Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 512.71

РАЗРЕШИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ НАД ЕВКЛИДОВЫМ КОЛЬЦОМ

В. И. Матюхин

Аннотация. Изучаются разрешимые группы матриц над коммутативным кольцом.

Ключевые слова: матричная группа, коммутативное кольцо, нормальный делитель, разрешимая группа, примитивная группа, фактор-группа.

Введение. Под полной линейной группой над коммутативным евклидовым кольцом R понимается группа всех обратимых линейных преобразований свободного n-мерного R-модуля. Ее обозначают через $GL(n, R)$, а ее подгруппы называют *линейными группами.*

Начало изучения линейных групп было положено Галуа, который рассматривал разрешимые подгруппы симметрической группы и полной линейной группы над конечным полем. Общий метод построения максимальных разрешимых подгрупп симметрической группы дал в своем знаменитом «Трактате» К. Жордан. Разрешимые подгруппы полной линейной группы над конечным полем изучались О. Ю. Шмидтом, Бухтом (над алгебраически замкнутым полем X), Цассенхаузом, который, в частности, доказал, что всякая подгруппа полной линейной группы обладает максимальным разрешимым нормальным делителем, а также установил разрешимость локально разрешимой группы и ограниченность длины ряда коммутантов разрешимой линейной группы данной степени.

А. И. Мальцев при построении некоторых классов разрешимых абстрактных групп доказал, что разрешимая группа матриц над алгебраически замкнутым полем обладает инвариантной подгруппой конечного индекса, все матрицы которой одновременно приводятся к треугольному виду.

Большим прогрессом в изучении линейных групп явились работы Д. А. Супруненко, в которых была построена теория разрешимых матричных групп над произвольным полем, даны максимальные разрешимые линейные группы над конечным и алгебраически замкнутым полями и над полем действительных чисел [1].

В настоящей работе некоторые результаты теории разрешимых групп матриц над полем переносятся на случай разрешимых матричных групп над коммутативным кольцом.

Изучение строения максимальных разрешимых неприводимых подгрупп полной линейной группы $GL(n, R)$ над евклидовым кольцом R сводится к изучению строения максимальных разрешимых примитивных подгрупп Г. Строение Г как примитивной подгруппы группы $GL(n, P)$ над полем частных P изучается с использованием ее максимального абелева нормального делителя F, централизатора V подгруппы F в Г и фактор-группы Γ/V.

Доказывается, что максимальный абелев нормальный делитель A/F группы Γ/F, содержащийся в V/F, совпадает со своим централизатором в V/F.

Предварительные замечания. Пусть M — свободный n-мерный R-модуль, а P — поле отношений кольца R. Очевидно, $G(M) = GL(n,R)$ можно рассматривать как подгруппу группы $GL(n,P)$.

Подгруппа Γ группы $GL(n,R)$ называется *приводимой*, если модуль M обладает прямым слагаемым N, инвариантным относительно Γ, размерность которого меньше n и больше нуля. В противном случае подгруппа Γ называется *неприводимой*.

Лемма 1. *Если Γ — подгруппа $GL(n,R)$, а в M есть подмодуль N, инвариантный относительно Γ, то в M есть прямое слагаемое N_1, инвариантное относительно Γ, размерность которого над R совпадает с размерностью N.*

Действительно, согласно теореме о базисе подмодуля в N есть такой базис $b_1, b_2, \dots, b_m$, что $b_i = \delta_i a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, где $\delta_i \in R$, а $a_1, a_2, \dots, a_m$ — некоторый базис M. По условию для $g \in \Gamma$ и $i \leq m$ можно написать

$$g(b_i) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m, \quad \lambda_j \in R. \tag{1}$$

С другой стороны, для $i \leq m$

$$g(a_i) = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n, \quad \gamma_k \in R. \tag{2}$$

Отсюда

$$g(b_i) = \delta_i g(a_i) = \delta_i(\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_n a_n). \tag{3}$$

Сравнив (1) и (3), получаем $\gamma_k = 0$ для $k > m$. Следовательно, подмодуль N_1 с базисом $a_1, a_2, \dots, a_m$ — прямое слагаемое модуля M, инвариантное относительно Γ.

Лемма 2. *Если Γ — неприводимая подгруппа $GL(n,R)$, то Γ неприводима как подгруппа $GL(n,P)$.*

В самом деле, каждый базис $m_1, m_2, \dots, m_n$ модуля M является базисом n-мерного пространства P^n над полем P. Если Γ приводима как подгруппа $GL(n,P)$, а Q — инвариантное относительно Γ подпространство P^n, то $N = Q \cap M$ — инвариантный относительно Γ подмодуль M, размерность которого совпадает с размерностью Q. Согласно лемме 1 Γ — неприводимая подгруппа $GL(n,R)$. Лемма доказана.

Подгруппа Γ группы $GL(n,R)$ называется *вполне приводимой*, если M можно представить в виде прямой суммы таких инвариантных относительно Γ подмодулей, что ограничение Γ на каждом слагаемом является неприводимой группой.

Подгруппу Γ группы $GL(n,R)$ будем называть *импримитивной*, если M можно представить в виде прямой суммы k ($k > 1$) подмодулей N_i, перемещаемых элементами Γ между собой. Разложение $M = N_1 + N_2 + \dots + N_k$ называется *разложением модуля* на системы импримитивности Γ. Если такое разложение невозможно, то группу Γ будем называть *примитивной*. Если группа Γ импримитивна, то в базисе M, определяемом разложением на системы импримитивности, каждая матрица группы Γ будет мономиальной матрицей степени k, элементы которой — обратимые матрицы степени nk^{-1} над R [2].

Пусть теперь Γ — неприводимая импримитивная подгруппа $G(M)$ и $M = N_1+N_2+\cdots+N_k$ — разложение модуля M на системы импримитивности Γ. Подгруппу всех операторов из Γ, перемещающих элементы подмодуля N_i внутри N_i, обозначим через H_i. Если $g \in \Gamma$ и $g(N_i) = N_j$, то, очевидно, $gH_ig^{-1} = H_j$.

Пусть $g_1 = e$, $g_2, \ldots, g_k$ принадлежат Γ и $g_i(N_1) = N_i$. Тогда $g_1, g_2, \ldots, g_k$ — полная система представителей левых смежных классов Γ по H_1.

Лемма 3. *Ограничение Γ^i группы H_i на N_i — неприводимая подгруппа $GL(nk^{-1}, R)$, $i = 1, 2, \ldots, k$* [1].

Если группа Γ^1 из леммы 3 тоже импримитивна и имеет l систем импримитивности, то модуль M можно представить в виде прямой суммы kl систем импримитивности группы Γ. Следовательно, верна

Лемма 4. *Если Γ — неприводимая подгруппа $G(M)$, то либо Γ примитивна, либо M является прямой суммой таких систем импримитивности группы Γ, что определяемые леммой 3 группы Γ^i будут примитивными.*

Указанное в этой лемме разложение модуля M назовем *полным разложением* M на системы импримитивности группы Γ.

Редукция к примитивным группам. Обратимся к разрешимым подгруппам группы $G(M)$. В силу [1] достаточно рассматривать лишь неприводимые разрешимые подгруппы $G(M)$.

Всякая разрешимая подгруппа Γ группы $G(M)$ содержится в максимальной разрешимой подгруппе $G(M)$. Действительно, объединение G любой возрастающей цепочки разрешимых подгрупп группы $G(M)$ есть локально разрешимая группа. С другой стороны, $G \subset GL(n, p)$. Следовательно, по теореме Цассенхауза G — разрешимая группа [3]. Из этого и следует данное утверждение.

Будем теперь рассматривать максимально разрешимые неприводимые подгруппы $G(M)$. Пусть максимально разрешимая неприводимая подгруппа Γ группы $G(M)$ импримитивна и

$$M = N_1 + N_2 + \cdots + N_k, \quad k > 1, \tag{4}$$

есть полное разложение свободного n-мерного R-модуля на системы импримитивности Γ. Можно доказать, что Γ однозначно определяется некоторой максимальной примитивной разрешимой подгруппой $GL(nk^{-1}, R)$ и некоторой максимальной транзитивной разрешимой подгруппой симметрической группы S_k степени k. Другими словами, верна

Лемма 5. *Подгруппа Γ допускает факторизацию*

$$\Gamma = N \cdot H, \quad N \cap H = (e), \tag{5}$$

где подгруппа N изоморфна максимальной транзитивной разрешимой подгруппе S_k, а нормальный делитель H — прямое произведение k экземпляров некоторой максимальной разрешимой примитивной подгруппы G группы $GL(nk^{-1}, R)$.

Для доказательства леммы достаточно повторить рассуждения, приведенные в [1, с. 13].

Теорема 1. *Пусть Γ — неприводимая подгруппа группы $G(M)$, а H — ее нормальный делитель. Тогда в M есть такой подмодуль N, что $N \cong M$,*

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k, \tag{6}$$

где N_j — инвариантные и неприводимые относительно H подмодули одной и той же размерности nk^{-1}.

Доказательство. Будем рассматривать Γ и H как подгруппы $GL(n,P)$. По теореме Клиффорда [4] пространство P^n можно представить в виде прямой суммы инвариантных относительно H подпространств $L_1, L_2, \dots, L_k$ одной и той же размерности $nk^{-1} = m$:

$$P^n = L_1 + L_2 + \dots + L_k. \tag{7}$$

Можно считать, что $M \subset P^n$; $L_j \cap M = N_j$ — инвариантные относительно H подмодули модуля M размерности m [5]. Очевидно, сумма (6) является прямой, а $M \simeq N$. Теорема доказана.

Лемма 6. *Если Γ — неприводимая подгруппа $G(M)$, то в M есть такой инвариантный относительно H подмодуль $N \simeq M$, что*

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_k, \quad k \geq 1, \tag{8}$$

подмодули N_i перемещаются группой $\overline{\Gamma}$ между собой, где $\overline{\Gamma}$ — ограничение Γ на N, а группа $\overline{\Gamma}^i$ (см. лемму 3) является примитивной подгруппой $GL(nk^{-1}, P)$.

Доказательство. Ввиду леммы 2 Γ — неприводимая подгруппа $GL(n,P)$. Если Γ — примитивная подгруппа $GL(n,P)$, то лемма доказана: достаточно положить $k = 1$, $N = M$. Пусть теперь Γ — импримитивная подгруппа $GL(n,P)$ и $P^n = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k$ — полное разложение пространства P^n на системы импримитивности Γ. Как отмечалось выше, размерность подмодуля $N_j = Q_j \cap M$ совпадает с размерностью подпространства Q_j. Если $g \in \Gamma$ и $g(Q_i) = Q_j$, то $g(N_i) = N_j$. Очевидно, сумма

$$N_1 + N_2 + \dots + N_k = N \tag{9}$$

прямая, а размерность N равна n [2].

Значит, (9) является разложением N на системы импримитивности $\overline{\Gamma}$. Так как линейная P-оболочка подмодуля N_i совпадает с Q_i, то $\overline{\Gamma}^i$ — примитивная подгруппа $GL(nk^{-1}, P)$.

Заметим, что $\overline{\Gamma}$ изоморфна Γ. Лемма доказана.

Следовательно, в силу двух последних лемм изучение строения максимальных разрешимых линейных групп над R сводится к изучению максимальных разрешимых примитивных линейных групп над R.

Примитивные разрешимые группы.

Теорема 2. *Пусть Γ — максимальная разрешимая неприводимая подгруппа $GL(n,R)$, а F — ее максимальный абелев нормальный делитель. Если Γ примитивна как подгруппа $GL(n,P)$, то F является группой C^* всех обратимых элементов некоторой области целостности $C \supset R$ такой, что размерность модуля C над R есть делитель числа n.*

Доказательство. Так как Γ — примитивная подгруппа $GL(n,P)$, то линейная P-оболочка $[F]$ группы F является полем Σ таким, что $\Sigma : P = m$, m/n. Пусть $D = \Sigma \cap G(M)$. Очевидно, $gDg^{-1} = D$ для любого $g \in \Gamma$. Следовательно, ΓD — разрешимая группа, а D — ее абелев нормальный делитель. В силу максимальности Γ имеем $\Gamma D = \Gamma$, $D \subset \Gamma$. Отсюда $D = F$. Очевидно, линейная R-оболочка группы D содержится в Σ и, следовательно, является областью целостности. Пусть R_n — кольцо всех $(n \times n)$-матриц над R. Легко показать, что $R_n \cap \Sigma$ является одновременно кольцом и модулем, размерность которого над R совпадает со степенью $m = \Sigma : R$. Действительно, пусть $a_1, a_2, \dots, a_m$ — P-базис Σ. Очевидно, для некоторых $l_1, l_2, \dots, l_m$ из R имеем, что $l_1 a_1 = c_1$, $l_2 a_2 = c_2, \dots, l_m a_m = c_m$ будут линейно независимыми над R элементами из $R_n \cap \Sigma$. Следовательно, ранг модуля $C = R_n \cap \Sigma$ равен m, H — группа всех обратимых в R_n матриц из $R_n \cap \Sigma$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть Γ — максимальная разрешимая неприводимая подгруппа $GL(n, R)$, F — ее максимальный абелев нормальный делитель, V — централизатор F в Γ. Если Γ примитивна как подгруппа $GL(n, P)$, то фактор-группа Γ/V изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы автоморфизмов кольца $C = [F]_R$.*

Действительно, пусть g — произвольный элемент группы Γ. Рассмотрим отображение

$$g = \sigma_g, \quad \sigma_g(x) = gxg^{-1}, \quad x \in [F]_R. \tag{10}$$

Очевидно, σ_g — автоморфизм кольца C, оставляющий неподвижным каждый элемент RE_n. Теорема доказана.

Следствие. *Индекс централизатора V в G не превосходит m, где $m = [F]_P : P$, m/n.*

При предыдущих обозначениях справедлива

Лемма 7. *R-модуль M содержит подмодуль N, изоморфный M как R-модулю и представимый в виде свободного C-модуля C-размерности nm^{-1}.*

Доказательство. Очевидно, $P^n = \Sigma g_1 + \dots + \Sigma g_r$, $r = nm^{-1}$, $g_i \in M$. Так как $C \subset \Sigma$, сумма $Cg_1 + \dots + Cg_r = N$ прямая. Далее, $[C]_P = \Sigma$. Следовательно, $N : R = n$, $N : C = r = nm^{-1}$, а это и утверждается в лемме.

Так как для любых $c \in C$ и $v \in V$ будет $cv = vc$, то V можно рассматривать как подгруппу $GL(nm^{-1}, C)$.

Пусть A/F — абелев нормальный делитель групп Γ/F и V/F. Поскольку F — максимальный абелев нормальный делитель Γ, центр группы A совпадает с F.

Лемма 8. *В фактор-группе A/F порядки всех элементов делят число n/m. Если $aF \in A/F$ имеет порядок u, то в A найдется такой элемент c, что коммутатор $(a, c) = aca^{-1}c^{-1}$ имеет порядок u.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 9 в [1, с. 18].

Лемма 9. *Индекс максимального абелева нормального делителя F в A равен $A : F = [A]_R : [F]_R$.*

Действительно, если элементы $h_1, h_2, \dots, h_k$ из A линейно независимы над $[F]$, то $h = r_1 h_1 + r_2 h_2 + \dots + r_k h_k \neq 0$, $r_i \in [F]$. Такие элементы будут принадлежать различным смежным классам A по F. Представители различных смежных классов A по F линейно независимы над $[F]$. Если $h_1, h_2, \dots, h_k$ — максимальная линейно независимая над $[F]$ система элементов из A, то она, с одной стороны, будет $[F]$-базисом A, а с другой — полной системой представителей смежных классов A по F [4].

Лемма 10. *В группе A есть такая система образующих $a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t$, что*

1) $(a_i, b_i) = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = \varepsilon_i$, *где* $\varepsilon_i \in F$ *и имеет порядок* u_i, *причем* $u_i + 1/u_i$;
2) *элементы различных пар перестановочны;*
3) *если* $a \in A$, *то* a *единственным образом представим в виде*

$$a = f a_1^{\alpha 1} b_1^{\beta 1} \ldots a_t^{\alpha t} b_t^{\beta t},$$

где $f \in F$, $0 \leq \alpha_i$, $\beta_i < u_i$.

Действительно, порядки элементов фактор-группы A/F делят n/m. Обозначим через u_1 наибольший из этих порядков. Тогда $A = (a_1)(b_1)A_1$, где $(a_1, b_1)^{u1} = 1$, $a_1, b_1 \in A$; A_1 — централизатор элементов a_1, b_1 в A.

Отсюда $A : A_1 \leq u_1^2$, так как в A имеется u_1 элементов, сопряженных с a_1, и u_1 элементов, сопряженных с b_1. Кроме того, элементы $a_1^{\alpha 1} b_1^{\beta 1}$, $0 \leq \alpha_1$, $\beta_1 < u_1$ лежат в различных смежных классах A по A_1. Поэтому $A : A_1 = u_1^2$. Обозначая через u_2 наибольший из порядков элементов группы A_1/F и т. д., мы ввиду конечности группы A/F после конечного числа шагов получим $A = (a_1)(b_1) \ldots (a_t)(b_t)F$. Лемма доказана.

Для максимального абелева нормального делителя A/F группы Γ/F, содержащегося в V/F, остается справедливой следующая теорема из [1].

Теорема 4. *Группа A/F совпадает со своим централизатором в V/F.*

Следствие 1. *Централизатор A в Γ совпадает с V.*

Следствие 2. *Группа V/A изоморфна разрешимой подгруппе группы автоморфизмов группы A/F.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Супруненко Д. А.* Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1958.
2. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
3. *Zassenhaus H.* Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen // Abhandl. Math. Sem. Hansische Univ. 1938. Band 12. Hefte 3/4. S. 289–3129.
4. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.
5. *Супруненко Д. А., Матюхин В. И.* О разрешимых группах матриц над евклидовым кольцом // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1965. № 3. С. 5–9.

Статья поступила 3 октября 2011 г.

Матюхин Валентин Иванович
Лукишская средняя школа,
пер. Лукишкю, 5, Вильнюс LT01108, Литва
markask@mail.ru