Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 512.54

О ГРУППАХ УНИТРЕУГОЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ ГРУПП

С. Ю. Ерофеев, В. А. Романьков

Аннотация. Дано описание структуры группы унитреугольных автоморфизмов U_n относительно свободной группы G_n конечного ранга n произвольного многообразия групп $\mathscr{C}$, позволяющее ввести эффективное понятие нормальной формы элемента и представить группу U_n через порождающие элементы и определяющие соотношения. Случаи $n = 1, 2$ очевидны: группа U_1 тривиальна, группа U_2 циклическая. При $n \geq 3$ доказано следующее. Если группа G_{n-1} нильпотентна, то группа унитреугольных автоморфизмов U_n также нильпотентна. Если группа G_{n-1} почти нильпотентна, то группа U_n допускает точное представление матрицами. Если же многообразие $\mathscr{C}$ отлично от многообразия всех групп и группа G_{n-1} не почти нильпотентна, то группа U_n не допускает точного представления матрицами ни над каким полем. Таким образом, дана исчерпывающая классификация точной матричной представимости групп унитреугольных автоморфизмов относительно свободных групп конечного ранга собственных многообразий групп, что дополняет известные результаты Ольшанского о точной матричной представимости полных групп автоморфизмов $\operatorname{Aut} G_n$. Также введено понятие длины автоморфизма произвольной относительно свободной группы G_n и дана оценка длины обратного автоморфизма в случае его унитреугольности.

Ключевые слова: относительно свободная группа, унитреугольный автоморфизм, представление матрицами, длина автоморфизма.

1. Введение

Для любого положительного числа n обозначим через F_n свободную группу ранга n с базисом (другими словами, множеством свободных порождающих элементов) $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Через $F_{\aleph_0}$ обозначим свободную группу бесконечного счетного ранга с базисом $X_{\aleph_0} = \{x_1, x_2, \dots\}$. При $n < m$ группа F_n естественно вложена в группу F_m, группа $F_{\aleph_0}$ рассматривается как объединение $F_{\aleph_0} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Для любого многообразия групп $\mathscr{C}$ через $\mathscr{C}(F_n)$ обозначим вербальную подгруппу группы F_n, состоящую из всех тождеств от n переменных $x_1, \dots, x_n$, выполненных на многообразии $\mathscr{C}$. Аналогично определяется подгруппа $\mathscr{C}(F_{\aleph_0}) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}(F_n)$ группы $F_{\aleph_0}$, состоящая из всех тождеств многообразия $\mathscr{C}$ без ограничения на число переменных. Напоминаем, что элемент $w = w(x_1, \dots, x_n)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10.01.00383–a).

группы F_n называется *тождеством* многообразия $\mathscr{C}$, если для любой группы G из $\mathscr{C}$ и любого гомоморфизма группы F_n в группу G образ элемента w равен 1 в G. Это означает, что для любого набора элементов $g_1, \dots, g_n$ группы G справедливо равенство $w(g_1, \dots, g_n) = 1$.

Пусть $F_n(\mathscr{C}) = F_n/\mathscr{C}(F_n)$. Тогда $F_n(\mathscr{C})$ является *относительно свободной* группой ранга n многообразия $\mathscr{C}$. *Базисом* группы $F_n(\mathscr{C})$ называем такое подмножество $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$, что всякое отображение его в группу G многообразия $\mathscr{C}$ однозначно продолжается до гомоморфизма группы $F_n(\mathscr{C})$ в группу G. Полагая $y_i = x_i\mathscr{C}(F_n)$, получаем *стандартный базис* $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ группы $F_n(\mathscr{C})$. Стандартный базис позволяет рассматривать для $n < m$ группу $F_n(\mathscr{C})$ в качестве подгруппы группы $F_m(\mathscr{C})$. Аналогичные утверждения справедливы также для группы $F_{\aleph_0}(\mathscr{C}) = F_{\aleph_0}/\mathscr{C}(F_{\aleph_0})$ — относительно свободной группы бесконечного счетного ранга многообразия $\mathscr{C}$. Основные понятия и факты теории многообразий групп можно найти в монографии Нейман [1].

Группам автоморфизмов относительно свободных групп как конечных, так и бесконечного рангов посвящено немало работ (см., например, обзоры [2–4]).

Пусть G — группа. Через $\operatorname{Aut} G$ обозначаем ее группу автоморфизмов. Пусть $G_n = F_n(\mathscr{C})$ — относительно свободная группа ранга n многообразия групп $\mathscr{C}$ с базисом $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$. Как и раньше, при $n < m$ группа G_n рассматривается в качестве подгруппы группы G_m.

В настоящей работе определяем естественную подгруппу $UT \operatorname{Aut} G_n$ группы $\operatorname{Aut} G_n$, которую называем *группой унитреугольных автоморфизмов*. Нас интересует вопрос о ее структуре и точной представимости матрицами над полем, т. е. линейности. Также вводим естественное понятие длины автоморфизма и рассматриваем вопрос оценки длины обратного автоморфизма через длину данного автоморфизма. Перейдем к определениям.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольное многообразие групп, G_n — свободная группа многообразия $\mathscr{C}$ с фиксированным базисом $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$. *Унитреугольным автоморфизмом* группы G_n относительно базиса Y_n называется любой автоморфизм φ, задаваемый отображением вида

$$\varphi : y_1 \mapsto y_1, \quad y_i \mapsto u_i y_i \ \text{ для } i = 2, \dots, n, \tag{1}$$

где $u_i = u_i(y_1, \dots, y_{i-1})$ — произвольный элемент группы G_{i-1}. Любой набор элементов $(u_2, \dots, u_n) \in G_1 \times \dots \times G_{n-1}$ определяет автоморфизм φ группы G_n. Все унитреугольные автоморфизмы группы G_n образуют подгруппу $UT \operatorname{Aut} G_n$, которую называем *группой унитреугольных автоморфизмов* группы G_n. Для упрощения записи обозначим ее через U_n. Легко видеть, что с точностью до изоморфизма группа U_n не зависит от выбора базиса Y_n.

Нас интересуют структура группы U_n и вопрос о линейности, т. е. точной представимости матрицами над полем, групп унитреугольных автоморфизмов относительно свободных групп многообразий. Кроме того, вводим естественное понятие длины $l(\varphi)$ автоморфизма φ группы G_n, полагая

$$l(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(y_i)|, \tag{2}$$

где $|g|$ означает наименьшую длину записи элемента g группы G_n в базисе Y_n, и рассматриваем вопрос о возможных оценках длины обратного автоморфизма φ^{-1} через длину автоморфизма φ.

Структура группы U_n для произвольного многообразия групп $\mathscr{C}$ и полная классификация случаев ее матричной представимости для любого многообразия групп, отличного от многообразия всех групп, даны в разд. 2. Разд. 3 посвящен оценке длины обратного автоморфизма через длину данного автоморфизма некоторых относительно свободных групп в случае, когда эти автоморфизмы унитреугольные.

Отметим известные результаты о линейности групп автоморфизмов и их подгрупп относительно свободных групп конечного ранга. *Почти нильпотентной* называется группа, допускающая нильпотентную подгруппу конечного индекса.

Крамер в [5] доказал линейность группы $\operatorname{Aut} F_2$. Форманек и Прочези в [6] показали, что при $n \geq 3$ группа $\operatorname{Aut} F_n$ не линейна. Ауслендер и Баумслаг в [7] доказали, что группа автоморфизмов любой конечно порожденной почти нильпотентной группы линейна. Более того, голоморф такой группы (значит, и ее группа автоморфизмов) допускает точное представление матрицами над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Отсюда следует, в частности, что группы автоморфизмов относительно свободных групп конечного ранга почти нильпотентных многообразий групп допускают точное представление матрицами. А. Ю. Ольшанский в [8] доказал, что если относительно свободная группа G_n не свободна и не почти нильпотентна, то ее группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G_n$ не линейна.

Заметим также, что группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} G_{\aleph_0}$ для любого нетривиального многообразия $\mathscr{C}$ содержит подгруппу, определяемую всеми подстановками бесконечного счетного множества свободных порождающих $Y_{\aleph_0}$, которая изоморфна группе подстановок $S_{\aleph_0}$. Последняя, как хорошо известно, не линейна.

В доказательстве А. Ю. Ольшанского основного результата [8], отмеченного выше, использованы следующие соображения. Для произвольной группы G определен гомоморфизм $\sigma : G \to \operatorname{Aut} G$, сопоставляющий элементу g внутренний автоморфизм $\sigma_g : f \mapsto gfg^{-1}$. Ядром гомоморфизма σ является центр $C(G)$ группы G, а образом — группа $\operatorname{Inn} G$ внутренних автоморфизмов группы G. Последняя нормальна в $\operatorname{Aut} G$. Это означает, что фактор-группа $G/C(G) \simeq \operatorname{Inn} G$ может рассматриваться как нормальная подгруппа группы $\operatorname{Aut} G$. В [8] показано, что в случае не свободной и не почти нильпотентной относительно свободной группы G_n существует такой автоморфизм θ группы G_n, что расширение P группы $G_n/C(G_n)$ посредством θ не линейно. Выбор θ осуществлялся таким образом, что индуцируемое им линейное преобразование абеализации $(G_n)_{ab} = G_n/G_n'$, которая в данном случае при предположении о линейности группы $\operatorname{Aut} G_n$ есть свободная абелева группа ранга n, не имело в качестве характеристических чисел корни из 1. Заметим, что автоморфизм θ заведомо не унитреуголен, так как все характеристические числа равны 1. Группа $\operatorname{Inn} G_n \simeq G_n/C(G_n)$ также не состоит из унитреугольных автоморфизмов. Таким образом, результат Ольшанского и примененный им способ доказательства не дают информации о возможной линейности группы $U_n = UT \operatorname{Aut} G_n$. Кроме того, в [8] использована теорема из [9], по которой любое (не обязательно точное) представление матрицами над полем группы $\operatorname{Aut} M_n$ автоморфизмов свободной метабелевой группы M_n ранга n переводит группу $M_n \simeq \operatorname{Inn} M_n$ в почти нильпотентную подгруппу. При доказательстве наших результатов, формулируемых ниже, данная теорема не применяется. В [8] отмечалось, что близкие по формулировке результаты содержатся в [10, 11]. Однако обе работы содержат неточности в формулировках и существенные ошибки в доказательствах.

Как обычно, для произвольной группы G через $(g,f) = gfg^{-1}f^{-1}$ обозначим коммутатор ее элементов g, f.

Получим следующее структурное описание группы $U_n = UT\operatorname{Aut} G_n$ относительно свободной группы $G_n = F_n(\mathscr{C})$ произвольного многообразия $\mathscr{C}$.

Теорема A. *Пусть G_n — относительно свободная группа ранга $n \geq 2$ произвольного многообразия групп $\mathscr{C}$. Тогда группа $U_n = UT\operatorname{Aut} G_n$ унитреугольных автоморфизмов группы G_n допускает нормальный ряд*

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq \cdots \leq N_{n-1} = U_n, \tag{3}$$

в котором факторы изоморфны относительно свободным группам многообразия $\mathscr{C}$, а именно

$$N_i/N_{i-1} \simeq G_{n-i} \quad \text{для } i = 1, \dots, n-1. \tag{4}$$

Более того, факторы данного ряда отщепляются, поэтому группа U_n есть произведение непересекающихся подгрупп

$$U_n = U_n^{(n)} \cdot \ldots \cdot U_n^{(2)} \simeq G_{n-1} \cdot \ldots \cdot G_1, \tag{5}$$

где подгруппа $U_n^{(i)} \simeq G_{i-1}$ состоит из однострочных унитреугольных автоморфизмов, соответствующих y_i, т. е. унитреугольных автоморфизмов, тождественных на всех базисных элементах y_l, кроме, возможно, y_i. В частности, группа U_n принадлежит многообразию $\mathscr{C}^{n-1}$.

Согласно (5) любой элемент g группы U_n допускает однозначную запись

$$g = g_n \ldots g_2, \tag{6}$$

в которой $g_i \in U_n^{(i)}$. Запись (6) можно рассматривать как нормальную форму элемента g.

Базисом группы $U_n^{(i)} \simeq G_{i-1}$ при $i = 2, \dots, n$ является множество автоморфизмов $\Lambda_i = \{\lambda_{i,j},\ j = 1, \dots, i-1\}$, где по определению $\lambda_{i,j}(y_i) = y_j y_i$. Группа U_n порождена множеством элементов $\Lambda = \bigcup\limits_{i=2}^{n} \Lambda_i$.

Непосредственно выводятся следующие формулы:

$$(\lambda_{i,j}, \lambda_{j,l}) = \lambda_{i,l}, \quad i = 2, \dots, n;\ j = 1, \dots, i-1;\ l = 1, \dots, j-1. \tag{7}$$

$$(\lambda_{i,j}, \lambda_{k,l}) = 1, \quad i,k = 2, \dots, n,\ i \neq k;\ j = 1, \dots, i-1,\ j \neq k;\ l = 1, \dots, k-1,\ i \neq l.$$

Формулы (7), очевидно, дают возможность эффективного приведения любого элемента g группы U_n, записанного в виде группового слова от порождающих элементов из Λ, к его нормальной форме (6).

Из структурного описания группы U_n следует, что ее определяющие соотношения для множества порождающих элементов Λ получаются, если к определяющим соотношениям групп $U_n^{(i)}$ для множества порождающих элементов Λ_i, которые соответствуют определяющим соотношениям групп G_{i-1} для $i = n, \dots, 2$, добавить соотношения (7).

Теорема B. *Пусть G_n — относительно свободная группа ранга $n \geq 2$ произвольного многообразия групп $\mathscr{C}$. Тогда верны следующие утверждения.*

Группа U_1 тривиальна, группа U_2 циклическая порядка, равного экспоненте многообразия $\mathscr{C}$. Эти группы допускают точное представление матрицами.

При $n \geq 3$ если группа G_{n-1} нильпотентна, то и группа U_n нильпотентна.

Почти нильпотентность группы G_{n-1} влечет существование точной матричной представимости группы U_n над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Основным результатом данной статьи о точной матричной представимости (точнее, непредставимости) групп унитреугольных автоморфизмов относительно свободных групп собственных многообразий групп является

Теорема C. *Пусть G_n — относительно свободная группа ранга $n \geq 3$ произвольного нетривиального многообразия $\mathscr{C}$ групп, отличного от многообразия всех групп. Тогда если группа G_{n-1} не почти нильпотентна, то группа $U_n = UT\operatorname{Aut}G_n$ унитреугольных автоморфизмов группы G_n не допускает точного представления матрицами над полем.*

Таким образом, утверждения теорем B и C дают исчерпывающую информацию о линейности групп унитреугольных автоморфизмов относительно свободных групп конечного ранга собственных многообразий групп. А именно, группа U_n допускает точное представление матрицами над полем тогда и только тогда, когда группа G_{n-1} почти нильпотентна.

Отметим, что группа унитреугольных автоморфизмов имеет свой естественный аналог в группе ручных автоморфизмов относительно свободных алгебр. Приведем соответствующие определения. Пусть B_n — произвольная свободная алгебра ранга n с множеством $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ свободных порождающих над полем K. *Элементарным автоморфизмом* алгебры B_n называется автоморфизм вида

$$\tau_j(u_j, \alpha) : x_j \mapsto \alpha x_j + u_j,\ x_l \mapsto x_l \ \text{ для } l \neq j, \tag{8}$$

где u_j принадлежит подалгебре, порожденной $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$, $\alpha \in K^* = K \setminus \{0\}$. Автоморфизм τ называется *ручным*, если он принадлежит подгруппе $T\operatorname{Aut}B_n$, порожденной в группе ее автоморфизмов $\operatorname{Aut}B_n$ всеми элементарными автоморфизмами. Соответственно $T\operatorname{Aut}B_n$ называется *группой ручных автоморфизмов* алгебры B_n. Группа $T\operatorname{Aut}B_n$ содержит подгруппу $U_n = UT\operatorname{Aut}B_n$, порожденную автоморфизмами вида (8) при $\alpha = 1$, где u_j принадлежит подалгебре, порожденной $x_1, \dots, x_{j-1}$, и не имеет свободного члена. Эта подгруппа U_n называется *группой унитреугольных автоморфизмов* алгебры B_n. Иногда ее еще называют *подгруппой Бореля*. Легко видеть, что группа U_n состоит из всех автоморфизмов вида

$$\tau(u_2, \dots, u_n) : x_1 \mapsto x_1,\ x_j \mapsto x_j + u_j, \quad j = 2, \dots, n, \tag{9}$$

где u_j принадлежит подалгебре, порожденной $x_1, \dots, x_{j-1}$.

В [12] доказано, что группы унитреугольных автоморфизмов свободной алгебры Ли (свободной ассоциативной алгебры, абсолютно свободной алгебры, алгебры многочленов) ранга $n \geq 4$ над полем нулевой характеристики не допускают точного представления матрицами ни над каким полем. В последовавшей затем работе [13] дано описание гиперцентрального ряда группы унитреугольных автоморфизмов алгебры многочленов, а в [14] аналогичное описание получено для свободной метабелевой алгебры Ли. Из этих описаний также вытекает нелинейность групп унитреугольных автоморфизмов рассматриваемых алгебр при $n \geq 3$. В [15] доказана теорема о строении групп унитреугольных автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры и алгебры многочленов, аналогичная теореме A.

Относительно длины автоморфизмов получены следующие результаты.

Теорема D. *Пусть A_n — свободная абелева группа ранга n. Тогда для любого автоморфизма $\varphi \in \operatorname{Aut} A_n$ выполнено неравенство $l(\varphi^{-1}) \leq l(\varphi)^{n-1}$, причем степень $n-1$ понизить нельзя.*

Пусть F_n — абсолютно свободная группа ранга n. Тогда для любого унитреугольного автоморфизма $\varphi \in U \operatorname{Aut} F_n$ выполнено неравенство $l(\varphi^{-1}) \leq l(\varphi)^{n-1}$, причем степень $n-1$ понизить нельзя.

2. О структуре и матричной представимости групп $U_n = UT \operatorname{Aut} G_n$

Доказательство теоремы A. Считаем, что при $m < n$ группа U_m естественно вложена в группу U_n (на элементах $y_1, \dots, y_m$ группа U_m определена, элементы $y_{m+1}, \dots, y_n$ при действии U_m по определению остаются неподвижными).

Сначала заметим, что для любого $i = 1, \dots, n$ подгруппа $U_n^{(i)}$ изоморфна группе G_{i-1}.

Очевидно, что $U_n^{(1)} = 1$. Пусть $i \geq 2$. Для любого элемента g группы G_{i-1} обозначим через $\lambda_{i,g}$ унитреугольный однострочный автоморфизм из подгруппы $U_n^{(i)}$, отображающий y_i в gy_i. Легко видеть, что отображение $g \mapsto \lambda_{i,g}$ является изоморфным отображением группы G_{i-1} на группу $U_n^{(i)}$. Также очевидно, что группа $U_n^{(i)}$ относительно свободно порождена автоморфизмами, соответствующими элементам $y_1, \dots, y_{i-1}$. Упрощая запись, полагаем $\lambda_{i,l} = \lambda_{i,y_l}$ для $l = 1, \dots, i-1$. Тогда $U_n^{(i)} = \langle \Lambda_i \rangle = \langle \lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,i-1} \rangle$ для $i = 2, \dots, n$.

Пусть φ — произвольный унитреугольный автоморфизм группы G_n, заданный отображением (1). Определим однострочный унитреугольный автоморфизм $\varphi_n^{-1} \in U_n^{(n)}$, полагая

$$\varphi_n^{-1}(y_n) = \varphi^{-1}(y_n) = (\varphi^{-1}(u_n))^{-1} y_n.$$

Тогда $\varphi_n^{-1}\varphi(y_n) = y_n$, следовательно, $\varphi_n^{-1}\varphi \in U_{n-1}$. Более того, полученный автоморфизм совпадает на G_{n-1} с автоморфизмом φ. Продолжая последовательно домножать на однострочные автоморфизмы $\varphi_{n-1}^{-1}, \dots, \varphi_2^{-1}$, определенные аналогичным образом, получим равенство

$$\varphi_2^{-1} \dots \varphi_n^{-1} \varphi = \mathrm{id}, \tag{10}$$

равносильное требуемому равенству

$$\varphi = \varphi_n \dots \varphi_2. \tag{11}$$

Легко видеть, что полученная запись единственна. Также очевидно, что для любого $i = 1, \dots, n-1$ подгруппа $N_i = U_n^{(n)} \dots U_n^{(n-i+1)}$ для $i = 1, \dots, n-1$ нормальна в группе U_n и факторы полученного ряда (3) удовлетворяют (4). Как замечено выше, $U_n^{(i)} \simeq G_{i-1}$, что дает, в частности, (5). Группа U_n порождена множеством $\Lambda = \bigcup\limits_{i=2}^{n} \Lambda_i$. Формулы (7) дают возможность эффективного приведения любого элемента g группы U_n, записанного в виде группового слова от порождающих элементов из Λ, к его нормальной форме (6). Отсюда следует, что определяющие соотношения группы U_n для множества порождающих элементов Λ получаются, если к определяющим соотношениям групп $U_n^{(i)}$ для множества порождающих элементов Λ_i, которые соответствуют определяющим соотношениям групп G_{i-1} для $i = n, \dots, 2$, добавить соотношения (7).

Теорема A доказана.

Доказательство теоремы B. Предположим, что группа G_{n-1} нильпотентна ступени c. По индукции можно считать, что уже установлена нильпотентность группы U_{n-1}. Чтобы доказать нильпотентность группы U_n, достаточно построить центральный ряд, доходящий от тривиальной подгруппы до нормальной подгруппы $U_n^{(n)} \simeq G_{n-1}$.

Пусть $\gamma_{c-1}U_n^{(n)}$ — последний неединичный член нижнего центрального ряда группы $U_n^{(n)}$. По любому вектору $v = (v_{n-1}, \dots, v_1)$ с координатами, принимающими значения $0, \dots, c-2$, определим подгруппу C_v группы $U_n^{(n)}$, элементы которой записываются как произведения коммутаторов веса $c-1$ от порождающих из Λ_n таких, что в каждом из них порождающий $\lambda_{n,j}$ для $j = 1, \dots, n-1$ имеет не более чем v_j вхождений. Векторы v образуют множество V, элементы которого упорядочены по возрастанию лексикографически: от $v_0 = (0, \dots, 0) < (0, \dots, 0, 1)$ до $v_{\max} = (c-1, \dots, c-1)$. Соответствующие подгруппы упорядочены по возрастанию от тривиальной до $C_{v_{\max}} = \gamma_{c-1}U_n^{(n)}$. Соотношения (7) вместе с соотношениями группы $U_n^{(n)}$ показывают, что этот ряд является центральным нормальным рядом. Далее факторизуем группу $U_n^{(n)}$ по подгруппе $C_{v_{\max}}$ и продолжаем строить центральный ряд аналогичным образом. В итоге дойдем до подгруппы $U_n^{(n)}$, что с использованием индукционного предположения завершает доказательство нильпотентности группы U_n.

Пусть группа G_{n-1} почти нильпотентна. Обозначим через $\mathscr{C}_{n-1}$ многообразие групп, порожденное группой G_{n-1}. Многообразие $\mathscr{C}_{n-1}$ будет почти нильпотентным. Группа U_n, очевидно, изоморфна группе унитреугольных автоморфизмов $\widetilde{U}_n$ относительно свободной группы $\widetilde{G}_n$ ранга n многообразия $\mathscr{C}_{n-1}$. По теореме Ауслендера — Баумслага [7] группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}\widetilde{G}_n$ допускает точное представление матрицами над $\mathbb{Z}$. Значит, группа U_n допускает точное представление матрицами над $\mathbb{Z}$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы C. Предположим, что при $n \geq 3$ группа U_n изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL_m(k)$ над некоторым полем k при некотором m. Так как группа G_{n-1} изоморфна по теореме A подгруппе $U_n^{(n)}$ группы U_n, она также линейна. Поскольку на группе G_{n-1} выполнено нетривиальное тождество многообразия $\mathscr{C}$, она не содержит свободной подгруппы F_2. Согласно знаменитой Альтернативе Титса [16] группа G_{n-1} почти разрешима. По теореме Гроувза [17] многообразие $\mathscr{C}_{n-1}$, порожденное группой G_{n-1} и являющееся по условию не почти нильпотентным, содержит многообразие вида $\mathscr{M}_p = \mathscr{A}_p\mathscr{A}$ для некоторого простого числа p, где $\mathscr{A}_p$ означает многообразие всех абелевых групп периода p, $\mathscr{A}$ — многообразие всех абелевых групп. Свободная группа $M_{n-1,p}$ этого многообразия ранга $n-1$ является гомоморфным образом группы G_{n-1}. Группа $U_{n,p}$ унитреугольных автоморфизмов группы $M_{n,p}$ индуцируется группой U_n. По классической теореме Колчина — Мальцева (см., например, [18, 19]) группа U_n содержит подгруппу конечного индекса H, коммутант которой нильпотентен. Мы можем предполагать, что H — нормальная подгруппа группы U_n. Но тогда группа $U_{n,p}$ также содержит нормальную подгруппу конечного индекса, коммутант которой нильпотентен. Покажем, что это не так. Переносим вычисления в группу $M_{n,p}$, чтобы упростить рассуждения. Предполагаем, что $G_{n-1} = M_{n-1,p}$, $U_n = U_{n-1,p}$.

Коммутант G'_{n-1} группы G_{n-1} является модулем над групповой алгеброй $\mathbb{Z}_p A_{n-1}$ свободной абелевой группы $A_{n-1} \simeq G_{n-1}/G'_{n-1}$, в котором действие элементов группы A_{n-1} индуцировано сопряжениями их прообразов в группе G_{n-1}. Через $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ обозначим естественные гомоморфные образы в группе A_{n-1} свободных порождающих $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ группы G_{n-1}. Они являются базисными элементами группы A_{n-1}. Заметим, что, как хорошо известно, ненулевые одномерные подмодули модуля G'_{n-1} свободны.

Остается доказать, что никакая степень группы U_n не имеет нильпотентного коммутанта. Возьмем автоморфизмы $\lambda_{n,n-1}, \lambda_{n-1,n-2}$ и следующий однострочный унитреугольный автоморфизм группы U_n:

$$\mu : y_n \mapsto (y_{n-1}, y_{n-2})y_n,\ y_l \mapsto y_l \ \text{ для } l \neq n. \tag{12}$$

Пусть l, k — произвольные натуральные числа. Непосредственно проверяется, что

$$\nu_{k,l} = \left(\lambda^k_{n,n-1}, \lambda^l_{n-1,n-2}\right) : y_n \mapsto y^{kl}_{n-2} w y_n,\ y_i \mapsto y_i \ \text{ для } i = 1, \dots, n-1, \tag{13}$$

где $w \in G'_{n-1}$.

Предположим, что группа U_n содержит нормальную подгруппу H конечного индекса k, коммутант которой нильпотентен. Тогда автоморфизмы $\lambda^k_{n,n-1}$, $\lambda^k_{n-1,n-2}$ принадлежат H, соответственно автоморфизм $\nu = \nu_{k,k}$, определенный в (13), принадлежит H'. Так как коммутант H' нормален в U_n, автоморфизм $\eta_1 = (\mu, \nu)$ также принадлежит H'. Прямые вычисления показывают, что для любого $t = 1, 2, \dots$

$$\eta_t = (\mu, \underbrace{\nu, \dots, \nu}_{t}) : y_n \mapsto (y_{n-1}, y_{n-2})^{(1-a^{k^2}_{n-2})^t} y_n,\ y_i \mapsto y_i, \quad i = 1, \dots, n-1. \tag{14}$$

Поскольку элемент (y_{n-1}, y_{n-2}) нетривиален, он порождает свободный подмодуль в модуле G'_{n-1}. Значит, элемент η_t не фиксирует y_n ни при каком t. Это означает, что коммутант H' не нильпотентен, что противоречит нашему допущению.

Теорема доказана.

3. Об оценке длины обратного автоморфизма

Доказательство теоремы D. Пусть A_n — свободная абелева группа ранга $n \geq 2$ с базисом $\{a_1, \dots, a_n\}$, случай $n = 1$ очевиден. Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} A_n$ изоморфна группе $GL_n(Z)$ обратимых матриц степени n над кольцом $\mathbb{Z}$. Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} A_n$, $\varphi(a_i) = a_1^{\alpha_{i1}} \dots a_n^{\alpha_{in}}$ для $i = 1, \dots, n$, $A_\varphi = (\alpha_{ij}) \in GL_n(Z)$. Тогда длина автоморфизма φ определяется как

$$l(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|. \tag{15}$$

Оценим длину автоморфизма φ^{-1} посредством вычисления

$$A_{\varphi^{-1}} = \pm 1[(-1)^{i+j} M_{ji}]^{n,n}_{i=1,j=1},$$

где M_{ij} — дополнительный минор к элементу α_{ij} матрицы A_φ.

Получаем

$$l(\varphi^{-1}) = \sum_{i,j=1}^{n} |M_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in\Delta_j} |\alpha_{1\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i-1\sigma_{i-1}} \cdot \alpha_{i+1\sigma_i} \cdot \dots \cdot \alpha_{n\sigma_{n-1}}|,$$

где Δ_j — множество всех перестановок на множестве $\{1,\dots,j-1,j+1,\dots,n\}$. Отсюда $l(\varphi^{-1}) \le l(\varphi)^{n-1}$.

Следующий пример показывает, что степень $n-1$ в общем случае понизить нельзя.

Для произвольного $k \in N$ определим автоморфизм $\varphi_k \in \operatorname{Aut} A_n$, соответствующий матрице

$$A_{\varphi_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & k & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Тогда $l(\varphi_k) = k(n-1)+n$. Непосредственно вычисляем, что

$$A_{\varphi_k}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -k & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ k^2 & -k & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^n k^{n-2} & \dots & \dots & -k & 1 & 0 \\ (-1)^{n+1}k^{n-1} & (-1)^n k^{n-2} & \dots & k^2 & -k & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Значит, $l\big(\varphi_k^{-1}\big) = k^{n-1} + 2k^{n-2} + \dots + (n-1)k + n$.

При достаточно больших k выполняется неравенство $l(\varphi_k)^{n-2} < l\big(\varphi_k^{-1}\big) < l(\varphi_k)^{n-1}$.

Пусть F_n — абсолютно свободная группа с базисом $\{x_1,\dots,x_n\}$, φ — произвольный унитреугольный автоморфизм свободной группы F_n, заданный отображением (1). Тогда $l(\varphi) = n + |u_2(x_1)| + \dots + |u_n(x_1,\dots,x_{n-1})|$.

Автоморфизм φ^{-1} задается следующим образом:

$$\varphi^{-1}(x_1) = x_1,\ \varphi^{-1}(x_i) = (u_i(\varphi^{-1}(x_1),\dots,\varphi^{-1}(x_{i-1})))^{-1}x_i \quad (i=2,\dots,n). \tag{18}$$

Для удобства введем обозначения: $u_i := u_i(x_1,\dots,x_{i-1})$, $u_i' := u_i(\varphi^{-1}(x_1), \varphi^{-1}(x_2),\dots,\varphi^{-1}(x_{i-1}))$, $|u|_{x_j}$ — количество элементов $x_j^{\pm 1}$ в слове u, $|u_1| := |u_1'| := 0$.

По определению для любого $k = 2,\dots,n$ выполнено

$$|u_k'| \le \sum_{i=1}^{k-1} |u_k|_{x_i} |\varphi^{-1}(x_i)| \le \sum_{i=1}^{k-1} |u_k|_{x_i}(1+|u_i'|), \tag{19}$$

причем равенство достигается, когда нет сокращений. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k-1} |u_k|_{x_i}(1+|u_i'|) = |u_k| + \sum_{i=1}^{k-1} |u_k|_{x_i}|u_i'| \le |u_k|\left(1 + \sum_{i=1}^{k-1}|u_i'|\right). \tag{20}$$

Получаем следующие неравенства:

$$|u_2'| \le |u_2|, \quad |u_3'| \le |u_3|(1+|u_2|), \quad |u_4'| \le |u_4|(1+|u_2|+|u_3|(1+|u_2|)), \dots. \tag{21}$$

Значит,

$$l(\varphi^{-1}) = n + \sum_{i=2}^{n} |u_i'| \le l(\varphi) + |u_2||u_3|\dots|u_n| + \zeta,$$

где ζ — сумма произведений $n-2,\dots,2$ различных элементов множества $\{|u_2|,\dots,|u_n|\}$. Отсюда $l(\varphi^{-1}) \le l(\varphi)^{n-1} = (n+|u_2|+\dots+|u_n|)^{n-1}$.

Доказательство того, что степень $n-1$ в общем случае понизить нельзя, вытекает из следующего замечания. Автоморфизм $\varphi_k \in \operatorname{Aut} A_n$, построенный выше, индуцируется автоморфизмом $\widetilde{\varphi}_k \in \operatorname{Aut} F_n$, $\widetilde{\varphi}_k : x_1 \mapsto x_1,\ x_i \mapsto x_{i-1}^k x_i$ $(i = 1,\dots,n)$. Очевидно, $l(\varphi_k) = l(\widetilde{\varphi}_k)$, $l\big(\varphi_k^{-1}\big) = l\big(\widetilde{\varphi}_k^{-1}\big)$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
2. *Roman'kov V. A.* Automorphisms of groups // Acta Appl. Math. 1992. V. 29. P. 241–280.
3. *Носков Г. А., Ремесленников В. Н., Романьков В. А.* Бесконечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 17. С. 65–158. (Итоги науки и техники).
4. *Bachmuth S.* Automorphisms of solvable groups. I // Proceedings of groups — St. Andrews 1985. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. P. 1–14. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 121).
5. *Krammer D.* The hypercenter of linear groups // Invent. Math. 2000. V. 142, N 3. P. 451–586.
6. *Formanek E., Procesi C.* The automorphism groups of a free group is not linear // J. Algebra. 2002. V. 149, N 2. P. 494–499.
7. *Auslander L., Baumslag G.* Automorphism groups of finitely generated nilpotent groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 716–717.
8. *Olshanskii A. Yu.* Linear automorphism groups of relatively free groups // Turk. J. Math. 2007. V. 31. P. 105–111.
9. *Платонов В. П.* Линейные представления групп автоморфизмов свободных разрешимых групп // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 4. С. 462–463.
10. *Матейко О. М., Тавгень А. И.* Линейность групп автоморфизмов относительно свободных групп // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 3. С. 465–467.
11. *Коробов А. А.* Разделенные разности в теории дифференциально-разностных уравнений и в теории групп // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, № 3. С. 25–48.
12. *Романьков В. А., Чирков И. В., Шевелин М. А.* Матричная непредставимость групп автоморфизмов некоторых свободных алгебр // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1184–1188.
13. *Сосновский Ю. В.* Описание гиперцентрального строения группы унитреугольных автоморфизмов алгебры многочленов // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 689–693.
14. *Кабанов А. Н.* Гиперцентральная структура группы унитреугольных автоморфизмов свободной метабелевой алгебры Ли // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 329–333.
15. *Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Sosnovsky Y. V.* Groups of triangular automorphisms of a free associative algebra and a polynomial algebra // arXiv:1007.2711v1 [math.GR]. 16 Jul 2010. P. 1–19.
16. *Tits J.* Free subgroups of linear groups // J. Algebra. 1972. V. 20. P. 250–270.
17. *Groves J. R. J.* On varieties of solvable groups. II // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. V. 7. P. 437–441.
18. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
19. *Lennox J. C., Robinson D. J. S.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Oxford Sci. Publ., 2004.

Статья поступила 16 сентября 2011 г.

Ерофеев Степан Юрьевич, Романьков Виталий Анатольевич
Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
`stepan.erofeev@gmail.com`; `romankov48@mail.ru`