$. С другой стороны,

$$\mathrm{Ext}^1_Y(W, V) = \mathrm{Ext}^1_Y(1_Y \oplus V, V) = \mathrm{Ext}^1_Y(1_Y, V) \oplus \mathrm{Ext}^1_Y(V, V).$$

Пусть $Y \geq D \cong \mathrm{Dih}(10)$. Тогда $1_D \uparrow^Y$ является универсальным модулем с цоколем и верхушкой размерности 1 и сердцевиной размерности 4. Следовательно, $\dim \mathrm{Ext}^1_Y(1_Y, V) \geq 1$. В итоге $\mathrm{Ext}^1_Y(V, V) = 0$, как и утверждалось. □

Конструкции r-групп, допускающих действие других групп, тесно связаны с тензорными произведениями и гомоморфизмами модулей. Поэтому в следующей лемме изучаем $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Положим $\sigma = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ и определим $\theta \in \mathrm{Hom}(V, V)$ следующим образом:

$$v_i \mapsto v_i\theta := \sigma - v_i$$

для всех $1 \leq i \leq 4$.

В базисе $\mathfrak{V}$ отображение θ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.3. $\mathrm{GF}(r)X$*-подмодуль в* $\mathrm{Hom}(V,V)$*, порожденный* θ*, имеет размерность* 4 *и изоморфен* V*.*

Доказательство. Пусть $X_1 = \mathrm{Stab}_X(1) \cong \mathrm{Sym}(4)$. Тогда для $1 \le i \le 4$ и для любого $\pi \in X_1$ имеем

$$v_i\pi^{-1}\theta\pi = (v_{(i+1)\pi^{-1}-1})\theta\pi = (\sigma - v_{((i+1)\pi^{-1}-1)\pi}) = \sigma - v_i = v_i\theta.$$

Поскольку $v_1(1,2)\theta(1,2) \neq v_1\theta$, орбита группы X, содержащая θ, имеет точно 5 элементов. Следовательно, подпространство U в $\mathrm{Hom}(V,V)$, порожденное θ, имеет размерность 4 или 5. Если $\dim U = 5$, то сумма τ сдвигов θ на X централизуется X и нетривиальна. По лемме Шура получаем, что τ — скалярная матрица. Ввиду нечетности r если τ ненулевая, то след τ не равен нулю. Однако θ и ее сдвиги имеют след 0, а потому τ должна иметь след 0. Таким образом, $\tau = 0$ и $\dim U = 4$. $\square$

Теорема 2.4. *Для всех нечетных простых* r, $r \neq 5$*, существуют* r*-группы класса два, допускающие* $\mathrm{Sym}(5)$ *с элементом порядка* 5*, действующим без неподвижных точек.*

Доказательство. Пусть U — 8-мерное векторное пространство над $\mathrm{GF}(r)$. Определим подгруппу J в $\mathrm{GL}_8(r)$ правилом

$$J = \left\langle \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ \theta & I_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_\pi & 0 \\ 0 & x_\pi \end{pmatrix} \mid \pi \in X \right\rangle,$$

где x_π — матрица, соответствующая действию $\pi \in X$ на V в базисе $\mathfrak{V}$, а I_4 — единичная 4×4-матрица. Имеем $J \cong r^4{:}\,\mathrm{Sym}(5)$ по лемме 2.3. Положим $K = U \rtimes J$. Тогда $O_r(K)$ имеет порядок r^{12} и класс два. Кроме того, элементы порядка 5 в K являются самоцентрализующимися. $\square$

Следующая таблица описывает элемент $\gamma \in \mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ при помощи определения образов базисных тензоров:

$\otimes$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	$-5v_1 + 2\sigma$	σ	σ	σ
v_2	σ	$-5v_2 + 2\sigma$	σ	σ
v_3	σ	σ	$-5v_3 + 2\sigma$	σ
v_4	σ	σ	σ	$-5v_4 + 2\sigma$

Лемма 2.5. *С точностью до скаляра* γ *является единственным элементом в* $\mathrm{Hom}_Y(V \otimes V, V) = \mathrm{Hom}_X(V \otimes V, V)$.

Доказательство. Заметим, что $X = \langle (1,2), (2,3,4,5) \rangle$ и второй порождающий переставляет $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ как 4-цикл. В частности, γ коммутирует с этим элементом. Следовательно, нам нужно только проверить, что γ коммутирует с транспозицией. В качестве иллюстрации покажем, что

$$(v_1 \otimes v_2)\gamma(1,2) = (v_1 \otimes v_2)(1,2)\gamma.$$

Левая часть равна $\sigma(1,2) = -5v_1 + \sigma$, в то время как правая часть равна $-(v_1 \otimes v_2)\gamma + (v_1 \otimes v_1)\gamma = \sigma - 5v_1$. Таким образом, $\gamma \in \mathrm{Hom}_X(V \otimes V, V)$.

Предположим, что $\mu \in \mathrm{Hom}_Y(V \otimes V, V)$ не является скалярным кратным γ. Рассмотрим $(v_1 \otimes v_1)\mu = \sum\limits_{i=1}^{5} \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in \mathrm{GF}(r)$ и $\sum\limits_{i=1}^{5} \lambda_i = 0$. Так как μ коммутирует с элементами из Y, применяя $(3,4,5)$, получаем $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$, и это общее значение обозначим через λ. Используя $(1,2)(3,4)$, приходим к равенству $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом,

$$(v_1 \otimes v_1)\mu = \lambda_1(a_1 + a_2) + \lambda(a_3 + a_4 + a_5),$$

следовательно, $2\lambda_1 + 3\lambda = 0$. Поскольку μ ненулевое, после подправления μ на скаляр можно предполагать, что

$$(v_1 \otimes v_1)\mu = -5v_1 + 2\sigma = (v_1 \otimes v_1)\gamma.$$

Заменяя μ на $\mu - \gamma$, рассмотрим только случай, когда μ отображает $v_1 \otimes v_1$ в нуль. Действие Y дает $(v_j \otimes v_j)\mu = 0$ для всех $1 \leq j \leq 4$. Пусть $(1,j,k)$ — 3-цикл из Y. Поскольку $(v_j \otimes v_j)\mu = 0$, имеем

$$0 = (v_j \otimes v_j)(1,j,k)\mu = ((v_k - v_j) \otimes (v_k - v_j))\mu = -(v_k \otimes v_j)\mu - (v_j \otimes v_k)\mu.$$

Следовательно, μ знакопеременно, а $V \wedge V$ имеет фактор, изоморфный V, но тогда из леммы 2.1 следует, что μ нулевой; противоречие. Лемма доказана. $\square$

3. Теорема несуществования групп класса три, допускающих Alt(5)

В предыдущем разделе мы видели, что $\mathrm{Alt}(5)$ может действовать на группу класса два элементом порядка 5, действующим без неподвижных точек. Наша цель — показать, что если $E(G/F(G)) \cong \mathrm{Alt}(5)$, то справедлив п. (iii) теоремы 1.1. В частности, мы покажем, что $\mathrm{Alt}(5)$ не может действовать на группе класса три нечетного порядка элементом порядка 5, действующим без неподвижных точек. Следовательно, предположим, что G — конечная группа такая, что централизатор каждого элемента порядка 5 является 5-группой и $E(G/F(G)) \cong \mathrm{Alt}(5)$. Предположим, что $O_5(G) \neq 1$. Тогда нильпотентность $F(G)$ и тот факт, что элементы порядка 5 являются 5-группами, влекут $F(G) = O_5(G)$. Пусть B — силовская 2-подгруппа в G. Тогда B является элементарной абелевой порядка 4. В силу взаимно простого действия имеем $O_5(G) = \langle C_{O_5(G)}(b) \mid b \in B^{\#}\rangle$. Значит, поскольку элементы порядка 5 в G не коммутируют с инволюциями, приходим к противоречию. Таким образом, $O_5(G) = 1$. Следовательно, надо только определить структуру $O_r(G)$ для всех простых $r \neq 5$, делящих $|F(G)|$. Если $r = 2$, то [4, лемма 4.1] влечет, что G содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{Alt}(5)$, а потому $O_2(G)$ допускает $\mathrm{Alt}(5)$ с элементом порядка 5, действующим без неподвижных точек. В этом случае из [2, теорема 2] следует, что $O_2(G)$ имеет класс не выше трех. Поэтому можно предполагать, что r нечетно и $r \neq 5$. Наша цель будет достигнута, как только докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть r нечетное простое, $r \neq 5$, и G — группа такая, что $R := F(G) = O_r(G)$ является r-группой и $F^*(G/R) \cong \mathrm{Alt}(5)$. Если элемент* *порядка 5 из G действует без неподвижных точек на R, то R имеет класс не выше 2.*

Оставшаяся часть данного раздела посвящена доказательству теоремы 3.1, и достаточно рассмотреть случай, когда $G/O_r(G) \cong \mathrm{Alt}(5)$ и $O_r(G)$ имеет класс три.

Наиболее прямой подход к доказательству теоремы 3.1 состоит в том, чтобы выбрать G минимального порядка с $R := O_r(G)$ класса три и прийти к противоречию. Этот подход хорошо работает, когда $r \neq 3$, так как в этих случаях G расщепляется над R. Однако при $r = 3$ возможно, что G не расщепляется над R (так как существуют группы X такие, что $X/O_3(X) \cong \mathrm{Alt}(5)$ и $O_3(X)$ изоморфен V как $X/O_3(X)$-модуль, которые не содержат подгрупп, изоморфных $\mathrm{Alt}(5)$). Таким образом, в прямом подходе к доказательству теоремы 3.1 при выборе нормальной подгруппы U в G такой, что U собственна в R, может не существовать группы G^* с условием $O_3(G^*) = U$. Следовательно, наша индуктивная гипотеза недостаточно сильна для утверждения, что U имеет класс не выше 2.

Вместо этого предположим, что теорема 3.1 неверна, и возьмем в качестве контрпримера группу G минимального порядка такую, что $R := O_r(G)$ имеет класс три. Выберем нормальную подгруппу Q в G, содержащуюся в R и являющуюся минимальной класса три. Положим $\overline{G} := G/R$ и зафиксируем наши обозначения.

Лемма 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Q' абелева;*

(ii) *любая нормальная подгруппа в G, собственно содержащаяся в Q, имеет класс не выше 2;*

(iii) *$\Gamma_2(Q)$ — элементарная абелева группа порядка r^4, изоморфная V (как определено перед леммой 2.5) как $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модуль;*

(iv) *$Q'/(Q' \cap Z(Q))$ является $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модулем;*

(v) *$\Phi(Q) \leq Z_2(Q) \leq C_Q(Q') < Q$, в частности, $Q/Z_2(Q)$ — элементарная абелева группа;*

(vi) *любой G-композиционный фактор группы Q изоморфен V как $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модуль; любая элементарная абелева G-инвариантная секция Q, которая централизуется R, является прямой суммой модулей, изоморфных V.*

Доказательство. Имеем $Q' \leq Z_2(Q)$, и равенство $[Q', Z_2(Q)] = 1$ следует из леммы о трех подгруппах. Таким образом, $Q' \leq Z_2(Q) \leq C_Q(Q') < Q$, и справедливы (i) и некоторые включения из (v).

Для доказательства (ii) обозначим через Q_0 нормальную подгруппу в G, которая собственно содержится в Q. Тогда из минимальности выбора Q немедленно следует, что Q_0 имеет класс не выше 2.

$\Gamma_2(Q)$ лежит в $Z(Q)$, так как Q имеет класс три, а потому является абелевой. Пусть $P := \Phi(\Gamma_2(Q))$. Тогда R централизует P и, следовательно, если $P \neq 1$, то $\widehat{G} := G/P$ является контрпримером меньшего порядка, поскольку $\widehat{Q}$ имеет класс три. Это противоречие показывает, что $P = 1$ и $\Gamma_2(Q)$ является элементарной абелевой группой; аналогично $\Gamma_2(Q)$ неприводим как $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модуль. Это доказывает (iii).

Пусть $a \in Q'$ и $q \in Q$. Тогда $[a^r, q] = [a, q]^r$, но $[a, q]$ принадлежит $\Gamma_2(Q)$, которая является элементарной абелевой по (iii). Значит, $[a^r, q] = 1$. Следовательно, $a^r \in Z(Q)$, а потому $Q'/Q' \cap Z(Q)$ — элементарная абелева группа. Для доказательства того, что эта фактор-группа является $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модулем, осталось показать, что $[Q', R] \leq Q' \cap Z(Q)$.

Очевидно, что $[Q', R] \leq Q'$, а также $[Q, Q', R] \leq [\Gamma_2(Q), R] < \Gamma_2(Q)$. Следовательно, $[Q, Q', R] = 1$ по (iii). Поскольку R имеет класс три, $[R, R'] \leq Z(R)$, а потому $[Q, R] \leq R' \leq Z_2(R)$. Значит, $[R, Q, Q'] = 1$, и лемма о трех подгруппах влечет $[Q', R, Q] = 1$. Получаем, что $[Q', R] \leq Z(Q)$, откуда $[Q', R] \leq Q' \cap Z(Q)$.

Докажем последнее утверждение из (v). Пусть $a, q_1, q_2 \in Q$. Тогда $[a^r, q_1, q_2] = [a, q_1, q_2]^r = 1$, откуда $a^r \in Z_2(Q)$. Следовательно, $Q/Z_2(Q)$ — элементарная абелева группа. Как утверждается в [1], V является единственным $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модулем, который допускает элемент порядка 5 из $\overline{G}$, действующий без неподвижных точек. Таким образом, лемма 2.2 дает (vi). □

Лемма 3.3. *Пусть M_1–M_3 — максимальные подгруппы в Q, нормальные в G. Пусть $D = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ и $|Q : D| = r^{12}$. Тогда $D \leq Z_2(Q)$ и, в частности, $Q/Z_2(Q)$ является прямым произведением не более трех минимальных нормальных подгрупп из $G/Z_2(Q)$ порядка r^4.*

Доказательство. По лемме 3.2(ii) подгруппы M_1–M_3 имеют класс не выше 2. Таким образом, при $1 \leq i < j \leq 3$ имеем $[M_i \cap M_j, M_j] \leq M_j' \leq Z(M_j)$. Поскольку $Q = M_i M_j$, получаем

$$[M_i \cap M_j, Q] \leq [M_i \cap M_j, M_i][M_i \cap M_j, M_j] \leq Z(M_i)Z(M_j).$$

В частности,

$$[D, Q] \leq Z(M_1)Z(M_2) \cap Z(M_2)Z(M_3) \cap Z(M_1)Z(M_3).$$

Так как $|Q : D| = r^{12}$, то $M_1 \cap M_2 \not\leq M_3$. Следовательно, $Q = (M_1 \cap M_2)M_3$ и

$$M_1 = M_1 \cap (M_1 \cap M_2)M_3 = (M_1 \cap M_2)(M_1 \cap M_3).$$

Аналогично $M_2 = (M_1 \cap M_2)(M_2 \cap M_3)$, а потому

$$Q = M_1 M_2 = (M_1 \cap M_2)(M_2 \cap M_3)(M_1 \cap M_3).$$

Отсюда следует, что $[D, Q, Q]$ содержится в

$$[Z(M_1)Z(M_2) \cap Z(M_2)Z(M_3) \cap Z(M_1)Z(M_3), (M_1 \cap M_2)(M_2 \cap M_3)(M_1 \cap M_3)] = 1,$$

стало быть, $D \leq Z_2(Q)$.

Согласно лемме 3.2(v) $Q/Z_2(Q)$ элементарная абелева. Так как R имеет класс три и $Q \trianglelefteq G$, видим, что $[Q, R] \leq R' \cap Q \leq Z_2(R) \cap Q \leq Z_2(Q)$, откуда $Q/Z_2(Q)$ централизуется R, а потому ввиду леммы 3.2(vi) $Q/Z_2(Q)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп из $G/Z_2(Q)$. Если существуют по крайней мере три минимальные нормальные подгруппы из $G/Z_2(G)$ в данном произведении, то их существует точно три по первой части леммы. Это завершает доказательство. □

Оставшаяся часть доказательства организована в виде последовательности утверждений.

(3.3.1) *Пусть M — нормальная подгруппа в Q такая, что $M/Z_2(Q)$ является минимальной нормальной подгруппой в $G/Z_2(Q)$. Тогда $M' \leq Z(Q)$. В частности, $|Q/Z_2(Q)| > r^4$.*

Имеем $|M/Z_2(Q)| = r^4$ по предположению. Поскольку $Z_2(Q)' \leq Q' \cap Z(Q)$ и $Q'/(Z(Q) \cap Q')$ элементарная абелева по лемме 3.2(iv), коммутаторное отображение определяет $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модульный гомоморфизм из $M/Z_2(Q) \otimes M/Z_2(Q)$

в $Q'/(Q' \cap Z(Q))$, который определен корректно ввиду того, что $[Q, Z_2(Q)] \leq Q' \cap Z(Q)$. Так как $[a,b] = [b,a]^{-1}$ для всех $a, b \in Q$, это отображение факторизуется посредством $(M/Z_2(Q)) \wedge (M/Z_2(Q))$. Но $(M/Z_2(Q)) \wedge (M/Z_2(Q))$ не имеет 4-мерных факторов по лемме 2.1, а потому коммутаторное отображение тривиально. Следовательно, $M' \leq Z(Q) \cap Q'$, как и утверждалось. Если $|Q/Z_2(Q)| = r^4$, то можно взять $M = Q$ и заключить, что Q имеет класс два, что абсурдно. $\square$

Определим одновременно базисы для всех G-композиционных факторов Q следующим образом. Пусть U такой фактор. Тогда существует изоморфизм ψ_U из U в V. При $1 \leq i \leq 4$ положим $u_i = (v_i)\psi_U^{-1}$. Назовем этот базис *стандартным базисом* U. Если дан стандартный базис $u_1, \ldots, u_4$, то определим $\sigma_u = u_1u_2u_3u_4$. Предположим, что R, S и T — G-композиционные факторы со стандартными базисами $r_1, \ldots, r_4$ и $s_1, \ldots, s_4$. Определим отображение из $R \otimes S$ в T, полагая

$$r_i \otimes s_j \mapsto (r_i\psi_R \otimes s_j\psi_S)\gamma\psi_T^{-1}$$

для всех $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$. Определим образ $r_i \otimes s_j$ в T, представленный в стандартном базисе T, ориентируясь на таблицу, описывающую γ. Тогда, к примеру, $r_1 \otimes s_2$ отображается в σ_t, а $r_1 \otimes s_1$ в $\sigma_t^2 t_1^{-5}$. Заменяя γ скалярным кратным $m\gamma$, получаем, что $r_1 \otimes s_1$ отображается в $\left(\sigma_t^2 t_1^{-5}\right)^m$.

Будем использовать тождество Холла — Витта [5, лемма 5.6.1(iv)], которое в группе класса три такой, как Q, имеет вид

$$[x, y, z][y, z, x][z, x, y] = 1$$

для всех $x, y, z \in Q$.

(3.3.2) $|Q/Z_2(Q)| = r^{12}$.

Так как $|Q/Z_2(Q)| > r^4$ по (3.3.1), достаточно исключить случай, когда $|Q/Z_2(Q)| = r^8$. Следовательно, предположим, что $|Q/Z_2(Q)| = r^8$. Пусть M_1 и M_2 — нормальные подгруппы в G такие, что $Q = M_1M_2$, а $C := M_1/Z_2(Q)$ и $D := M_2/Z_2(Q)$ имеют порядок r^4. Выберем стандартные базисы $c_1, \ldots, c_4$ для C и $d_1, \ldots, d_4$ для D. Тогда, как и в (3.3.1), коммутаторное отображение определяет $\mathrm{GF}(r)\overline{G}$-модульный гомоморфизм из $C \otimes D$ в $Q'/(Q' \cap Z(Q))$. Если это отображение тривиально, то $[M_1, M_2] \leq Q' \cap Z(Q)$, а (3.3.1) влечет $Q' \leq Z(Q)$, что невозможно. По леммам 2.5 и 3.2(vi) образ этого коммутаторного отображения 4-мерный и изоморфен V. Обозначим этот образ через E и возьмем стандартный базис $e_1, \ldots, e_4$ такой, что коммутаторное отображение определяется посредством γ. Наконец, можно предполагать, что $\Gamma_2(Q) = [M_1, M_2, M_2]$. Возьмем стандартный базис $f_1, \ldots, f_4$ снова так, что γ представляет коммутаторное отображение из $E \otimes D$ в $\Gamma_2(Q)$. Рассмотрим тождество Холла — Витта с элементами c_1, d_1 и d_2 (здесь важно заметить, что тождество не зависит от представителей для c_1, d_1 и d_2, которые мы выбираем). Имеем $[d_1, d_2] \in Z(Q)$ по (3.3.1), а потому $[d_1, d_2, c_1] = 1$. Вычисляя коммутаторы и используя отображение γ, получаем

$$\begin{aligned}[c_1, d_1, d_2] &= \left[(c_1\psi_C \otimes d_1\psi_D)\gamma\psi_E^{-1}, d_2\right] \\ &= \left[\sigma_e^2 e_1^{-5}, d_2\right] = \left(\sigma_e^2 e_1^{-5}\psi_E \otimes d_2\psi_D\right)\gamma\psi_F^{-1} = \sigma_f^5 f_2^{-10}\end{aligned}$$

и аналогично

$$[d_2, c_1, d_1] = [\sigma_e, d_1] = \sigma_f^5 f_1^{-5},$$

что противоречиво, так как их произведение не является единицей. Таким образом, $|Q/Z_2(Q)| = r^{12}$. $\square$

Из (3.3.2) имеем $|Q/Z_2(Q)| = r^{12}$. Пусть M_1–M_3 — нормальные подгруппы в G такие, что $Q = M_1M_2M_3$, а $C := M_1/Z_2(Q)$, $D := M_2/Z_2(Q)$ и $E := M_3/Z_2(Q)$ имеют порядок r^4. Выберем стандартные базисы $c_1, \dots, c_4$, $d_1, \dots, d_4$ и $e_1, \dots, e_4$ для C, D и E, как описано. Поскольку $M_i' \le Z(Q)$ по (3.3.1), можем предполагать, что $F := [M_1, M_2](Q' \cap Z(Q))/(Q' \cap Z(Q))$ нетривиальна. Положим

$$H := [M_1, M_3](Q' \cap Z(Q))/(Q' \cap Z(Q)), \quad J := [M_2, M_3](Q' \cap Z(Q))/(Q' \cap Z(Q)).$$

Эти группы могут быть тривиальными. Пусть $f_1, \dots, f_4$ — стандартный базис для F, а когда H или J нетривиальна, возьмем стандартные базисы $h_1, \dots, h_4$ и $j_1, \dots, j_4$ для H и J соответственно, где все базисы выбраны так, что коммутаторное отображение представлено отображением γ. Пусть $k_1, \dots, k_4$ — стандартный базис для $\Gamma_2(Q)$. Заметим, что базис $k_1, \dots, k_4$ не может быть обязательно выбран так, что всевозможные коммутаторные отображения представлены γ. Однако они представлены скалярными кратными γ, а степени, появляющиеся в образах далее, не влияют на невыполнение тождества Холла — Витта, которое продолжаем проверять для элементов c_1, d_1 и e_2. Выбирая все коммутаторные отображения равными γ, получаем

$$[c_1, d_1, e_2] = \left[\sigma_f^2 f_1^{-5}, e_2\right] = \sigma_k^5 k_2^{-10},$$

$$[d_1, e_2, c_1] = \begin{cases} 1, & J = 1, \\ [\sigma_j, c_1] = \sigma_k^5 k_1^{-5} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$[e_2, c_1, d_1] = \begin{cases} 1, & H = 1, \\ [\sigma_h, c_1] = \sigma_k^5 k_1^{-5} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и в полной общности образы лежат в циклических группах, порожденных представленными ранее элементами. Таким образом, тождество Холла — Витта не выполняется в Q. Это завершает доказательство теоремы.

4. Заключительные замечания

В данном разделе докажем, что если $E(G/F(G)) \cong \mathrm{PSL}_2(49)$, то $F(G)$ — элементарная абелева 7-группа. Также воспользуемся возможностью добавить более деталей к утверждению теоремы 1.1, показав, что абелева 3-группа из теоремы 1.1(iv) элементарная абелева.

Лемма 4.1. *Группа* $\mathrm{PSL}_2(49)$ *не изоморфна подгруппе из* $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})$.

Доказательство. Проводим расчеты, используя [6]. Пусть $J \cong \mathrm{PSL}_2(49)$, а J — подгруппа в $K = \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}/49\mathbb{Z})$. Тогда, так как J содержит подгруппу изоморфную $\mathrm{Alt}(5)$, можем снова взять целочисленную версию A в $\mathrm{Alt}(5)$ из разд. 2 и предположить, что это подгруппа в J. Далее, возьмем силовскую 5-подгруппу S в A и найдем $C_K(S)$ при помощи [6]. Она имеет порядок $2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^4$ и 5-замкнута. Положим $T \in \mathrm{Syl}_5(C_K(S))$. Тогда T — единственная подгруппа порядка 25 в K, содержащая S. Следовательно, $J = \langle A, T\rangle$, и вычисления показывают, что J имеет порядок $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^8$, но это приводит к противоречию, так как 7^8 не делит порядок $J \cong \mathrm{PSL}_2(49)$. Значит, $\mathrm{PSL}_2(49)$ не изоморфна подгруппе в K. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики 7, а V — неприводимый $k\,\mathrm{PSL}_2(49)$-модуль, который допускает элемент порядка 5 без неподвижных точек. Тогда V изоморфен $N \otimes N^\sigma$, где N — естественный $k\,\mathrm{SL}_2(49)$-модуль, а σ — автоморфизм k, полученный поднятием каждого элемента до его седьмой степени. Кроме того, V не является композиционным фактором в $V \otimes V$.*

Доказательство. По [7, § 30(98)] имеем $V = U \otimes W^\sigma$, где U и W — базисные $k\,\mathrm{SL}_2(49)$-модули. Базисные $k\,\mathrm{SL}_2(49)$-модули могут быть отождествлены с семью модулями U_j, $0 \leq j \leq 6$, полученными как степень j однородных многочленов из $k[x,y]$. Тогда $\dim U_j = j+1$. Далее, пусть ϕ из $\mathrm{SL}_2(49) \leq \mathrm{GL}_2(k)$ порядка 5. Тогда ϕ диагонализируемо в $\mathrm{GL}_2(k)$, а потому мы можем предполагать, что ϕ действует как диагональная матрица $\mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$. Непосредственно проверяется, что ϕ при $j \geq 3$ имеет всевозможные нетривиальные собственные значения на U_j, поэтому если U_j или U_j^σ появляется в тензорном произведении, определяющем V, то один из тензорных множителей в V должен быть U_0, так как ϕ действует без неподвижных точек на V. Но тогда $\dim U_j$ четна и видим, что V — модуль над $\mathrm{SL}_2(49)$, но не над $\mathrm{PSL}_2(49)$. Аналогично выводим, что единственными претендентами для V являются $U_1 \otimes U_1^\sigma$, $U_2 \otimes U_1^\sigma$ и $U_1 \otimes U_2^\sigma$. В последних двух случаях снова получаем представление $\mathrm{SL}_2(49)$, но не $\mathrm{PSL}_2(49)$, а это показывает, что единственной возможностью является $V = U_1 \otimes U_1^\sigma$; легко проверить, что этот модуль обладает требуемыми свойствами.

В итоге

$$\begin{aligned} V \otimes V = (U_1 \otimes U_1^\sigma) \otimes (U_1 \otimes U_1^\sigma) &= (U_1 \otimes U_1) \otimes (U_1^\sigma \otimes U_1^\sigma) \\ &= (U_0 \oplus U_2) \otimes (U_0^\sigma \oplus U_2^\sigma) = U_0 \oplus U_2^\sigma \oplus U_2 \oplus (U_2 \otimes U_2^\sigma) \end{aligned}$$

и ни одно из этих неприводимых слагаемых не изоморфно V. □

Лемма 4.3. *Любой* $\mathrm{GF}(7)\,\mathrm{PSL}_2(49)$*-модуль, который имеет все композиционные факторы изоморфными модулю из леммы* 4.2, *является вполне приводимым.*

Доказательство. Вычисления при помощи [6] показывают, что

$$\mathrm{Ext}^1_X(V,V) = \mathrm{H}^1(X, V \otimes V^*) = 0.$$

Это доказывает лемму. □

Лемма 4.4. *Пусть r — простое число, а G — группа такая, что $X := G/O_r(G) \cong \mathrm{PSL}_2(49)$ и G имеет элемент порядка 5, действующий без неподвижных точек на $O_r(G)$. Тогда $r = 7$ и $O_7(G)$ — элементарная абелева группа, которая вполне приводима как $\mathrm{GF}(7)X$-модуль.*

Доказательство. Пусть $Q := O_r(G)$. Согласно [1] можем предполагать, что $r = 7$ и Q является 7-группой.

Предположим сначала, что Q абелева, но не является элементарной абелевой, а также что G имеет минимальный порядок среди групп с таким свойством. Любой G-главный фактор Q изоморфен неприводимому 4-мерному модулю V в X из леммы 4.2. Пусть N — минимальная G-инвариантная подгруппа в Q. Тогда N имеет порядок 7^4 и Q/N элементарная абелева. Так как любая максимальная G-инвариантная подгруппа также является элементарной абелевой группой, делаем вывод, что Q имеет единственную такую подгруппу. По лемме 4.3 Q/N вполне приводима. Следовательно, Q/N имеет порядок 7^4 и Q

гомоциклична порядка 49^4; противоречие с леммой 4.1. Таким образом, если Q абелева, то она элементарная абелева и вполне приводима как $\mathrm{GF}(7)X$-модуль.

Чтобы получить противоречие, предположим, что G выбрана так, что Q — группа класса два минимального порядка. Таким образом, Q' — элементарная абелева порядка 7^4 и Q/Q' также элементарная абелева по разд. 3. Дополнительно можно предполагать, что $Q' = Z(Q)$, поскольку $Z(Q)$ вполне приводим как $\mathrm{GF}(7)X$-модуль. Так как коммутаторное отображение из $Q/Z(Q) \times Q/Z(Q)$ определяет $\mathrm{GF}(r)X$-модульный эпиморфизм из $Q/Z(Q) \otimes Q/Z(Q)$ в $Q' = Z(Q)$, а $V \otimes V$ не имеет факторов, изоморфных V по лемме 4.2; получаем противоречие. Это доказывает лемму. $\square$

Лемма 4.5. *Группа* $\mathrm{Alt}(6)$ *не изоморфна подгруппе в* $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$.

Доказательство. Возьмем целочисленную копию $A \cong \mathrm{Alt}(5)$ из разд. 2 и посчитаем нормализатор N силовской 2-подгруппы, используя [6]. Он имеет порядок 7776. Ни одна из групп $\langle A, x\rangle$, $x \in N$, не изоморфна $\mathrm{Alt}(6)$. $\square$

По леммам 2.2 и 4.5 можно доказать нашу версию теоремы 1.1(iv), используя рассуждения, аналогичные использованным в окончании доказательства леммы 4.4.

Лемма 4.6. *Если* $\mathrm{Alt}(6)$ *действует на абелеву* 3*-группу* Q *элементом порядка* 5 *без неподвижных точек, то* Q *является элементарной абелевой и вполне приводимой как* $\mathrm{GF}(3)\,\mathrm{Alt}(6)$*-модуль.* $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М. С.* C55-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
2. *Holt D. F., Plesken W.* A_5-invariant 2-groups with no trivial sections // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1986. V. 37, N 145. P. 39–47.
3. *Benson D. J.* Representations and cohomology. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. (Cambr. Stud. Adv. Math.).
4. *Prince A. R.* On 2-groups admitting A_5 or A_6 with an element of order 5 acting fixed point freely // J. Algebra. 1977. V. 49, N 2. P. 374–386.
5. *Gorenstein D.* Finite groups. New York; London: Harper & Row, Publ., 1968.
6. *Bosma W., Cannon J, Playoust C.* The Magma algebra system. I. The user language // J. Symbolic Comput. 1997. V. 24, N 3–4. P. 235–265. (Computational algebra and number theory. London, 1993).
7. *Brauer R., Nesbitt C.* On the modular characters of groups // Ann. Math. 1941. V. 42, N 2. P. 556–590.

Статья поступила 22 марта 2011 г.

Sarah Astill (Астилл Сара)
Department of Mathematics
The University of Bristol
University Walk, Bristol BS8 1TW, United Kingdom
sarah.j.astill@gmail.com

Chris Parker (Паркер Крис)
School of Mathematics, University of Birmingham
Edgbaston, Birmingham B15 2TT, United Kingdom
c.w.parker@bham.ac.uk

Rebecca Waldecker (Валдекер Ребекка)
Institut für Mathematik, Universität Halle–Wittenberg,
Theodor–Lieser–Str. 5, 06120 Halle, Germany
rebecca.waldecker@mathematik.uni-halle.de