Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.958

ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В. Г. Романов

Аннотация. Для интегродифференциального уравнения, которое соответствует двумерной проблеме вязкоупругости, изучается задача об определении плотности, модуля упругости и пространственной части ядра, входящего в интегральный член уравнения. Предполагается, что искомые функции отличаются от заданных констант только внутри единичного круга $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$. В качестве информации для решения этой обратной задачи рассматривается однопараметрическое семейство решений интегродифференциального уравнения, отвечающее импульсным источникам, локализованным на прямых линиях, и на границе области D задаются следы решений для некоторого конечного временно́го интервала. Показывается, что использование сравнительно небольшой части заданной информации о кинематике и элементах динамики распространяющихся волн позволяет свести рассматриваемую задачу к трем последовательно и однозначно решаемым обратным задачам, которые в совокупности дают решение исходной обратной задачи.

Ключевые слова: вязкоупругость, обратная задача, единственность.

§ 1. Введение

Рассмотрим относительно функции $u = u(x,t)$, $x = (x_1, x_2)$, уравнение

$$Lu \equiv \rho(x)u_{tt}(x,t) - \operatorname{div}\left[\mu_0(x)\nabla u(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mu(x,t-s)\nabla u(x,s)\,ds\right] = F(x,t) \quad (1.1)$$

для $(x,t) \in \mathbb{R}^3$. Здесь $\rho(x)$ — плотность среды, $\mu_0(x)$ — модуль сдвига, функция $\mu(x,t)$ характеризует вязкость среды, а интегральный оператор описывает влияние предыстории на процесс распространения упругих волн, вызванных приложенной заданной силой $F(x,t)$. Уравнение (1.1) возникает в теории вязкоупругих тел, свойства которых не зависят от одной из пространственных переменных.

Предположим, что функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1.1) и удовлетворяет начальному условию

$$u|_{t<0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (1.2)$$

При заданных функциях $\rho(x)$, $\mu_0(x)$, $\mu(x,t)$, $F(x,t)$ задача (1.1), (1.2), заключающаяся в определении функции $u(x,t)$, корректна в подходящих функциональных пространствах. Будем называть ее *прямой задачей.* В дальнейшем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00105–а), Сибирского отделения РАН (интеграционный проект СО РАН 2012 № 14), а также Visby Program.

нас будет интересовать обратная задача об определении функций $\rho(x)$, $\mu_0(x)$, $\mu(x,t)$ по заданной информации о семействе решений прямых задач. При этом будем предполагать, что функция $\mu(x,t)$ имеет специальную структуру, а именно, она представима в виде произведения двух функций

$$\mu(x,t) = k(t)p(x), \tag{1.3}$$

в котором функция $k(t) \in \mathbf{C}^2[0,\infty)$ задана и удовлетворяет условию $k(0) = 1$, а функция $p(x)$ неизвестна. Кроме того, предположим, что функции $\rho(x)$ и $\mu_0(x)$ положительны всюду в $\mathbb{R}^2$ и отличны от заданных положительных постоянных ρ_0 и μ_{00} соответственно только внутри единичного круга $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$, при этом $p(x) \equiv 0$ для $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Более точно, будем предполагать, что

$$\operatorname{supp}((\rho(x) - \rho_0), (\mu_0(x) - \mu_{00}), p(x)) \subset D. \tag{1.4}$$

В дальнейшем будут сделаны также некоторые предположения о гладкости функций $\rho(x)$, $\mu_0(x)$, $p(x)$ и регулярности поля геодезических линий, связанных с уравнением (1.1).

Пусть функция $F(x,t)$ имеет вид

$$F(x,t) = \delta(x\cdot\nu(\psi) - 1)\delta(t), \quad \nu(\psi) = (\cos\psi, \sin\psi), \quad \psi \in [0, 2\pi], \tag{1.5}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, а ψ — переменный параметр задачи. Решение прямой задачи (1.1), (1.2), (1.5) будем в этом случае обозначать через $u(x,t,\psi)$. Границу единичного круга D обозначим через $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ и введем обозначения

$$\partial_+ D = \{x \in \partial D \mid x\cdot\nu(\psi) > 0\}, \quad \partial_- D = \{x \in \partial D \mid x\cdot\nu(\psi) < 0\}.$$

Постановка обратной задачи. *Пусть для некоторого достаточно большого числа $T > 0$ (см. ниже условие (2.4)) функция $u(x,t,\psi)$ известна для всех $(x,t,\psi) \in B(T)$:*

$$u(x,t,\psi) = f(x,t,\psi), \quad (x,t,\psi) \in B(T) = \{x \in \partial_- D,\ t \in [0,T],\ \psi \in [0,2\pi]\}. \tag{1.6}$$

Требуется по заданной функции $f(x,t,\psi)$ найти $\rho(x)$, $\mu_0(x)$, $p(x)$ в области D.

Заметим, что обратные задачи об определении ядра $\mu(x,t)$ в уравнении (1.1) в предположении (1.3) изучались ранее в [1–5]. Гёльдеровская оценка устойчивости решения обратной задачи получена в [1, 2] в предположении, что начальные значения функции $u(x,t)$ отличны от нуля во всех точках области $\overline{D} = D \cup \partial D$, $\rho = 1$ и $\mu(x)$ — известная функция. В [3–5] рассмотрена обратная задача с условиями (1.2) при том же предположении о плотности и модуле сдвига. В [6, 7] найдены оценки устойчивости решения обратной задачи об определении двух ядер системы уравнений упругости при известных плотности и модулях упругости. В настоящей работе изучается задача об определении всех коэффициентов, входящих в уравнение (1.1). Этим она отличается от предшествующих работ по этой тематике.

§ 2. Основной результат

Обозначим через $c(x) = \sqrt{\mu_0(x)/\rho_0(x)}$ скорость распространения поперечных (сдвиговых) волн. Пусть функция $\tau(x,\psi)$ является решением задачи Коши

$$|\nabla_x \tau(x,\psi)|^2 = \frac{1}{c^2(x)}, \quad \tau|_{x\cdot\nu(\psi)=1} = 0, \tag{2.1}$$

т. е. $\tau(x,\psi)$ — расстояние между точкой x и прямой $\xi\cdot\nu(\psi)=1$ на плоскости переменных $(\xi_1,\xi_2)=\xi$ в римановой метрике $d\tau=\sqrt{\left(d\xi_1^2+d\xi_2^2\right)}/c(\xi)$. Предположим, что геодезические этой римановой метрики регулярны в круге D.

Обозначим через $\mathscr{Q}(m,M)$ множество функций $(\rho(x),\mu_0(x),p(x))$, удовлетворяющих при фиксированных положительных m,M следующим условиям:

1) $0<m\le\rho(x)\le M$, $0<m\le\mu_0(x)\le M$ для всех $x\in\mathbb{R}^2$,
2) $\operatorname{supp}(\rho(x)-\rho_0,\,\mu_0(x)-\mu_{00},p(x))\subset D$,
3) $\rho(x)\in\mathbf{C}^4(D)$, $\mu_0(x)\in\mathbf{C}^4(D)$, $p(x)\in\mathbf{C}^2(D)$.

Уравнение $t=\tau(x,\psi)$ задает фронт волны, распространяющийся от источника, заданного формулой (1.5). В окрестности этого фронта решение задачи (1.1), (1.2), (1.5) имеет вид

$$u(x,t,\psi)=A(x,\psi)\theta_0(t-\tau(x,\psi))+B(x,\psi)\theta_1(t-\tau(x,\psi))+v(x,t,\psi), \qquad (2.2)$$

где $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда, т. е. $\theta_0(t)=1$ для $t\ge0$ и $\theta_0(t)=0$ для $t<0$, функция $\theta_1(t)$ задана равенством $\theta_1(t)=t\theta_0(t)$, а $v(x,t,\psi)$ является малой более высокого порядка, чем $(t-\tau(x,\psi))$, и равна нулю при $t<\tau(x,\psi)$. В целом для гиперболических уравнений этот факт общеизвестен, в применении к конкретной задаче он использовался и установлен в [3–5] для случая $\rho(x)=1$. Чтобы получить соотношения для определения коэффициентов A,B и функции $v(x,t,\psi)$, необходимо подставить представление (2.2) в уравнение (1.1) и приравнять к нулю коэффициенты при $\delta'(t-\tau(x,\psi))$ и $\delta(t-\tau(x,\psi))$ (см. § 3). Здесь используем представление (2.2), чтобы свести исходную обратную задачу к другой задаче.

Как следствие представления (2.2) для функции $f(x,t,\psi)$, заданной в обратной задаче, имеет место представление

$$f(x,t,\psi)=A(x,\psi)\theta_0(t-\tau(x,\psi))+B(x,\psi)\theta_1(t-\tau(x,\psi))+\hat f(x,t,\psi), \qquad (2.3)$$

в котором функция $\hat f(x,t,\psi)$ является малой более высокого порядка, чем $t-\tau(x,\psi)$, и равна нулю при $t<\tau(x,\psi)$. Допустим, что

$$T>\sup_{\psi\in[0,2\pi]}\sup_{x\in\partial_-D}\tau(x,\psi). \qquad (2.4)$$

Тогда $f(x,t,\psi)$ однозначно определяет функции $\tau(x,\psi)$, $A(x,\psi)$ и $B(x,\psi)$ для всех $x\in\partial_-D$ и $\psi\in[0,2\pi]$. Формулы для их вычисления имеют вид

$$\begin{gathered}\tau(x,\psi)=\sup\{\tau\},\quad \{\tau\}=\{\tau\in\mathbb{R}\mid f(x,t,\psi)\equiv0,\ \text{если } t<\tau\},\\ A(x,\psi)=\lim_{t\to\tau(x,\psi)+0}f(x,t,\psi),\quad B(x,\psi)=\lim_{t\to\tau(x,\psi)+0}f_t(x,t,\psi).\end{gathered} \qquad (2.5)$$

В связи с этим можно рассматривать следующую редуцированную постановку обратной задачи: *известны функции $\tau(x,\psi)$, $A(x,\psi)$, $B(x,\psi)$ для всех $(x,\psi)\in\Upsilon:=\{(x,\psi)\mid x\in\partial_-D,\ \psi\in[0,2\pi]\}$; найти $\rho(x)$, $\mu_0(x)$, $p(x)$ в области D.* В дальнейшем (см. § 4) увидим, что эта задача распадается на три последовательно решаемые задачи:

1) найти $c(x)=\sqrt{\mu_0(x)/\rho(x)}$ по функции $\tau(x,\psi)$,
2) при заданных функциях $c(x)$ и $A(x,\psi)$ найти $\hat p(x)=p(x)/\mu_0(x)$,
3) при заданных $c(x)$, $\hat p(x)$ и $A(x,\psi)$, $B(x,\psi)$ найти $\rho(x)$.

Первая из этих задач представляет собой известную обратную кинематическую задачу сейсмики. В несколько иной постановке она рассмотрена Р. Г. Мухометовым [8], и для ее решения найдена оценка устойчивости. Две другие задачи приводят к линейной задаче интегральной геометрии на семействе геодезических линий римановой метрики $d\tau = |dx|/c(x)$. Кроме того, в третьей задаче для определения $\rho(x)$ в D возникает необходимость в решении краевой задачи для некоторого линейного уравнения второго порядка эллиптического типа с данными Коши на ∂D. Решение каждой из этих задач единственно (см. § 4). Отсюда вытекает следующая теорема единственности.

Теорема. *Пусть* $(\rho_k, \mu_{0k}, p_k) \in \mathscr{Q}(m, M)$, *а* $f_k(x,t,\psi)$ — *данные* (1.6), *соответствующие решениям задач* (1.1), (1.2) *при* $\rho = \rho_k$, $\mu = \mu_{0k}$, $p = p_k$, $k = 1, 2$, *и условие* (2.4) *выполнено. Если при этом* $f_1(x,t,\psi) = f_2(x,t,\psi)$, *то справедливы равенства* $\rho_1(x) = \rho_2(x)$, $\mu_{01}(x) = \mu_{02}(x)$, $p_1(x) = p_2(x)$ *для всех* $x \in D$.

В § 3 выведены формулы для определения амплитудных коэффициентов $A(x,\psi)$ и $B(x,\psi)$. На основе этих формул в § 4 обосновывается разбиение исходной задачи на три более простые задачи, указанные выше, и приводятся оценки устойчивости решения обратной кинематической задачи и возникающей задачи интегральной геометрии, из которых теоремы единственности решения соответствующих задач вытекают как простые следствия. В целом содержание § 4 определяет алгоритмическую процедуру построения решения исходной обратной задачи. В этом параграфе также повторены известные результаты Р. Г. Мухометова [8], они приводятся здесь лишь потому, что соответствующие постановки задач отличаются формой задания данных. Фактически здесь показано, что та же самая техника оказывается пригодной и в рассматриваемом случае.

§ 3. Вывод амплитудных соотношений

Представим решение задачи (1.1), (1.2), (1.5) в виде (2.2). В дальнейшем полагаем $\nabla = \nabla_x$, $\operatorname{div} = \operatorname{div}_x$. Вычислим некоторые выражения, входящие в Lu. Имеем

$$\begin{aligned}\nabla u(x,t,\psi) = -[A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\delta(t-\tau(x,\psi)) \\ + [\nabla A(x,\psi) - B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\theta_0(t-\tau(x,\psi)) \\ + [\nabla B(x,\psi)]\theta_1(t-\tau(x,\psi)) + \nabla v(x,t,\psi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\mu_0(x)\nabla u(x,t,\psi)] = A(x,\psi)\mu_0(x)|\nabla\tau(x,\psi)|^2\delta'(t-\tau(x,\psi)) \\ - [\operatorname{div}(\mu_0(x)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)) \\ + \mu_0(x)\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi) - B(x,\psi)|\nabla\tau(x,\psi)|^2]\delta(t-\tau(x,\psi)) \\ + (\operatorname{div}[\mu_0(x)\nabla A(x,\psi) - \mu_0(x)B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)] \\ - \mu_0(x)\nabla B(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi))\theta_0(t-\tau(x,\psi)) \\ + [\operatorname{div}(\mu_0(x)\nabla B(x,\psi))]\theta_1(t-\tau(x,\psi)) + \operatorname{div}[\mu_0(x)\nabla v(x,t,\psi)],\end{aligned}$$

$$u_{tt}(x,t,\psi) = A(x,\psi)\delta'(t-\tau(x,\psi)) + B(x,\psi)\delta(t-\tau(x,\psi)) + v_{tt}(x,t,\psi).$$

С помощью интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} \mu(x,t-s)\nabla u(x,s,\psi)\,ds = p(x)\int_0^t k(t-s)\{-[A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\delta(s-\tau(x,\psi)) \\ + [\nabla A(x,\psi) - B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\theta_0(s-\tau(x,\psi))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ [\nabla B(x,\psi)]\theta_1(s-\tau(x,\psi)) + \nabla v(x,s,\psi)\}\,ds\\
&= -p(x)k(0)A(x,\psi)[\nabla\tau(x,\psi)]\theta_0(t-\tau(x,\psi))\\
&+ p(x)(k(0)[\nabla A(x,\psi) - B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)] - k'(0)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi))\theta_1(t-\tau(x,\psi))\\
&+ p(x)\int\limits_0^t (k(t-s)\nabla B(x,\psi) + k'(t-s)[\nabla A(x,\psi) - B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\\
&- k''(t-s)[A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)])\theta_1(s-\tau(x,\psi))\,ds\\
&+ \int\limits_0^t \mu(x,t-s)\nabla v(x,s,\psi)\,ds.
\end{aligned}
$$

Простые вычисления приводят к формулам

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\int\limits_{-\infty}^t \mu(x,t-s)\nabla u(x,s,\psi)\,ds &= p(x)A(x,\psi)|\nabla\tau(x,\psi)|^2\delta(t-\tau(x,\psi))\\
&+ \{p(x)[-\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi) + (B(x,\psi)+k'(0)A(x,\psi))|\nabla\tau(x,\psi)|^2]\\
&- \operatorname{div}[p(x)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\}\theta_0(t-\tau(x,\psi))\\
&+ \operatorname{div}\{p(x)[\nabla A(x,\psi) - B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi) - k'(0)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\}\theta_1(t-\tau(x,\psi))\\
&+ \int\limits_0^t \operatorname{div}\{p(x)(k(t-s)\nabla B(x,\psi) + k'(t-s)[\nabla A(x,\psi) - B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\\
&- k''(t-s)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi))\theta_1(s-\tau(x,\psi))\}\,ds\\
&+ \int\limits_0^t \operatorname{div}(\mu(x,t-s)\nabla v(x,s,\psi))\,ds.
\end{aligned}
$$

Здесь $k'(t)$, $k''(t)$ — производные функции $k(t)$ первого и второго порядков соответственно. Вычисляя с помощью выписанных выше формул Lu и используя равенства $|\nabla\tau(x,\psi)|^2 = c^{-2}(x) = \rho(x)/\mu_0(x)$, получаем

$$
\begin{aligned}
Lu = &\{\operatorname{div}[\mu_0(x)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi) + \mu_0(x)\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi)]\\
&- A(x,\psi)p(x)c^{-2}(x)\}\delta(t-\tau(x,\psi))\\
&+ \{\operatorname{div}[\mu_0(x)B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi) - \mu_0(x)\nabla A(x,\psi)] + \mu_0(x)\nabla B(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi)\\
&+ p(x)\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi) - p(x)c^{-2}(x)[B(x,\psi) + k'(0)A(x,\psi)]\\
&+ \operatorname{div}[p(x)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\}\theta_0(t-\tau(x,\psi)) + Lv - F_1(x,t),
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
F_1(x,t,\psi) = &\{\operatorname{div}[\mu_0(x)\nabla B(x,\psi) + p(x)\nabla A(x,\psi)\\
&- p(x)(A(x,\psi) + k'(0)B(x,\psi))\nabla\tau(x,\psi)]\}\theta_1(t-\tau(x,\psi))\\
&+ \int\limits_0^t \operatorname{div}\{p(x)(k(t-s)\nabla B(x,\psi) + k'(t-s)[\nabla A(x,\psi) - B(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi)]\\
&- k''(t-s)A(x,\psi)\nabla\tau(x,\psi))\theta_1(s-\tau(x,\psi))\}\,ds.
\end{aligned}
$$

Соотношения (1.1), (1.2) выполнены, если имеют место равенства

$$2\mu_0(x)\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi)+A(x,\psi)[\mathrm{div}(\mu_0(x)\nabla\tau(x,\psi)) - p(x)c^{-2}(x)]=\delta(x\cdot\nu(\psi)-1), \quad (3.1)$$

$$2\mu_0(x)\nabla B(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi)+B(x,\psi)[\mathrm{div}(\mu_0(x)\nabla\tau(x,\psi))-p(x)c^{-2}(x)] - \mathrm{div}[\mu_0(x)\nabla A(x,\psi)]+p(x)[2\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi)-k'(0)c^{-2}(x)A(x,\psi)] + A(x,\psi)\,\mathrm{div}[p(x)\nabla\tau(x,\psi)]=0, \quad (3.2)$$

$$Lv=F_1(x,t,\psi),\quad v|_{t<0}=0. \quad (3.3)$$

Из сделанных выше предположений о коэффициентах уравнения (1.1) следует, что для каждой тройки функций $\rho(x)$, $\mu_0(x)$, $p(x)$ существует число $d\in(0,1)$ такое, что в области $D_d=\{x\in D\mid |x|>1-d\}$ эти коэффициенты постоянны: $\rho(x)=\rho_0$, $\mu_0(x)=\mu_{00}$, $p(x)=0$. Рассмотрим равенство (3.1) в области $G_d=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x\cdot\nu(\psi)>1-d\}$. В этой области оно принимает вид

$$2\mu_0(x)\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi)+A(x,\psi)\mu_{00}\,\mathrm{div}(\nabla\tau(x,\psi))=\delta(x\cdot\nu(\psi)-1). \quad (3.4)$$

Функция $\tau(x,\psi)$ вычисляется в G_d по формуле $\tau(x,\psi)=|x\cdot\nu(\psi)-1|/c_0$, $c_0=\sqrt{\mu_{00}/\rho_0}$. Следовательно, $\nabla\tau(x,\psi)=\nu(\psi)/c_0$ для $x\cdot\nu(\psi)-1>0$ и $\nabla\tau(x,\psi)=-\nu(\psi)/c_0$ для $x\cdot\nu(\psi)-1<0$. Поэтому $\mathrm{div}(\nabla\tau(x,\psi))=2\delta(x\cdot\nu(\psi)-1)/c_0$. Значит, уравнение (3.4) выполнено в области G_d, если

$$A(x,\psi)=A_0:=\frac{c_0}{2\mu_{00}},\quad x\in G_d. \quad (3.5)$$

Аналогичные аргументы, связанные с рассмотрением равенства (3.2) в области G_d, приводят к заключению, что

$$B(x,\psi)=0,\quad x\in G_d. \quad (3.6)$$

В связи с этим достаточно построить амплитудные функции $A(x,\psi)$ и $B(x,\psi)$ только в области, дополнительной к G_d. Для удобства выполним это построение в более широкой области $G=\{x\in\mathbb{R}^2\mid x\cdot\nu(\psi)<1\}$, где $A(x,\psi)$ является решением граничной задачи

$$2\mu_0(x)\nabla A(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi)+A(x,\psi)[\mathrm{div}(\mu_0(x)\nabla\tau(x,\psi))-p(x)c^{-2}(x)]=0,\ x\in G;\qquad A|_{x\cdot\nu(\psi)=1}=A_0. \quad (3.7)$$

Преобразуем уравнение (3.7), разделив обе его части на $2\rho(x)$ и введя обозначение $\hat p(x)=p(x)/\mu_0(x)$. Тогда в этой области $A(x,\psi)$ является решением граничной задачи

$$c^2(x)\nabla\ln[A(x,\psi)\sqrt{\rho(x)}]\cdot\nabla\tau(x,\psi)+\frac{1}{2}[\mathrm{div}(c^2(x)\nabla\tau(x,\psi))-\hat p(x)]=0,\quad x\in G;\qquad A|_{x\cdot\nu(\psi)=1}=A_0. \quad (3.8)$$

Первое слагаемое дифференциального уравнения представляет собой производную по $d\tau$ вдоль геодезической римановой метрики. Поэтому несложно выписать явную формулу для решения задачи (3.8). Она имеет вид

$$A(x,\psi)=\frac{A_0\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho(x)}}\exp\left(a(x)\right),\qquad a(x,\psi)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(x,\psi)}[\hat p(\xi)-\mathrm{div}\left(c^2(\xi)\nabla\tau(\xi,\psi)\right)]\,d\tau,\quad x\in G, \quad (3.9)$$

где $\Gamma(x,\psi)$ — геодезическая, проходящая на плоскости переменных ξ_1, ξ_2 через точку x и ортогональная прямой $\xi\cdot\nu(\psi) = 1$, $d\tau$ — элемент римановой длины. При этом $A(x,\psi) \in \mathbf{C}^2(D)$ для каждого фиксированного значения $\psi \in [0, 2\pi]$. Кроме того, $A(x,\psi)$ всюду положительна.

Функция $B(x,\psi)$ является в области G решением дифференциального уравнения (3.2), удовлетворяющим краевому условию (3.6). Несколько преобразуем уравнение (3.2), произведя в нем замены $B(x,\psi) = A(x,\psi)\widehat{B}(x,\psi)$, $p(x) = \rho(x)c^2(x)\hat{p}(x)$, $\mu_0(x) = c^2(x)\rho(x)$ и разделив после этого обе части получившегося равенства на $\rho(x)A(x,\psi)$. В результате для функции $\widehat{B}(x,\psi)$ получается уравнение

$$\begin{aligned}2c^2(x)\nabla\widehat{B}(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi) + \widehat{B}(x,\psi)\{&\operatorname{div}(c^2(x)\nabla\tau(x,\psi))\\ &+ 2c^2(x)\nabla\ln[A(x,\psi)\sqrt{\rho(x)}]\cdot\nabla\tau(x,\psi) - \hat{p}(x)\}\\ &- \operatorname{div}[c^2(x)\nabla\ln A(x,\psi)] - c^2(x)\nabla\ln A(x,\psi)\cdot\nabla\ln\rho(x)\\ &+ \hat{p}(x)(2c^2(x)\nabla\ln[A(x,\psi)\sqrt{\rho(x)}]\cdot\nabla\tau(x,\psi) - k'(0))\\ &- c^2(x)|\nabla\ln A(x,\psi)|^2 + \operatorname{div}[c^2(x)\hat{p}(x)\nabla\tau(x,\psi)] = 0. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Замечая, что выражение в фигурных скобках в силу (3.8) обращается в нуль, а для подсчета градиента функции $\ln A(x,\psi)$ справедлива формула

$$\nabla\ln A(x,\psi) = \nabla a(x,\psi) + \nabla q(x),$$

в которой $q(x) = \ln\sqrt{\rho(x)}$, преобразуем уравнение (3.2) к виду

$$2c^2(x)\nabla\widehat{B}(x,\psi)\cdot\nabla\tau(x,\psi) + \widehat{C}(x,\psi) + h(x) = 0. \qquad (3.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\widehat{C}(x,\psi) = \hat{p}(x)[&\hat{p}(x) - \operatorname{div}(c^2(x)\nabla\tau(x,\psi)) - k'(0)]\\ &+ \operatorname{div}[c^2(x)\hat{p}(x)\nabla\tau(x,\psi)] - \operatorname{div}[c^2(x)\nabla a(x,\psi)] - c^2(x)|\nabla a(x,\psi)|^2, \qquad (3.12)\end{aligned}$$

$$h(x) = \operatorname{div}[c^2(x)\nabla q(x)] + c^2(x)|\nabla q(x)|^2 = \operatorname{div}[c^2(x)\nabla(\sqrt{\rho(x)})]/\sqrt{\rho(x)}. \qquad (3.13)$$

Из уравнения (3.11) и граничного условия (3.6) получаем формулу для вычисления $\widehat{B}(x,\psi)$ в виде

$$\widehat{B}(x,\psi) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma(x,\psi)}[\widehat{C}(\xi,\psi)) + h(\xi)]\,d\tau, \quad x \in G. \qquad (3.14)$$

Следовательно,

$$B(x,\psi) = -\frac{1}{2}A(x,\psi)\int\limits_{\Gamma(x,\psi)}[\widehat{C}(\xi,\psi)) + h(\xi)]\,d\tau. \qquad (3.15)$$

§ 4. Декомпозиция исходной обратной задачи

Из приведенных в § 3 формул и формул (2.5) следует распадение исходной задачи на три отдельные задачи, которые решаются последовательно одна за другой. Выпишем их более детальные (по сравнению с § 2) формулировки.

Задача 1. *Найти $c(x) = \sqrt{\mu_0(x)/\rho(x)}$ внутри D по функции $\tau(x,\psi)$, $(x,\psi) \in \Upsilon$, $\Upsilon := \{(x,\psi) \mid x \in \partial_- D,\ \psi \in [0,2\pi]\}$. Функция $\tau(x,\psi)$ является решением задачи Коши* (2.1).

Эта задача нелинейна. Ниже приведем оценку устойчивости ее решения, из которой будет следовать и единственность ее решения.

После того как функция $c(x)$ найдена, геодезические линии $\Gamma(x,\psi)$ и функция $\tau(x,\psi)$ становятся известными для всех $x \in D$. Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задача 2. *При заданных функциях $c(x)$ и $A(x,\psi)$ для $(x,\psi) \in \Upsilon$ найти функцию $\hat{p}(x) = p(x)/\mu_0(x)$.*

Воспользуемся формулами (3.9). Положим в этих формулах $x \in \partial_- D$. Тогда $\rho(x) = \rho_0$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma(x,\psi)} \hat{p}(\xi)\, d\tau = g_1(x,\psi), \quad (x,\psi) \in \Upsilon, \tag{4.1}$$

в котором правая часть представляет собой известную функцию

$$g_1(x,\psi) = 2(\ln A(x,\psi) - \ln A_0) + \int\limits_{\Gamma(x,\psi)} \operatorname{div}\,(c^2(\xi)\nabla\tau(\xi,\psi))\, d\tau.$$

Таким образом, задача приводится к линейной задаче интегральной геометрии: найти подынтегральную функцию по заданным от нее интегралам вдоль семейства известных геодезических линий. Оценка устойчивости решения этой задачи приведена ниже. Из полученной оценки вытекает единственность решения задачи.

Рассмотрим задачу, связанную с определением плотности.

Задача 3. *При известных $c(x)$, $\hat{p}(x)$ и функциях $A(x,\psi)$, $B(x,\psi)$, заданных для $(x,\psi) \in \Upsilon$, найти $\rho(x)$ внутри D.*

Воспользуемся в этом случае формулами (3.15), положив в них $x \in \partial_- D$. Тогда получим равенство

$$\int\limits_{\Gamma(x,\psi)} h(\xi)\, d\tau = g_2(x,\psi), \quad (x,\psi) \in \Upsilon, \tag{4.2}$$

в котором

$$g_2(x,\psi) = -2\frac{B(x,\psi)}{A(x,\psi)} - \int\limits_{\Gamma(x,\psi)} \widehat{C}(\xi,\psi)\, d\tau,$$

а функция $\widehat{C}(x,\psi)$ определена формулой (3.11) и известна для всех значений аргументов.

Отсюда следует, что для нахождения функции $h(x)$ в области D возникает в точности такая же задача интегральной геометрии, как и ранее. Если она решена и функция $h(x)$ найдена, то из формулы (3.13) следует линейное уравнение эллиптического типа для функции $\sqrt{\rho(x)}$:

$$\operatorname{div}[c^2(x)\nabla(\sqrt{\rho(x)})] - h(x)\sqrt{\rho(x)} = 0, \quad x \in D. \tag{4.3}$$

Кроме того, на границе области D функция $\rho(x)$ согласно предположению удовлетворяет граничным условиям

$$\rho(x) = \rho_0, \quad \nabla\rho(x) = 0, \quad x \in \partial D. \tag{4.4}$$

Известно, что решение эллиптического уравнения с заданными на границе компактной области данными Коши единственно. Поэтому решение задачи 3 также единственно.

Таким образом, из совокупных фактов о единственности решения всех сформулированных выше задач вытекает теорема единственности решения исходной обратной задачи. Вопрос о численных методах построения решений последовательности этих задач остается за пределами данной статьи так же, как и вопрос об оценке устойчивости решения обратной задачи в целом. Ниже мы приводим оценки устойчивости для задачи 1 и задачи интегральной геометрии.

Пусть $(\rho_k, \mu_{0k}, p_k) \in \mathscr{Q}(m, M)$, $k = 1, 2$. Обозначим $c_k(x) = \sqrt{\mu_{0k}(x)/\rho_k(x)}$, $k = 1, 2$,

$$\tilde{c}(x) = c_1(x) - c_2(x), \quad \tilde{\tau}(x, \psi) = \tau_1(x, \psi) - \tau_2(x, \psi).$$

1. Оценка функции $\tilde{c}(x)$. Воспользуемся равенствами (2.1) и запишем их для $\tau = \tau_k$, $c = c_k$:

$$|\nabla \tau_k(x, \psi)|^2 = \frac{1}{c_k^2(x)}, \quad \tau_k|_{x \cdot \nu(\psi) = 1} = 0, \quad k = 1, 2. \tag{4.5}$$

Из этих равенств вытекают представления

$$\nabla \tau_k(x, \psi) = \frac{1}{c_k(x)} \nu(\theta_k(x, \psi)), \quad \nu(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \tag{4.6}$$

в которых $\nu(\theta_k(x, \psi))$ — единичный вектор, направленный в точке x вдоль геодезической метрики $d\tau = |dx|/c_k(x)$. Из регулярности семейства геодезических внутри D следует, что функция $\theta_k(x, \psi)$ монотонно возрастает с ростом ψ и $\theta_k(x, \psi + 2\pi) = \theta_k(x, \psi) + 2\pi$. Из равенств (4.5) вытекают соотношения

$$\nabla \tilde{\tau}(x, \psi) \cdot (\nabla \tau_1(x, \psi) + \nabla \tau_2(x, \psi)) = -\frac{\tilde{c}(x)(c_1(x) + c_2(x))}{c_1^2(x) c_2^2(x)}, \quad \tilde{\tau}|_{x \cdot \nu(\psi) = 1} = 0. \tag{4.7}$$

Так как $c_1(x) = c_2(x) = c_0$ вне D, то $\tilde{\tau}(x, \psi) = 0$ для $x \in \partial_+ D$, $\partial_+ D = \{x \in \partial D \mid x \cdot \nu(\psi) > 0\}$. Таким образом, функция $\tilde{\tau}(x, \psi)$ задана для всех $(x, \psi) \in \partial D \times [0, 2\pi]$. Используя равенства (4.6), запишем первое соотношение (4.7) в виде

$$\nabla \tilde{\tau}(x, \psi) \cdot \nu_1(\theta_1(x, \psi)) + \frac{1}{c_2(x)} \cos\tilde{\theta}(x, \psi) - \frac{c_1(x)}{c_2^2(x)} = -\frac{\tilde{c}(x)(c_1(x) + c_2(x))}{c_1(x) c_2^2(x)},$$
$$(x, \psi) \in D \times [0, 2\pi],$$

где $\tilde{\theta}(x, \psi) = \theta_1(x, \psi) - \theta_2(x, \psi)$. Дифференцируя это равенство по ψ, находим, что

$$\frac{\partial}{\partial \psi} [\nabla \tilde{\tau}(x, \psi) \cdot \nu_1(\theta_1(x, \psi))] - \frac{\sin\tilde{\theta}(x, \psi)}{c_2(x)} \frac{\partial \tilde{\theta}(x, \psi)}{\partial \psi} = 0, \quad (x, \psi) \in D \times [0, 2\pi].$$

Умножим последнее равенство на

$$2\nabla \tilde{\tau}(x, \psi) \cdot \nu_1^{\perp}(\theta_1(x, \psi)), \quad \nu_1^{\perp}(\theta_1) := (-\sin\theta_1, \cos\theta_1)$$

и воспользуемся тождеством Мухометова

$$2(\nabla \tilde{\tau}(x, \psi) \cdot \nu_1^{\perp}(\theta_1(x, \psi))) \frac{\partial}{\partial \psi} [\nabla \tilde{\tau}(x, \psi) \cdot \nu_1(\theta_1(x, \psi))]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\psi}[(\nabla\tilde\tau(x,\psi)\cdot\nu_1^{\perp}(\theta_1(x,\psi)))(\nabla\tilde\tau(x,\psi)\cdot\nu_1(\theta_1(x,\psi)))]$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_2}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_1}\right]+|\nabla\tilde\tau(x,\psi)|^2\frac{\partial\theta_1(x,\psi)}{\partial\psi}$$

и равенством

$$-2(\nabla\tilde\tau(x,\psi)\cdot\nu_1^{\perp}(\theta_1(x,\psi)))\frac{\sin\tilde\theta(x,\psi)}{c_2(x)}\frac{\partial\tilde\theta(x,\psi)}{\partial\psi}=\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{\tilde\theta(x,\psi)}{c_2^2(x)}-\frac{\sin(2\tilde\theta(x,\psi))}{2c_2^2(x)}\right].$$

Тогда получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left[(\nabla\tilde\tau(x,\psi)\cdot\nu_1^{\perp}(\theta_1(x,\psi)))(\nabla\tilde\tau(x,\psi)\cdot\nu_1(\theta_1(x,\psi)))+\frac{\tilde\theta(x,\psi)}{c_2^2(x)}-\frac{\sin(2\tilde\theta(x,\psi))}{2c_2^2(x)}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_2}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_1}\right]+|\nabla\tilde\tau(x,\psi)|^2\frac{\partial\theta_1(x,\psi)}{\partial\psi}=0.$$

Интегрируя его по $x\in D$ и по ψ вдоль отрезка $[0,2\pi]$ и используя периодичность подынтегральных функций по переменной ψ, находим, что

$$\int_0^{2\pi}\int_D\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_2}\right]-\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_1}\right]\right\}dxd\psi$$
$$+\int_D\int_0^{2\pi}|\nabla\tilde\tau(x,\psi)|^2\frac{\partial\theta_1(x,\psi)}{\partial\psi}\,d\psi dx=0.$$

Учитывая формулу Грина, получаем

$$\int_0^{2\pi}\int_{\partial D}\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial\psi}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_2}\cos(n,x_1)-\frac{\partial\tilde\tau(x,\psi)}{\partial x_1}\cos(n,x_2)\right]dsd\psi$$
$$+\int_D\int_0^{2\pi}|\nabla\tilde\tau(x,\psi)|^2\frac{\partial\theta_1(x,\psi)}{\partial\psi}\,d\psi dx=0, \tag{4.8}$$

где $\cos(n,x_1)$, $\cos(n,x_2)$ — направляющие косинусы вектора внешней нормали к ∂D в точке $x\in\partial D$, ds — элемент длины дуги ∂D. Пусть $x=(\cos\varphi,\sin\varphi)=x(\varphi)\in\partial D$. Тогда $ds=d\varphi$ и $\cos(n,x_1)=\cos\varphi$, $\cos(n,x_2)=\sin\varphi$. Поэтому имеет место равенство

$$\frac{\partial\tilde\tau(x(\varphi),\psi)}{\partial\psi}\left[\frac{\partial\tilde\tau(x(\varphi),\psi)}{\partial x_2}\cos(n,x_1)-\frac{\partial\tilde\tau(x(\varphi),\psi)}{\partial x_1}\cos(n,x_2)\right]$$
$$=\frac{\partial\tilde\tau(x(\varphi),\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x(\varphi),\psi)}{\partial\varphi},$$

с учетом которого запишем формулу (4.8) в виде

$$\int_D\int_0^{2\pi}|\nabla\tilde\tau(x,\psi)|^2\frac{\partial\theta_1(x,\psi)}{\partial\psi}\,d\psi dx=-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde\tau(x(\varphi),\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde\tau(x(\varphi),\psi)}{\partial\varphi}\,d\varphi d\psi. \tag{4.9}$$

С другой стороны, из равенств (4.6), (4.7) следует оценка

$$\tilde c^2(x)\le c_1^2(x)c_2^2(x)|\nabla\tilde\tau(x,\psi)|^2\le C|\nabla\tilde\tau(x,\psi)|^2, \tag{4.10}$$

в которой C — постоянная, зависящая только от m и M. Используя неотрицательность функции $\partial\theta_1(x,\psi)/\partial\psi$, вытекающую из регулярности семейства геодезических внутри D, из соотношений (4.9), (4.10) выводим оценку

$$2\pi\int\limits_D \tilde{c}^2(x)\,dx \le -C\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{\tau}(x(\varphi),\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial\tilde{\tau}(x(\varphi),\psi)}{\partial\varphi}\,d\varphi d\psi,$$

или

$$\|\tilde{c}\|_{\mathbf{L}^2(D)} \le C\|\tilde{\tau}\|_{\mathbf{H}^1(\Upsilon)}, \tag{4.11}$$

с некоторой новой постоянной $C = C(m,M)$. Полагая в этом неравенстве $\tilde{\tau}(x,\psi) \equiv 0$ для $(x,\psi) \in \Upsilon$, получаем, что $\tilde{c}(x) \equiv 0$. Это означает единственность решения обратной кинематической задачи.

2. Оценка решения задачи интегральной геометрии. Пусть функция $v(x)$ неизвестна внутри D и известна вне D. Рассмотрим задачу решения интегрального уравнения

$$\int\limits_{\Gamma(x,\psi)} v(\xi)\,d\tau = g(x,\psi), \quad (x,\psi) \in \partial D \times [0,2\pi], \tag{4.12}$$

в котором функция $g(x,\psi)$ задана. Уравнения (4.1), (4.2) являются уравнениями именно такого типа, так как для $(x,\psi) \in \Upsilon$ соответствующие интегралы заданы, а для $x \in \partial_+ D$, $\psi \in [0,2\pi]$ они вычисляются как интегралы от известной функции.

Введем функцию

$$w(x,\psi) = \int\limits_{\Gamma(x,\psi)} v(\xi)\,d\tau, \quad (x,\psi) \in D \times [0,2\pi].$$

Она, очевидно, удовлетворяет соотношению

$$w(x,\psi) = g(x,\psi), \quad (x,\psi) \in \partial D \times [0,2\pi], \tag{4.13}$$

и условию 2π-периодичности по переменной ψ, а внутри области $D \times [0,2\pi]$ — равенству

$$\nabla w(x,\psi)\cdot\nu(\theta) = v(x), \tag{4.14}$$

в котором $\nu(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ — единичный вектор касательной к геодезической $\Gamma(x,\psi)$. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\psi}[\nabla w(x,\psi)\cdot\nu(\theta)] = 0, \quad (x,\psi) \in D \times [0,2\pi]. \tag{4.15}$$

Воспользуемся опять тождеством Мухометова

$$\begin{aligned}
2(\nabla w(x,\psi)\cdot\nu^{\perp}(\theta(x,\psi)))&\frac{\partial}{\partial\psi}[\nabla w(x,\psi)\cdot\nu(\theta(x,\psi))] \\
&= \frac{\partial}{\partial\psi}[(\nabla w(x,\psi)\cdot\nu^{\perp}(\theta(x,\psi)))(\nabla w(x,\psi)\cdot\nu(\theta(x,\psi)))] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial w(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial w(x,\psi)}{\partial x_2}\right] - \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial w(x,\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial w(x,\psi)}{\partial x_1}\right] \\
&\qquad + |\nabla w(x,\psi)|^2\frac{\partial\theta(x,\psi)}{\partial\psi}
\end{aligned}$$

и проинтегрируем получившееся равенство по $x \in D$ и по ψ вдоль отрезка $[0, 2\pi]$. Используя периодичность подынтегральных функций по переменной ψ и формулу Грина, приходим к равенству

$$\int\limits_D \int\limits_0^{2\pi} |\nabla w(x,\psi)|^2 \frac{\partial\theta(x,\psi)}{\partial\psi}\, d\psi dx = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial w(x(\varphi),\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial w(x(\varphi),\psi)}{\partial\varphi}\, d\varphi d\psi,$$

полностью аналогичному (4.9). Отсюда с учетом (4.14) получаем оценку решения задачи интегральной геометрии

$$\int\limits_D v^2(x)\, dx \le -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial g(x(\varphi),\psi)}{\partial\psi}\frac{\partial g(x(\varphi),\psi)}{\partial\varphi}\, d\varphi d\psi, \tag{4.16}$$

Так как задача (4.12) линейна и в силу оценки (4.16) функции $g(x(\varphi),\psi) \equiv 0$ соответствует $v(x) \equiv 0$, решение задачи интегральной геометрии единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
2. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Appl. Anal. 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.
3. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 246–253.
4. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача вязкоупругости // Докл. РАН. 2011. Т. 440, № 3. С. 310–313.
5. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
6. *Lorenzi A., Romanov V. G.* Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
7. *Романов В. Г.* Трехмерная обратная задача вязкоупругости // Докл. РАН. 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.
8. *Мухометов Р. Г.* Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32–35.

Статья поступила 29 марта 2012 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru