Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 517.929.8

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

М. С. Сгибнев

Аннотация. Получено асимптотическое разложение для решения неоднородного дифференциально-разностного уравнения порядка m запаздывающего или нейтрального типа. Учтено влияние корней характеристического уравнения. Установлена точная асимптотика остатка в зависимости от асимптотических свойств свободного члена уравнения.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, уравнение запаздывающего типа, уравнение нейтрального типа, асимптотическое поведение, характеристическое уравнение.

§ 1. Введение

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение общего вида порядка $m > 0$

$$\sum_{j=0}^{m} \int_0^h z^{(j)}(t-u)\,\mu_j(du) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

в котором $z(t)$ — неизвестная функция, $h > 0$, μ_j, $j = 0, \dots, m$, — конечные комплекснозначные меры, сосредоточенные на $[0, h]$, а известная функция $f(t)$ такова, что интеграл $\int\limits_0^\infty e^{\gamma t}|f(t)|\,dt$ конечен при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$. Зададим начальное условие в виде

$$z(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{2}$$

где функция $g(t)$ имеет $m-1$ непрерывных производных на отрезке $[-h, 0]$, причем функция $g^{(m-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на $[-h, 0]$ и $g^{(m)}(t) \in L_1(-h, 0)$. Напомним, что абсолютно непрерывная функция $h(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет производную почти всюду (п. в.) [1, гл. IX, § 2] и $h(x) - h(a) = \int\limits_a^x h'(t)\,dt$, $x \in [a, b]$.

В монографии [2] дана классификация дифференциально-разностных уравнений следующего вида ($\omega > 0$):

$$a_0 u'(t) + a_1 u'(t-\omega) + b_0 u(t) + b_1 u(t-\omega) = f(t). \tag{$*$}$$

Определение 1. Уравнение вида ($*$) называется *уравнением запаздывающего типа*, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 = 0$, *нейтрального типа*, если $a_0 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$, и *опережающего типа*, если $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Подобная классификация дифференциально-разностных уравнений первого порядка приведена и в другой классической монографии [3, гл. 1, § 1.2, 1.7].

По поводу уравнений первого порядка запаздывающего и нейтрального типов говорится (см. [3, введение]): «Простейший тип зависимости от прошлого в дифференциальном уравнении осуществляется через переменную состояния, а не через ее производную. Это так называемые функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа или дифференциально-разностные уравнения запаздывающего типа. … Существует также большое количество приложений, в которых запаздывающий аргумент входит не только в переменную состояния, но и в ее производную. Это так называемые дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа.»

Приведем соответствующую классификацию для уравнений вида (1).

Определение 2. Уравнение вида (1) называется *уравнением запаздывающего типа*, если $\mu_m(\{0\}) \neq 0$ и сужение $\mu_m|_{(0,h]}$ меры μ_m на $(0,h]$ равно нулю, *нейтрального типа*, если $\mu_m(\{0\}) \neq 0$ и $\mu_m|_{(0,h]} \neq 0$, и *опережающего типа*, если $\mu_m(\{0\}) = 0$, $\mu_m|_{(0,h]} \neq 0$ и хотя бы одно из чисел $\mu_j(\{0\})$, $j = 0, \dots, m-1$, не равно нулю.

В работе предполагается, что мера μ_m имеет атом в нуле: $\mu_m(\{0\}) \neq 0$.

Итак, мы рассматриваем дифференциально-разностные уравнения вида (1) запаздывающего и нейтрального типов.

Определение 3. Функция $z(t)$, $t \geq -h$, называется *решением задачи* (1), (2), если $z(t)$ непрерывно дифференцируема $m-1$ раз, функция $z^{(m-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a,b] \subset [-h,\infty)$ и $z(t)$ удовлетворяет уравнению (1) п. в. и начальному условию (2).

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения решения $z(t)$ при $t \to \infty$.

Ранее в [4] изучалось близкое уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{kj} z^{(j)}(t-h_k) + \sum_{j=0}^{m} \int_0^h B_j(u) z^{(j)}(t-u)\, du = f(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

в котором $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, $a_{kj} \in \mathbb{C}$, $B_j(t) \in L_2(0,h)$, $j = 0, \dots, m$, $k = 0, \dots, n$. Уравнение (3) — частный случай уравнения (1): достаточно в (1) положить $\mu_j(du) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{kj} \delta_{h_k}(du) + B_j(u)\, du$, где δ_{h_k} — атомические меры массы 1, сосредоточенные в точках h_k, $k = 0, \dots, n$. Для дифференциально-разностных уравнений (3) нейтрального типа (коэффициенты a_{0m} и a_{nm} отличны от нуля) в [4] получены неулучшаемые (в определенном смысле) оценки норм $\|z\|$ решений $z(t)$ в пространствах Соболева $W_2^m(T-h,T)$ при любом $T > h$; при этом предполагалось, что $f(t) \in L_2(0,T)$ для любого $T > 0$ и $g(t) \in W_2^m(-h,0)$.

В [5] рассматривалось уравнение

$$\sum_{j=0}^{m} \int_0^h u^{(j)}(t-\theta)\, d\sigma_j(\theta) = 0, \ t > h, \quad u(t) = u_0(t), \ t \in [0,h], \tag{4}$$

где $\sigma_j(\theta)$ — функции ограниченной вариации на $[0,h]$ и $u_0 \in W_2^m(0,h)$. С точностью до сдвига аргумента уравнение (4) совпадает с уравнением (1), в котором $f(t) \equiv 0$. В [5] получены оценки для нормы $\|u\|$ решения u в пространствах $W_2^m(T,T+h)$ при достаточно больших $T > 0$ с условием $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$.

С современным состоянием различных аспектов теории функционально-разностных уравнений в пространствах Соболева можно ознакомиться в [6].

В настоящей статье предлагается иной подход к изучению асимптотического поведения при $t \to \infty$ решения $z(t)$ уравнения (1), в котором мера μ_m удовлетворяет весьма общему условию ($\mathfrak{S}$) (см. начало § 5). Устанавливается разложение

$$z(t) = \sum_{j=1}^{l} P_j(t) e^{-s_j t} + r(t),$$

где s_j, $j = 1, \dots, l$, — корни характеристического уравнения (6), $P_j(t)$, $j = 1, \dots, l$, — однозначно определяемые полиномы степеней меньших, чем кратности соответствующих корней s_j, а остаток $r(t)$ «наследует» асимптотические свойства исходной функции $f(t)$ в следующем смысле. Если для некоторой подходящей функции сравнения $\sigma(t)$ существует предел $\mathscr{L}(f) := \lim\limits_{t\to\infty} f(t)/\sigma(t)$, то будет существовать и предел $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)/\sigma(t)$, который может быть выражен в явном виде через величину $\mathscr{L}(f)$. В § 2 выводится характеристическое уравнение для уравнения (1) и приводится конкретный вид искомого асимптотического разложения для решения уравнения (1). В § 3 даются необходимые сведения из теории банаховых алгебр функций, обладающих одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности. В § 4 приводятся теоремы о преобразованиях Лапласа таких функций. В § 5 формулируется и доказывается основной результат (см. теорему 4). В § 6 даны доказательства лемм.

§ 2. Характеристическое уравнение

Выпишем характеристическое уравнение для дифференциально-разностного уравнения (1). Обозначим через $\hat{f}(s)$ преобразование Лапласа функции $f(t)$:

$$\hat{f}(s) := \int\limits_0^\infty e^{st} f(t)\, dt, \quad s \in \Pi(\gamma) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \le \gamma\}.$$

Допустим, что уравнение (1) имеет решение $z(t)$, суммируемое с весовой функцией $\exp(\gamma_1 t)$, $t \ge 0$, при некотором $\gamma_1 \le \gamma$:

$$\int\limits_0^\infty e^{\gamma_1 t} |z(t)|\, dt < \infty.$$

Потребуем, чтобы $z^{(j)}(t) e^{\gamma_1 t} \to 0$ при $t \to \infty$ для всех $j = 0, 1, \dots, m-1$. Переходя в уравнении (1) от фигурирующих в нем функций к их преобразованиям Лапласа и учитывая равенство

$$(z')^\wedge(s) := \int\limits_0^\infty e^{st} z'(t)\, dt = -s\hat{z}(s) - z(0),$$

получаем, что

$$\hat{z}(s) L(s) = M(s) + \hat{f}(s), \quad \operatorname{Re} s \le \gamma_1,$$

где

$$L(s) := \sum_{j=0}^{m} (-s)^j \hat{\mu}_j(s), \ M(s) := \sum_{j=0}^{m} \hat{\mu}_j(s) \sum_{k=0}^{j-1} (-s)^k z^{(j-1-k)}(0) - \sum_{j=0}^{m} (g^{(j)})^\wedge(s) \hat{\mu}_j(s).$$

Таким образом,

$$\hat{z}(s) = \frac{M(s) + \hat{f}(s)}{L(s)}, \quad s \in \Pi(\gamma_1). \tag{5}$$

Правая часть равенства (5) определена в точках полуплоскости $\Pi(\gamma)$, в которых знаменатель не обращается в нуль. Назовем уравнение

$$L(s) = 0 \tag{6}$$

характеристическим уравнением для (1). Корни уравнения (6) существенным образом влияют на асимптотику решения $z(t)$. Будем предполагать, что множество $\mathscr{Z} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ корней характеристического уравнения, лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, *конечно*, и что $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, $j = 1, \dots, l$. Мы не исключаем случая $\mathscr{Z} = \varnothing$. *Кратностью* корня s_j уравнения (6) называется положительное целое число m_j такое, что $L(s) = (s - s_j)^{m_j} g(s)$, $g(s_j) \neq 0$. Обозначим через $\sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{b_{jk}}{(s-s_j)^k}$ главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки $s = s_j \in \mathscr{Z}$ аналитической функции $\{M(s) + \hat{f}(s)\}/L(s)$. Пусть $\mathscr{E}_j$ — комплекснозначная мера с плотностью $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) e^{-s_j x}$ ($\mathbf{1}_A(x)$ — индикаторная функция множества A); преобразование Лапласа этой меры равно $\widehat{\mathscr{E}_j}(s) = 1/(s_j - s)$, $\operatorname{Re}(s - s_j) < 0$. Определим по индукции k-кратную свертку $\mathscr{E}_j^{k*}$ меры $\mathscr{E}_j$: $\mathscr{E}_j^{1*} := \mathscr{E}_j$, $\mathscr{E}_j^{(k+1)*} := \mathscr{E}_j^{k*} * \mathscr{E}_j$, $k \geq 1$. Положим также $\mathscr{E}_j^{0*} := \delta_0$. Функция $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) x^{k-1} e^{-s_j x}/(k-1)!$ равна плотности меры $\mathscr{E}_j^{k*}$. Выражение

$$\hat{z}(s) - \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k \frac{b_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

представляет собой преобразование Лапласа $\hat{r}(s)$ некоторой функции $r(t)$ — остатка искомого асимптотического разложения, которое будет выглядеть следующим образом:

$$z(t) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m_j} b_{jk} \frac{t^{k-1} e^{-s_j t}}{(k-1)!} + r(t). \tag{7}$$

Опишем класс функций, в терминах которых будут выражаться асимптотические свойства исходной функции $f(t)$ и остатка $r(t)$.

§ 3. Банаховы алгебры функций

Определение 4. Функция $\varphi(x)$, $x \geq 0$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x + y) \leq \varphi(x)\varphi(y)$, $x, y \geq 0$.

Имеют место соотношения [7, теорема 7.6.1]

$$\gamma := \gamma(\varphi) := \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \varphi(x)}{x} = \inf_{x > 0} \frac{\ln \varphi(x)}{x} < \infty. \tag{8}$$

Полумультипликативные функции, определенные на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$, обладают следующим полезным свойством (см. [7, теорема 7.4.1]):

$$M_\varphi := \sup_{|x| \leq 1} \varphi(x) < \infty. \tag{9}$$

В дальнейшем будем рассматривать полумультипликативные функции $\varphi(x)$, $x \geq 0$, для которых $\gamma > -\infty$. Обозначим через $\widetilde{S}_{\varphi+}$ совокупность всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$, $x \geq 0$, таких, что

$$\|f\|_\varphi = \int_0^\infty |f(x)|\varphi(x)\,dx < \infty.$$

Известно [8, § 18], что $\widetilde{S}_{\varphi+}$ — полное нормированное кольцо без единицы, под умножением двух элементов f и g из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ понимается их свертка $f * g(x)$. Будем отождествлять произвольную абсолютно непрерывную меру f на $[0,\infty)$ с классом эквивалентных функций $f(x)$, $x \geq 0$, каждая из которых может рассматриваться как производная Радона — Никодима этой меры относительно меры Лебега на $[0,\infty)$. Через $S_{\varphi+}$ обозначим банахову алгебру, полученную из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ присоединением единицы. В данном случае роль формальной единицы e и формальных сумм $\alpha e + f_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f_1 \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, играют мера δ_0 и обычные суммы мер $\alpha\delta_0 + f_1$:

$$(\alpha\delta_0 + f_1)(A) = \alpha\delta_0(A) + \int_A f_1(x)\,dx,$$

где A — произвольное борелевское подмножество $[0,\infty)$. Будем использовать соглашение: если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$, то $f(dx) := \alpha\delta_0(dx) + f_1(x)\,dx$. Вместо формального умножения элементов $S_{\varphi+}$ берется обычная свертка мер: если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x)$ и $g = \beta\delta_0 + g_1(x)$ — элементы $S_{\varphi+}$, где $f_1(x)$, $g_1(x) \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, то их свертка — это мера, задаваемая равенством

$$f * g := (\alpha\beta)\delta_0 + \alpha g_1(x) + \beta f_1(x) + f_1 * g_1(x).$$

Если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$, где $f_1(x) \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, то полагаем $\|f\|_\varphi := |\alpha| + \|f_1\|_\varphi$. Преобразование Лапласа $\hat{f}(s)$ элемента $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$ равно

$$\hat{f}(s) = \alpha + \int_0^\infty e^{sx} f_1(x)\,dx = \int_0^\infty e^{sx}\,f(dx);$$

интеграл абсолютно сходится в полуплоскости $\Pi(\gamma)$ в силу (8). Через $|f|$ обозначим полную вариацию меры f:

$$|f|(dx) := |\alpha|\delta_0(dx) + |f(x)|\,dx.$$

Пусть $\tau(x)$, $x \geq 0$, — ограниченная измеримая по Борелю положительная функция такая, что

$$\lim_{x\to\infty}\{\tau(x)\}^{1/x} = 1, \quad M_\tau := \sup_{x\geq 0, |y|\leq 1} \frac{\tau(x)}{\tau(x-y)} < \infty, \tag{10}$$

где $\tau(x) := \tau(0)$, $x < 0$. Для $f \in \widetilde{S}_{\varphi+}$ положим

$$P_\tau(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\geq 0} \frac{|f(x)|\varphi(x)}{\tau(x)}.$$

Обозначим

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \widetilde{\mathscr{A}}(\varphi,\tau) := \{f \in \widetilde{S}_{\varphi+} : P_\tau(f) < \infty\},$$

$$\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}} = \widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}(\varphi,\tau) := \left\{ f \in \widetilde{\mathscr{A}} : \text{ существует } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\varphi(x)}{\tau(x)} =: \mathscr{L}(f) \right\};$$

здесь и в дальнейшем соотношения с участием элементов из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ понимаются в том смысле, что в классе эквивалентных функций, представляющих рассматриваемый элемент $\widetilde{S}_{\varphi+}$, найдется хотя бы одна функция, для которой выполняется указанное соотношение. Допустим дополнительно, что функция $\tau(x)$ такова, что для всех f, $g \in \widetilde{\mathscr{A}}$ выполняется неравенство

$$P_\tau(f*g) \le C\{\|f\|_\varphi P_\tau(g) + \|g\|_\varphi P_\tau(f) + P_\tau(f)P_\tau(g)\}, \tag{11}$$

где $C \ge 1$ — константа, не зависящая от f и g. Функции $\tau(x)$, $x \ge 0$, удовлетворяющие соотношениям (10) и обеспечивающие выполнение условия (11), будем называть *нормирующими*. Для $f \in \widetilde{\mathscr{A}}$ положим $\|f\|_{\varphi,\tau} := C\{\|f\|_\varphi + P_\tau(f)\}$. Поскольку $\|f*g\|_\varphi \le \|f\|_\varphi\|g\|_\varphi$, имеем $\|f*g\|_{\varphi,\tau} \le \|f\|_{\varphi,\tau}\|g\|_{\varphi,\tau}$ для любых $f,g \in \widetilde{\mathscr{A}}$. Совокупность $\widetilde{\mathscr{A}}$ — полное коммутативное нормированное кольцо без единицы относительно нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\tau}$.

Следующее условие на положительную ограниченную измеримую по Борелю функцию $\tau(x)$ обеспечивает выполнение соотношения (11) при любой полумультипликативной весовой функции $\varphi(x)$: при всех $x \ge 0$

$$\min\left\{ \sup_{t\in[x/2,x]} \frac{\tau(t)}{\tau(x)},\ \frac{1}{\tau(x)} \int_0^{x/2} \tau(x-y)\tau(y)\,dy \right\} \le C_1 < \infty;$$

здесь C_1 — константа.

Будем предполагать, что $\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$ — замкнутое подкольцо нормированного кольца $\widetilde{\mathscr{A}}$ и выполняется соотношение

$$\mathscr{L}(f*g) = \mathscr{L}(f)\hat{g}(\gamma) + \mathscr{L}(g)\hat{f}(\gamma) \tag{12}$$

для любых $f,g \in \widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$. Через $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ будем обозначать банаховы алгебры, полученные из $\widetilde{\mathscr{A}}$, $\widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$ присоединением единицы δ_0. (В обозначениях работы [9] $\mathscr{A} = S_{\varphi+}(\tau)$, $\mathscr{A}_{\mathscr{L}} = S_{\varphi+}(\tau,0)$.) Если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, где $f_1(x) \in \widetilde{\mathscr{A}_{\mathscr{L}}}$, то полагаем $\mathscr{L}(f) := \mathscr{L}(f_1)$; в частности, $\mathscr{L}(\delta_0) = 0$.

Пусть $\varphi(x)$, $x \ge 0$, — полумультипликативная функция и $\tau(x)$, $x \ge 0$, — нормирующая функция. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x:\,x\ge 2n} \frac{1}{\tau(x)} \int_n^{x/2} \tau(x-y)\tau(y)\,dy = 0, \tag{13}$$

$$\sup_{x\ge 0} \sup_{t\in[x/2,x]} \frac{\tau(t)}{\tau(x)} < \infty, \tag{14}$$

и для любого $y \in \mathbb{R}$ существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)\tau(x-y)/\{\varphi(x-y)\tau(x)\}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)\tau(x-y)}{\varphi(x-y)\tau(x)} = \exp(\gamma y), \tag{15}$$

совокупность $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ — банахова подалгебра алгебры $\mathscr{A}$ и выполняется соотношение (12) [9].

Следующая теорема доказана в [9, теорема 3, п. 5].

Теорема 1. *Предположим, что $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ — банахова подалгебра алгебры $\mathscr{A}$ и для всех $f, g \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ справедливо равенство* (12). *Пусть M — максимальный идеал в $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$. Тогда существует максимальный идеал M_1 в $S_{\varphi+}$ такой, что*

$$M = M_1 \cap \mathscr{A}_{\mathscr{L}}.$$

И наоборот, если M_1 — максимальный идеал в $S_{\varphi+}$, то $M = M_1 \cap \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ — максимальный идеал в $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$.

Приведем еще один набор наглядных условий на полумультипликативную функцию $\varphi(x)$ и нормирующую функцию $\tau(x)$, при которых справедлива теорема 1: для любого $y \in \mathbb{R}$ существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)/\varphi(x-y)$ (этот предел равен $\exp(\gamma y)$);

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tau(x+y)}{\tau(x)} = 1 \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}; \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tau * \tau(x)}{\tau(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\tau(x)} \int\limits_0^x \tau(x-y)\tau(y)\, dy = 2.$$

При этих условиях справедливы соотношения (13) и (15). Следовательно, $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ — банахова подалгебра алгебры $\mathscr{A}$ и выполняется соотношение (12).

Замечание 1. Положительная функция $L(x)$, $x \geq 0$, называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $L(tx)/L(x) \to 1$ при $x \to \infty$ и любом $t > 0$; функция $R(x) = x^\beta L(x)$ называется *правильно меняющейся с показателем* β [10, § VIII.8]. Нетрудно показать, используя представление для медленно меняющихся функций (см. [10, § VIII.9]), что функция $\tau(x) = x^\alpha L(x)$, где $L(x)$ медленно меняется на бесконечности, удовлетворяет как условию (10), так и условию (16) после изменения ее, в случае необходимости, на некотором конечном отрезке. Таким образом, если полумультипликативная функция $\varphi(x)$ такова, что существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)/\varphi(x-y) = \exp(\gamma y)$ для любого $y \in \mathbb{R}$, то для такой пары функций $\varphi(x)$ и $\tau(x)$ совокупность $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ — банахова подалгебра алгебры $\mathscr{A}$ и выполняется соотношение (12), стало быть, справедливо заключение теоремы 1. Отметим также, что если $\int\limits_0^\infty \tau(x)\, dx = \infty$, то $\mathscr{L}(f) = 0$ для любого $f \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$. В дальнейшем при рассмотрении банаховых алгебр $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ будем всегда предполагать, что $\int\limits_0^\infty \tau(x)\, dx < \infty$, не оговаривая этого особо. Для правильно меняющихся функций $\tau(x) = x^\alpha L(x)$ интеграл $\int\limits_A^\infty x^\alpha L(x)\, dx$, $A > 0$, сходится при $\alpha < -1$ и расходится при $\alpha > -1$ [10, § VIII.9, лемма]. В пограничном случае $\alpha = -1$ интеграл $\int\limits_A^\infty x^{-1} L(x)\, dx$ может как сходиться, так и расходиться в зависимости от вида медленно меняющейся функции $L(x)$. Для наглядности можно представлять себе $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ как объект, образованный с показательной функцией в качестве $\varphi(x)$ и с правильно меняющейся функцией в качестве $\tau(x)$: $\varphi(x) = \exp(\gamma x)$ и $\tau(x) = x^\alpha L(x)$, где $\alpha \leq -1$, а $L(x)$ медленно меняется на бесконечности.

В заключение отметим совокупность $S(\varphi)$ комплексных функций множества (мер) ν, определенных и σ-аддитивных на всех ограниченных борелевских подмножествах $[0,\infty)$, таких, что $\|\nu\|_\varphi = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\,|\nu|(dx) < \infty$, где $|\nu|$ — полная вариация меры ν. *Сверткой* мер ν и $\varkappa$ называется мера

$$\nu * \varkappa(A) := \iint\limits_{\{x+y\in A,\, x,y\geq 0\}} \nu(dx)\,\varkappa(dy) = \int\limits_0^\infty \nu(A-y)\,\varkappa(dy) = \int\limits_0^\infty \varkappa(A-y)\,\nu(dy);$$

здесь A — произвольное ограниченное борелевское подмножество $[0,\infty)$ и множество $A-y$ определяется как $\{x\in\mathbb{R} : x+y\in A\}$. Совокупность $S(\varphi)$ — коммутативная комплексная банахова алгебра относительно нормы $\|\cdot\|_\varphi$ и свертки мер в качестве операции умножения, единицей в $S(\varphi)$ служит мера δ_0 (см. [7, § 4.16]).

§ 4. Теоремы о преобразованиях Лапласа

Нам понадобятся теоремы о преобразованиях Лапласа элементов введенных банаховых алгебр. Для удобства ссылок приведем две теоремы, доказанные в [11].

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$, $x\geq 0$, — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(x)/\exp(\gamma x)$, $x\geq 0$, не убывает. Предположим, что $f\in S_{\varphi+}$ и $\hat f(s_0)=0$, $\operatorname{Re} s_0<\gamma$. Положим $h(s):=\hat f(s)/(s-s_0)$, $s\in\Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке s_0 по непрерывности: $h(s_0):=\int\limits_0^\infty x\exp(s_0x)\,f(dx)$. Тогда функция $h(s)$, $s\in\Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\hat g(s)$ функции $g(x):=\int\limits_x^\infty e^{-s_0(x-y)}\,f(dy)$, $x\geq 0$, причем $g\in\widetilde S_{\varphi+}$ и $\varphi(x)g(x)\to 0$ при $x\to\infty$.*

Абсолютно непрерывная мера g, о которой идет речь в теореме 2, будет обозначаться через $T(s_0)f$.

Замечание 2. Для справедливости соотношения $g\in\widetilde S_{\varphi+}$ условие монотонности функции $\varphi(x)/\exp(\gamma x)$ в теореме 2 можно ослабить: достаточно потребовать, чтобы не убывала функция $\psi_1(x):=\varphi(x)/\exp(\rho_1x)$ при некотором $\rho_1\in(\operatorname{Re}s_0,\gamma)$. Или более óбщо: $\psi_1(x)\leq C\psi_1(y)$ при всех $y\geq x$ начиная с некоторого места, т. е. при всех x, y таких, что $y\geq x\geq x_0\geq 0$; здесь $C>0$ — постоянная. А для доказательства соотношения $\varphi(x)g(x)\to 0$, $x\to\infty$, достаточно предположить, чтобы не убывала функция $\psi(x):=\varphi(x)/\exp(\operatorname{Re}s_0x)$, или более óбщо: $\psi(x)\leq C\psi(y)$ при всех $y\geq x$ начиная с некоторого места.

Будем говорить, что положительная функция $\sigma(x)$, $x\in A$, *отделена от нуля на множестве* A, если $\sigma(x)\geq\delta(A)>0$ при всех $x\in A$.

Теорема 3. *Пусть $f=\alpha\delta_0+f_1(x)$, где $\alpha\in\mathbb{C}$ и $\int\limits_0^\infty |f_1(x)|e^{\gamma x}\,dx<\infty$ при некотором $\gamma\in\mathbb{R}$, и пусть $\sigma(x)$, $x\geq 0$, — измеримая по Борелю положительная функция такая, что $\sigma(x+u)/\sigma(x)\to e^{-\gamma u}$ при $x\to\infty$ и любом $u\in\mathbb{R}$. Предположим, что $\hat f(s_0)=0$ при $\operatorname{Re}s_0<\gamma$ и существует предел $\mathscr{L}_1(f_1):=\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)/\sigma(x)$. Положим $h(s)=\hat f(s)/(s-s_0)$, $s\in\Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке s_0 по непрерывности. Тогда функция $h(s)$, $s\in\Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\hat g(s)$ некоторой функции $g(x)$ такой, что $\int\limits_0^\infty |g(x)|e^{\gamma x}\,dx<\infty$ и*

$$\mathscr{L}_1(g)=\frac{\mathscr{L}_1(f_1)}{\gamma-s_0}.$$

Если, кроме того, функция $\sigma(x)$ отделена от нуля на конечных интервалах, то $\sup\limits_{x\ge 0}|g(x)|/\sigma(x)<\infty$.

Замечание 3. Легко видеть, что если ограниченная положительная функция $\sigma(x)$, $x\ge 0$, удовлетворяет условию

$$\sup_{x\ge 0,\,|y|\le 1}\frac{\sigma(x)}{\sigma(x-y)}<\infty,$$

то $\sigma(x)$ отделена от нуля на конечных промежутках $[a,b]\subset[0,\infty)$. Тем самым нормирующие функции $\tau(x)$ отделены от нуля на конечных промежутках. Далее, пусть $\varphi(x)$ — полумультипликативная функция, определенная на всей вещественной прямой. Если теперь $\sigma(x)=\tau(x)/\varphi(x)$, где $\tau(x)$ — нормирующая функция, то (см. (9) и (10))

$$\begin{aligned}\sup_{x\ge 0,|y|\le 1}\frac{\sigma(x)}{\sigma(x-y)}&=\sup_{x\ge 0,|y|\le 1}\frac{\tau(x)}{\tau(x-y)}\frac{\varphi(x-y)}{\varphi(x)}\\&\le\sup_{x\ge 0,|y|\le 1}\frac{\tau(x)}{\tau(x-y)}\varphi(-y)\le M_\tau M_\varphi<\infty;\end{aligned}$$

таким образом, функция $\sigma(x)=\tau(x)/\varphi(x)$ отделена от нуля на конечных промежутках $[a,b]\subset[0,\infty)$. Если же полумультипликативная функция $\varphi(x)$ определена на $[0,\infty)$ и функция $\varphi(x)/\exp(\gamma x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то $\varphi(x)$ можно продолжить на всю прямую с сохранением полумультипликативности, полагая $\varphi(x):=\exp(\gamma x)$, $x<0$. Таким образом, и в этом случае функция $\sigma(x)=\tau(x)/\varphi(x)$ отделена от нуля на конечных промежутках $[a,b]\subset[0,\infty)$.

Замечание 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 за исключением, быть может, равенства $\hat f(s_0)=0$. Положим

$$T(s_0)f(x):=\int\limits_x^\infty e^{-s_0(x-y)}\,f(dy),\quad x\ge 0.$$

Тогда $T(s_0)f(x)=T(s_0)f_0(x)$, $x\ge 0$, где элемент $f_0:=f-\hat f(s_0)\delta_0\in S_{\varphi+}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и мы получаем в общем случае, что

$$T(s_0)f\in\widetilde S_{\varphi+},\quad \{T(s_0)f\}^\wedge(s)=\frac{\hat f(s)-\hat f(s_0)}{s-s_0},\quad s\in\Pi(\gamma). \tag{17}$$

Аналогичное замечание имеет место применительно к теореме 3.

Если функция $f(x)$ определена на $[-h,\infty)$, то дополнительно положим

$$T(s_0)f(x):=-\int\limits_{-h}^x e^{-s_0(x-y)}\,f(dy),\quad x\in[-h,0).$$

Непосредственно проверяется, что формула (17) остается справедливой и в этом случае.

Примем следующее соглашение: если функция $f(x)$ определена на $[-h,\infty)$ и ее сужение $f|_{[0,\infty)}$ на $[0,\infty)$ принадлежит совокупности $\mathscr A_{\mathscr L}$, то будем считать, во избежание новых обозначений, что $f\in\mathscr A_{\mathscr L}$ и $\mathscr L(f):=\mathscr L(f|_{[0,\infty)})$. Заметим, что оператор $T(s_0)$ обладает следующими свойствами:

$$T(s_0)(f|_{[-h,0)})=(T(s_0)f)|_{[-h,0)},\quad T(s_0)(f|_{[0,\infty)})=(T(s_0)f)|_{[0,\infty)}.$$

Таким образом, если, например, $T(s_0)(f|_{[0,\infty)})\in\mathscr A_{\mathscr L}$, то в соответствии с указанным соглашением $T(s_0)f\in\mathscr A_{\mathscr L}$.

§ 5. Основной результат

Обозначим через μ^{k*} k-кратную свертку меры μ: $\mu^{1*} := \mu$, $\mu^{(k+1)*} := \mu^{k*} * \mu$, $k \geq 1$. Для произвольной меры μ на $\mathbb{R}$ обозначим через μ_c ее абсолютно непрерывную компоненту относительно меры Лебега, а через μ_s — ее сингулярную часть: $\mu_s := \mu - \mu_c$, т. е. $\mu_s = \mu_{\mathfrak{d}} + \mu_{\mathfrak{s}}$, где $\mu_{\mathfrak{d}}$ — дискретная компонента меры μ, а $\mu_{\mathfrak{s}}$ — ее сингулярная компонента в обычном смысле. Нам потребуется следующее условие, относящееся к сингулярности меры μ_m: при некотором целом $k \geq 1$

$$\int\limits_{0+}^{kh} e^{\gamma x} \left| \left(\mu_m^{k*}\right)_s \right| (dx) < \left| \mu_m^k(\{0\}) \right|. \tag{$\mathfrak{S}$}$$

Условие ($\mathfrak{S}$) выражает собой в определенном смысле доминирование старшей производной с аргументом без запаздывания над совокупным вкладом в уравнение старшей производной с запаздывающими аргументами. Уравнения запаздывающего типа автоматически удовлетворяют условию ($\mathfrak{S}$) при $k = 1$, так как в этом случае $\mu_m(\{0\}) \neq 0$ и $|\mu_m|((0, h]) = 0$. Заметим, что если $\mu_m(\{0\}) \neq 0$ и сужение μ_m на $(0, h]$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега, то условие ($\mathfrak{S}$) выполняется при $k = 1$. В случае уравнения (3) условие ($\mathfrak{S}$) выполняется при $|a_{0m}| > \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{km}|$. Условие ($\mathfrak{S}$), таким образом, налагает ограничения только на уравнения нейтрального типа.

Нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых проведены в § 6.

Лемма 1. *Предположим, что выполнено условие* ($\mathfrak{S}$). *Тогда множество корней характеристического уравнения* (6), *лежащих в полуплоскости* $\Pi(\gamma)$, *конечно.*

Лемма 2. *Пусть* $\varphi(t)$, $t \geq 0$, *— полумультипликативная функция такая, что функция* $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, *не убывает. Предположим, что* $\nu \in S(\varphi)$ *и* $\hat{\nu}(s_0) = 0$, *где* $\operatorname{Re} s_0 < \gamma$. *Тогда* $\hat{\nu}(s)/(s - s_0)$, $s \in \Pi(\gamma)$, *— преобразование Лапласа некоторой меры* $T(s_0)\nu \in S(\varphi)$.

Пусть $\mathscr{E}_\sigma$ — мера с плотностью $\mathscr{E}_\sigma(t) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) e^{-\sigma t}$.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(t)$, $t \geq 0$, *— полумультипликативная функция и* $\sigma > \gamma$, *где* γ *определяется соотношением* (8), *и пусть положительная функция* $\tau(x)$ *удовлетворяет первому соотношению в* (10). *Тогда*

$$\lim_{t \to \infty} \mathscr{E}_\sigma(t)\varphi(t)/\tau(t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \mathscr{E}_\sigma(t)\varphi(t) = 0.$$

Лемма 4. *Пусть* $\varphi(t)$, $t \geq 0$, *— полумультипликативная функция такая, что* $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, *— неубывающая функция. Предположим, что нормирующая функция* $\tau(t)$ *такова, что совокупность* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *— банахова подалгебра алгебры* $\mathscr{A}$, *для всех* f, $g \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *справедливо равенство* (12) *и для любого* $y \in \mathbb{R}$ *существует предел* (15). *Пусть* $g \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *и* μ *— мера, определенная на всех борелевских подмножествах* $[0, \infty)$, *такая, что* $\int\limits_0^\infty e^{\xi x} |\mu|(dx) < \infty$, *где* $\xi > \max(0, \gamma)$. *Тогда функция* $g * \mu(x) := \int\limits_0^x g(x - y)\, \mu(dy)$, $x \geq 0$, *— элемент банаховой алгебры* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *и* $\mathscr{L}(g * \mu) = \mathscr{L}(g)\hat{\mu}(\gamma)$.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(t)$, $t \geq 0$, — *полумультипликативная функция такая, что* $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, — *неубывающая функция. Предположим, что нормирующая функция* $\tau(t)$ *такова, что для любого* $y \in \mathbb{R}$ *существует предел* (15). *Пусть* $f \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *и* $g \in L_1(-h, 0)$. *Тогда сужение на* $[0, \infty)$ *свертки* $g * f(x) := \int\limits_{-h}^{0} f(x-y)g(y)\,dy$, $x \in \mathbb{R}$, *является элементом совокупности* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, *причем*

$$\lim_{x\to\infty} g * f(x)\varphi(x)/\tau(x) = \mathscr{L}(f)\hat{g}(\gamma),$$

т. е. $g * f \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *и* $\mathscr{L}(g * f) = \mathscr{L}(f)\hat{g}(\gamma)$.

Прежде чем сформулировать основной результат, напомним (см. замечание 1), что элементы банаховой алгебры $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ можно наглядно представить себе в частном случае как функции $f(x)$ такие, что

$$f(x) \sim \mathscr{L}(f)\frac{x^\alpha L(x)}{e^{\gamma x}}, \quad x \to \infty,$$

при следующем выборе полумультипликативной функции $\varphi(x)$ и нормирующей функции $\tau(x)$: $\varphi(x) = \exp(\gamma x)$, $\tau(x) = x^\alpha L(x)$, где $\alpha \leq -1$, а $L(x)$ медленно меняется на бесконечности (см. также следствие 1 ниже).

Рассмотрим уравнение (1) с начальным условием (2) и соответствующее характеристическое уравнение (6).

Теорема 4. *Предположим, что* $\varphi(t)$, $t \geq 0$, — *полумультипликативная функция такая, что* $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$, $t \geq 0$, — *неубывающая функция, и выполнено условие* $(\mathfrak{S})$. *Пусть* $\mathscr{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$ — *множество всех корней характеристического уравнения* (6), *лежащих в полуплоскости* $\Pi(\gamma)$, *причем* $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, $j = 1, \dots, l$. *Обозначим через* $m_1, \dots, m_l$ *кратности корней* $s_1, \dots, s_l$ *соответственно. Предположим, что нормирующая функция* $\tau(t)$ *такова, что совокупность* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ — *банахова подалгебра алгебры* $\mathscr{A}$, *для всех* $f, g \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ *справедливо равенство* (12) *и для любого* $y \in \mathbb{R}$ *существует предел* (15). *Допустим, что* $f \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, *т. е.* 1) $\operatorname*{ess\,sup}_{x\geq 0} |f(x)|\varphi(x)/\tau(x) < \infty$ *и* 2) *существует предел* $\mathscr{L}(f) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\varphi(x)/\tau(x)$. *Тогда для решения* $z(t)$ *уравнения* (1) *с начальным условием* (2) *справедливо разложение* (7), *в котором остаток* r *принадлежит* $\mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, *т. е.* $\operatorname*{ess\,sup}_{x\geq 0} |r(x)|\varphi(x)/\tau(x) < \infty$ *и существует предел* $\mathscr{L}(r)$, *причем*

$$\mathscr{L}(r) = \lim_{t\to\infty}\frac{r(t)\varphi(t)}{\tau(t)} = \frac{\mathscr{L}(f)}{L(\gamma)}.$$

Доказательство. В силу непрерывности преобразования Лапласа условие $(\mathfrak{S})$ справедливо при замене γ на $\gamma_2 > \gamma$, достаточно близкое к γ. По лемме 1 множество $\mathscr{Z}_2 \supseteq \mathscr{Z}$ корней характеристического уравнения (6), лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma_2)$, конечно. Уменьшая γ_2, можно добиться того, что $\mathscr{Z}_2 = \mathscr{Z}$ при $\gamma_2 > \gamma$. Выберем $\sigma > \gamma_2$. Положим $p := \sum\limits_{j=1}^{l} m_j$ и

$$v(s) := \frac{L(s)(s-\sigma)^p}{(s-\sigma)^m \prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{m_j}}, \quad s \in \Pi(\gamma_2),$$

доопределив значения функции $v(s)$ в точках $s_1,\dots,s_l$ по непрерывности. Положим $\varphi_1(x):=\exp(\gamma_2 x)$, $x\ge 0$. Покажем, что функция $v(s)$, $s\in\Pi(\gamma_2)$, — преобразование Лапласа $\widehat{V}(s)$ некоторой меры $V\in S(\varphi_1)$. Рассмотрим сначала функцию

$$u(s):=\frac{L(s)}{(s-\sigma)^m}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}(-s)^j\hat{\mu}_j(s)}{(s-\sigma)^m}.$$

Разлагая каждую рациональную функцию $(-s)^j/(s-\sigma)^m$ на простые дроби, получаем

$$u(s)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\hat{\mu}_j(s)\frac{(s-\sigma+\sigma)^j}{(s-\sigma)^m}=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\hat{\mu}_j(s)\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{\sigma^{k-j}}{(s-\sigma)^{m-k}}.$$

Очевидно, что $u(s)$, $s\in\Pi(\gamma_2)$, — преобразование Лапласа $\widehat{U}(s)$ меры

$$\begin{aligned}U&:=\sum_{j=0}^{m}\mu_j*\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k-m}\sigma^{k-j}\binom{j}{k}\mathscr{E}_\sigma^{(m-k)*}\\&=\mu_m*\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sigma^{k-m}\binom{m}{k}\mathscr{E}_\sigma^{(m-k)*}+\sum_{j=0}^{m-1}\mu_j*\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j+k-m}\sigma^{k-j}\binom{j}{k}\mathscr{E}_\sigma^{(m-k)*}\\&=(-1)^m\mu_m+\mu_m*\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\sigma^{k-m}\binom{m}{k}\mathscr{E}_\sigma^{(m-k)*}+\sum_{j=0}^{m-1}\dots=:(-1)^m\mu_m+U_1.\end{aligned}$$

Мера U_1 абсолютно непрерывна, поскольку является линейной комбинацией сверток мер μ_j с абсолютно непрерывными мерами $\mathscr{E}_\sigma^{(m-k)*}$. Имеем $U\in S(\varphi_1)$, так как меры μ_j принадлежат $S(\varphi_1)$, будучи сосредоточены на конечном отрезке, и $\mathscr{E}_\sigma\in S(\varphi_1)$ в силу соотношений (8). Разлагая рациональную функцию на простые дроби, получаем

$$v(s)=u(s)\frac{(s-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{m_j}}=u(s)\left\{1+\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right\},$$

где c_{jk} — константы. Согласно лемме 2 выражение $u(s)/(s-s_j)^k$ является преобразованием Лапласа абсолютно непрерывной меры $T(s_j)^kU$, принадлежащей банаховой алгебре $S(\varphi_1)$. Подытоживая, видим, что $v(s)=\widehat{V}(s)$, где $V\in S(\varphi_1)$. Меру V можно представить в виде $V=(-1)^m\mu_m+V_1$, где мера V_1 абсолютно непрерывна. Теперь покажем, что элемент V обратим в $S(\varphi_1)$, т. е. найдется элемент $V^{-1}\in S(\varphi_1)$ такой, что $V*V^{-1}=\delta_0$. Пусть $\mathscr{M}$ — пространство максимальных идеалов алгебры $S(\varphi_1)$. Из теории банаховых алгебр (нормированных колец) известны следующие факты [8]. Каждый максимальный идеал $M\in\mathscr{M}$ порождает некоторый гомоморфизм $h:S(\varphi_1)\to\mathbb{C}$, и M — ядро этого гомоморфизма. Обозначим через $\nu(M)$ значение h на $\nu\in S(\varphi_1)$. Элемент $\nu\in S(\varphi_1)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда ν не принадлежит никакому максимальному идеалу $M\in\mathscr{M}$. Иными словами, ν обратим тогда и только тогда, когда $\nu(M)\ne 0$ при любом $M\in\mathscr{M}$.

Пространство $\mathscr{M}$ разбивается на два множества: $\mathscr{M}_1$ — множество максимальных идеалов, не содержащих совокупности $L(\varphi_1)$ всех абсолютно непрерывных мер из $S(\varphi_1)$, и $\mathscr{M}_2=\mathscr{M}\setminus\mathscr{M}_1$. Если $M\in\mathscr{M}_1$, то порожденный им гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \hat{\nu}(s_0)$, где $s_0 \in \Pi(\gamma_2)$. В этом случае $M = \{\nu \in S(\varphi_1) : \hat{\nu}(s_0) = 0\}$ [7, гл. IV, § 4]. Если $M \in \mathscr{M}_2$, то $\nu(M) = 0$ для любого $\nu \in L(\varphi_1)$. Пусть M_0 — максимальный идеал в $S(\varphi_1)$ такой, что соответствующий ему гомоморфизм имеет вид $h(\nu) = \nu(\{0\})$, $\nu \in S(\varphi_1)$. Положим $\mathscr{M}_3 = \mathscr{M}_2 \setminus \{M_0\}$. Покажем, что $V(M) \neq 0$ для любого $M \in \mathscr{M}$, тем самым установим существование обратного элемента $V^{-1} \in S(\varphi_1)$. Если $M \in \mathscr{M}_1$, то $V(M) = \widehat{V}(s_0) \neq 0$ при некотором $s_0 \in \Pi(\gamma_2)$ по построению. Для M_0 имеем $V(M_0) = (-1)^m \mu_m(\{0\}) \neq 0$. Пусть теперь $M \in \mathscr{M}_3$. По теореме о строении произвольного гомоморфизма $h : S(\varphi_1) \to \mathbb{C}$ (см. [12, теорема 1 и замечание 3])

$$h(\nu) = \int_0^\infty \chi(x, \nu) \exp(\beta x)\, \nu(dx), \quad \nu \in S(\varphi_1), \tag{18}$$

где β — вещественное число такое, что $\beta \leq \gamma$, а функция $\chi(x, \nu)$ двух переменных $x \in [0, \infty)$ и $\nu \in S(\varphi_1)$ — обобщенный характер, из свойств которого нам потребуется лишь следующее: $|\nu| - \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [0,\infty)} |\chi(x, \nu)| \leq 1$. В силу мультипликативности функционала $\nu \mapsto \nu(M)$, $\nu \in S(\varphi_1)$, имеем $V^k(M) = V^{k*}(M) = (V^{k*})_s(M)$. Далее,

$$V^{k*} = \{(-1)^m \mu_m + V_1\}^{k*} = (-1)^{km} \mu_m^{k*} + V_k,$$

где V_k — абсолютно непрерывная мера. Следовательно,

$$(V^{k*})_s = (-1)^{km} \big(\mu_m^{k*}\big)_s,$$

откуда (см. (18))

$$V^k(M) = (-1)^{km} \left\{ \mu_m^{k*}(\{0\}) + \int_{0+}^{kh} \chi\big(x, \big(\mu_m^{k*}\big)_s\big) \exp(\beta x) \big(\mu_m^{k*}\big)_s (dx) \right\} \neq 0,$$

поскольку второе слагаемое в фигурных скобках по модулю не превосходит величины $\int_{0+}^{kh} \exp(\gamma_2 x) \big| \big(\mu_m^{k*}\big)_s \big|(dx)$, которая в силу условия ($\mathfrak{S}$) меньше $\big|\mu_m^k\big(\{0\}\big)\big|$ при γ_2, достаточно близком к γ. Таким образом, $V(M) \neq 0$ для любого $M \in \mathscr{M}_3$, и по доказанному ранее $V(M) \neq 0$ при всех $M \in \mathscr{M}$. Обратимость элемента $V \in S(\varphi_1)$ установлена.

Положим $w(s) := \frac{M(s) + \hat{f}(s)}{v(s)(s-\sigma)^m}$. Разлагая каждую рациональную функцию $(-s)^k/(s-\sigma)^m$ на простые дроби, получаем

$$w(s) = \frac{1}{v(s)} \left\{ \sum_{j=0}^m \hat{\mu}_j(s) \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k z^{(j-1-k)}(0) \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \frac{\sigma^{k-p}}{(s-\sigma)^{m-p}} \right.$$
$$\left. - \sum_{j=0}^m \frac{(g^{(j)})^\wedge(s) \hat{\mu}_j(s)}{(s-\sigma)^m} + \frac{\hat{f}(s)}{(s-\sigma)^m} \right\}.$$

Очевидно, что $w(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\widehat{W}(s)$ меры

$$W := V^{-1} * \left\{ \sum_{j=0}^m \mu_j * \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k z^{(j-1-k)}(0) \sum_{p=0}^k (-1)^{m-p} \binom{k}{p} \sigma^{k-p} \mathscr{E}_\sigma^{(m-p)*} \right.$$
$$\left. - \sum_{j=0}^m (-1)^m g^{(j)} * \big(\mu_j * \mathscr{E}_\sigma^{m*}\big) + (-1)^m f * \mathscr{E}_\sigma^{m*} \right\}. \tag{19}$$

По лемме 3 $\mathscr{E}_\sigma \in \mathscr{A}_\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}(\mathscr{E}_\sigma) = 0$. Очевидно, что функции $g^{(j)}$ суть элементы $\mathscr{A}_\mathscr{L}$, причем $\mathscr{L}(g^{(j)}) = 0$, $j = 0, \dots, m$. Применяя лемму 4, видим, что $\mu_j * \mathscr{E}_\sigma^{k*} \in \mathscr{A}_\mathscr{L}$ для любого $k = 1, \dots, m$, при этом в силу соотношения (12)

$$\mathscr{L}\big(\mu_j * \mathscr{E}_\sigma^{k*}\big) = \hat{\mu}_j(\gamma)\mathscr{L}\big(\mathscr{E}_\sigma^{k*}\big) = k\hat{\mu}_j(\gamma)\widehat{\mathscr{E}}_\sigma^{k-1}(\gamma)\mathscr{L}(\mathscr{E}_\sigma) = 0,$$

а по лемме 5, в которой полагаем $g := g^{(j)}$ и $f := \mu_j * \mathscr{E}_\sigma^{m*}$, получаем, что $g^{(j)} * \big(\mu_j * \mathscr{E}_\sigma^{m*}\big) \in \mathscr{A}_\mathscr{L}$ и

$$\mathscr{L}\big\{g^{(j)} * \big(\mu_j * \mathscr{E}_\sigma^{m*}\big)\big\} = (g^{(j)})^\wedge(\gamma)\mathscr{L}\big(\mu_j * \mathscr{E}_\sigma^{m*}\big) = 0.$$

Повторное применение леммы 4 с $\mu = V^{-1}$, $\xi = \gamma_2$ и функцией g, равной плотности меры в фигурных скобках в (19), дает $W \in \mathscr{A}_\mathscr{L}$, причем

$$\mathscr{L}(W) = \mathscr{L}(f)\frac{(V^{-1})^\wedge(\gamma)}{(\gamma - \sigma)^m} = \frac{\mathscr{L}(f)}{v(\gamma)(\gamma - \sigma)^m}. \tag{20}$$

Преобразование Лапласа $\hat{z}(s)$ искомого решения уравнения (1) с указанными начальными значениями можно представить в виде (см. (2))

$$\hat{z}(s) = \frac{M(s) + \hat{f}(s)}{L(s)} = \frac{\{M(s) + \hat{f}(s)\}(s - \sigma)^p}{v(s)(s - \sigma)^m \prod_{j=1}^{l}(s - s_j)^{m_j}} = w(s)\frac{(s - \sigma)^p}{\prod_{j=1}^{l}(s - s_j)^{m_j}}.$$

Снова разлагая рациональную функцию на простые дроби, получаем

$$\hat{z}(s) = w(s)\left\{1 + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{jk}}{(s - s_j)^k}\right\}.$$

Осуществим следующие преобразования:

$$\frac{w(s)}{(s - s_j)^k} = \frac{w(s_j)}{(s - s_j)^k} + \frac{w(s) - w(s_j)}{(s - s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{w_{i,j}(s_j)}{(s - s_j)^{k-i}} + w_{k,j}(s),$$

где $w_{0,j}(s) := w(s)$, $w_{p,j}(s) := \{w_{p-1,j}(s) - w_{p-1,j}(s_j)\}/(s - s_j)$, $p = 1, \dots, k$. Согласно теоремам 2 и 3 функция $w_{p,j}(s)$ является преобразованием Лапласа меры $T(s_j)^p W \in \mathscr{A}_\mathscr{L}$, причем $\mathscr{L}\{T(s_j)^p W\} = \mathscr{L}(W)/(\gamma - s_j)^p$. В итоге в силу единственности разложения в ряд Лорана получаем

$$\hat{z}(s) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k\frac{b_{jk}}{(s - s_j)^k} + w(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}w_{k,j}(s). \tag{21}$$

Ясно, что функция

$$\hat{r}(s) := w(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}w_{k,j}(s), \quad s \in \Pi(\gamma),$$

— преобразование Лапласа некоторой меры в $\mathscr{A}_\mathscr{L}$, абсолютно непрерывной при $m > 0$, поскольку в предшествующих рассуждениях мера W абсолютно непрерывна, а применение операторов $T(s_j)^k$ к мерам дает абсолютно непрерывные меры. Теперь чтобы получить искомое асимптотическое разложение (7), осталось перейти в равенстве (21) от преобразований Лапласа к их прообразам.

Вычислим $\mathscr{L}(r)$. Воспользуемся равенством (20) и теоремой 3. Имеем

$$\mathscr{L}(r) = \mathscr{L}(W) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}\mathscr{L}(W_{k,j}) = \mathscr{L}(W) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}\frac{\mathscr{L}(W)}{(\gamma - s_j)^k}$$
$$= \mathscr{L}(W)\frac{(\gamma-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{m_j}} = \mathscr{L}(f)\frac{(\gamma-\sigma)^p}{v(\gamma)(\gamma-\sigma)^m\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{m_j}} = \frac{\mathscr{L}(f)}{L(\gamma)}.$$

Теорема 4 доказана.

Запись $f(t) \sim cg(t)$, $t \to \infty$, означает, что $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)/g(t) = c$. Полагая в теореме 4 $\varphi(t) = e^{\gamma t}$, $\tau(t) = t^\alpha L(t)$ и учитывая замечание 1, получаем

Следствие 1. *Предположим, что нормирующая функция $\tau(t) = t^\alpha L(t)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha \le -1$ и выполнено условие $(\mathfrak{S})$. Пусть $s_1, \dots, s_l$ — все корни характеристического уравнения* (6), *лежащие в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, с кратностями $m_1, \dots, m_l$, причем $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, $j = 1, \dots, l$. Предположим, что*

$$f(t) \sim \mathscr{L}(f)\frac{t^\alpha L(t)}{e^{\gamma t}}, \quad t \to \infty.$$

Тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) *с начальным условием* (2) *справедливо разложение* (7), *в котором*

$$r(t) \sim \frac{\mathscr{L}(f)}{L(\gamma)}\frac{t^\alpha L(t)}{e^{\gamma t}}, \quad t \to \infty.$$

Если $\mathscr{L}(f) \ne 0$, то последнее соотношение можно переписать в виде $r(t) \sim f(t)/L(\gamma)$, $t \to \infty$.

§ 6. Доказательства лемм

Доказательство леммы 1. Рассуждаем от противного. Допустим, что существует бесконечная последовательность различных точек $s_n \in \Pi(\gamma)$ такая, что $L(s_n) = 0$. Последовательность $\{s_n\}$ стремится к ∞, поскольку иначе целая функция $L(s)$ равнялась бы тождественно нулю по теореме единственности [13, гл. 3, § 6, п. 1]. Имеем $\sum\limits_{j=0}^{m-1}(-s)^j\hat{\mu}_j(s) = o(s^m)$ при $s \to \infty$, $s \in \Pi(\gamma)$. Покажем, что найдется $c > 0$ такое, что

$$|s^m\hat{\mu}_m(s)| \ge c|s|^m; \tag{22}$$

тогда $L(s_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит допущению $L(s_n) = 0$. Имеем

$$\hat{\mu}^k_m(s) = \mu^k_m(\{0\}) + \int\limits_0^{kh} e^{st}\left(\mu^{k*}_m\right)_c(dt) + \int\limits_{0+}^{kh} e^{st}\left(\mu^{k*}_m\right)_s(dt).$$

По лемме Римана — Лебега второе слагаемое стремится к нулю при $s \to \infty$, $s \in \Pi(\gamma)$, а третье оценивается величиной $\int\limits_{0+}^{h} e^{\gamma t}\left|\left(\mu^{k*}_m\right)_s\right|(dt)$. Согласно условию $(\mathfrak{S})$ найдется $c > 0$ такое, что $\left|\hat{\mu}^k_m(s)\right| \ge c^k$ при достаточно больших $|s|$, $s \in \Pi(\gamma)$, откуда вытекает (22). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Продолжим функцию $\varphi(x)$ с сохранением полумультипликативности на всю прямую $\mathbb{R}$, полагая $\varphi(x) := \exp(\gamma_1 x)$, $x < 0$, где $\gamma_1 < \operatorname{Re} s_0$. Продолжим меру ν на борелевские подмножества $A \subseteq (-\infty, 0)$, полагая $\nu(A) := 0$. Тогда по теореме 2 [14] $\hat{\nu}(s)/(s - s_0)$, $\gamma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \gamma$, — преобразование Лапласа меры с плотностью

$$k(x) = \int_x^\infty \exp(-s_0(x - y))\,\nu(dy), \quad x \in \mathbb{R},$$

такой, что $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)|k(x)|\,dx < \infty$. Так как $k(x) = \exp(-s_0 x)\hat{\nu}(s_0) = 0$, $x < 0$, видим, что эта мера, которую также обозначим через $T(s_0)\nu$, принадлежит банаховой алгебре $S(\varphi)$ мер, сосредоточенных на $[0, \infty)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3 доказана в [11, лемма 1].

Доказательство леммы 4. Сначала установим, что $g * \mu \in \widetilde{S}_{\varphi+}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $g(x) \geq 0$ п. в. и $\mu \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi(x) g * \mu(x)\,dx &= \int_0^\infty \varphi(x) \int_0^x g(x - y)\,\mu(dy)\,dx \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^x g(x - y)\varphi(x - y)\varphi(y)\,\mu(dy)\,dx \\ &= \int_0^\infty \varphi(y) \int_y^\infty g(x - y)\varphi(x - y)\,dx\,\mu(dy) = \|g\|_\varphi \int_0^\infty \varphi(y)\,\mu(dy) < \infty,\end{aligned}$$

поскольку в силу (8) $\varphi(x) \leq e^{\xi x}$ при достаточно больших x. Покажем, что $P_\tau(g * \mu) < \infty$. Элементы $\mathscr{A}$ — классы эквивалентных функций, поэтому, изменяя функцию $g(x)$ на множестве лебеговой меры нуль, можно считать, что $P_\tau(g) = \sup_{x \geq 0} g(x)\varphi(x)/\tau(x)$. Заметим, что при таком изменении $g(x)$ свертка $g * \mu(x)$ меняется самое большее на множестве лебеговой меры нуль. Имеем

$$\frac{g * \mu(x)\varphi(x)}{\tau(x)} = \left(\int_0^A + \int_A^x\right) \frac{g(x - y)\varphi(x - y)}{\tau(x - y)} \frac{\tau(x - y)\varphi(x)}{\tau(x)\varphi(x - y)}\,\mu(dy) =: I_1(x) + I_2(x),$$

где $A > 0$ — целое число, Покажем, что отношение $\tau(x - y)\varphi(x)/\{\tau(x)\varphi(x - y)\}$ стремится к $e^{\gamma y}$ при $x \to \infty$ равномерно по $y \in [0, A]$. Положим $\sigma(x) := \varphi(x)e^{-\gamma x}/\tau(x)$. В силу (15) отношение $\sigma(x)/\sigma(x-y)$ стремится к 1 при $x \to \infty$ и фиксированном y или $\ln \sigma(x) - \ln \sigma(x - y) \to 0$ при $x \to \infty$. Согласно лемме 1.1 из [15] последнее соотношение выполняется равномерно по $y \in [0, A]$. Таким образом, найдется $x_0 = x_0(\varepsilon)$ такое, что $|\ln \sigma(x) - \ln \sigma(x - y)| < \varepsilon$ при всех $x \geq x_0$ и при всех $y \in [0, A]$ или же $e^{-\varepsilon} \leq \sigma(x)/\sigma(x - y) \leq e^{\varepsilon}$. Следовательно, при тех же x, y

$$e^{\gamma y - \varepsilon} \leq \frac{\tau(x - y)\varphi(x)}{\tau(x)\varphi(x - y)} \leq e^{\gamma y + \varepsilon},$$

откуда вытекает соотношение

$$I_1(x) \to \mathscr{L}(g) \int_0^A e^{\gamma y}\,\mu(dy), \quad x \to \infty. \tag{23}$$

Обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Представляя $\tau(x-y)/\tau(x)$ в виде

$$\frac{\tau(x-y)}{\tau(x)} = \frac{\tau(x-1)}{\tau(x)}\frac{\tau(x-2)}{\tau(x-1)}\dots\frac{\tau(x-[y])}{\tau(x-[y]+1)}\frac{\tau(x-y)}{\tau(x-[y])}$$

и применяя соотношение (10), выводим, что $I_1(x) \le P_\tau(g)M_\tau^A \int\limits_0^A \varphi(y)\,\mu(dy)$, т. е.

$$\sup_{x\ge 0} I_1(x) < \infty. \tag{24}$$

Определим $\varphi(x) := \exp(\gamma x)$, $x < 0$. Непосредственно проверяется, что продолженная таким образом на всю прямую функция $\varphi(x)$ полумультипликативна и, следовательно, для нее выполняется соотношение (9).

Оценим $I_2(x)$. Очевидно, что $I_2(x) \le P_\tau(g)J(x)$, где

$$J(x) := \int\limits_A^x \frac{\tau(x-y)\varphi(x)}{\tau(x)\varphi(x-y)}\,\mu(dy) \le \sum_{k=A}^{[x]}\int\limits_k^{k+1} =: \sum_{k=A}^{[x]} J_k(x).$$

Положим $\mu_k := \mu([k,k+1))$ и

$$g_\mu(x) := \begin{cases} \mu_k, & x\in[k,k+1),\ k=A,A+1,\dots,\\ 0, & x\in[0,A). \end{cases}$$

Воспользуемся соотношениями (10) и (9):

$$\begin{aligned} J_k(x) = \int\limits_k^{k+1} \frac{\tau(x-y)}{\tau(x-k)}\frac{\tau(x-k)}{\varphi(x-k)}\frac{\varphi(x-k)}{\varphi(x-y)}\frac{\varphi(x)}{\tau(x)}\,\mu(dy) \\ \le M_\tau M_\varphi \int\limits_k^{k+1}\frac{\tau(x-k)}{\varphi(x-k)}\frac{\varphi(x)}{\tau(x)}\mu_k\,dy \\ = M_\tau M_\varphi \int\limits_k^{k+1}\frac{\tau(x-k)}{\tau(x-y)}\frac{\tau(x-y)}{\varphi(x-y)}\frac{\varphi(x-y)}{\varphi(x-k)}\frac{\varphi(x)}{\tau(x)}g_\mu(y)\,dy \\ \le M_\tau^2 M_\varphi^2 \int\limits_k^{k+1}\frac{\tau(x-y)\varphi(x)}{\varphi(x-y)\tau(x)}g_\mu(y)\,dy. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} J(x) &\le M_\tau^2 M_\varphi^2 \int\limits_A^{[x]+1}\frac{\tau(x-y)}{\varphi(x-y)}\frac{\varphi(x)}{\tau(x)}g_\mu(y)\,dy \\ &= M_\tau^2 M_\varphi^2\left(\int\limits_A^x + \int\limits_x^{[x]+1}\right) = M_\tau^2 M_\varphi^2\left\{\frac{g_1 * g_\mu(x)\varphi(x)}{\tau(x)} + \Delta(x)\right\}, \end{aligned} \tag{25}$$

где $g_1(x) := \tau(x)/\varphi(x)$, $x \geq 0$, и

$$\Delta(x) := \int\limits_x^{[x]+1} \frac{\tau(x-y)}{\varphi(x-y)}\frac{\varphi(x)}{\tau(x)} g_\mu(y)\,dy$$
$$\leq \frac{\tau(0)e^{|\gamma|}\mu(([x],\infty))\varphi(x)}{\tau(x)} \leq \frac{\tau(0)e^{|\gamma|}\mu((x-1,\infty))\varphi(x)}{\tau(x)}$$
$$\leq \frac{\tau(0)e^{|\gamma|}e^{-\xi(x-1)}\varphi(x)}{\tau(x)} \int\limits_{x-1}^{\infty} e^{\xi y}\,\mu(dy) \leq C_1 \frac{e^{-\xi x}\varphi(x)}{\tau(x)}, \quad (26)$$

где $C_1 = \tau(0)e^{|\gamma|}e^{\xi}\int\limits_0^\infty e^{\xi y}\,\mu(dy) < \infty$ по предположению. Из соотношений (8) и (10) вытекает, что правая часть в (26) стремится к 0 при $x \to \infty$. Действительно,

$$\frac{1}{x}\ln\frac{e^{-\xi x}\varphi(x)}{\tau(x)} = -\xi + \frac{\ln\varphi(x)}{x} - \frac{\ln\tau(x)}{x} \to -\xi + \gamma < 0, \quad x \to \infty,$$

т. е. $e^{-\xi x}\varphi(x)/\tau(x) \leq e^{-\delta x}$ при достаточно больших x; здесь $\delta \in (0, \xi - \gamma)$. Кроме того, представляя $1/\tau(x)$ и $\varphi(x)$ в виде

$$\frac{1}{\tau(x)} = \frac{1}{\tau(0)}\frac{\tau(0)}{\tau(1)}\frac{\tau(1)}{\tau(2)}\cdots\frac{\tau([x]-1)}{\tau([x])}\frac{\tau([x])}{\tau(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{\varphi(1)}{\varphi(0)}\cdots\frac{\varphi([x])}{\varphi([x]-1)}\frac{\varphi(x)}{\varphi([x])}$$

и применяя соотношения (10) и (9), получаем

$$\sup_{x\in[0,B]} \frac{e^{-\xi x}\varphi(x)}{\tau(x)} \leq \frac{e^{|\xi|B}M_\tau^{[B]+1}\varphi^{[B]}(1)M_\varphi}{\tau(0)} < \infty$$

при любом $B > 0$. Следовательно, $\sup\limits_{x\geq 0}\Delta(x) < \infty$. Очевидно, что $g_1 \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, $\mathscr{L}(g_1) = 1$. Учитывая неравенство (11), видим, что

$$P_\tau(g_1 * g_\mu) \leq C(\|\tau\|_1 + 1) + C\|g_\mu\|_\varphi.$$

Итак,

$$\sup_{x\geq 0} I_2(x) \leq P_\tau(g)\bigl\{M_\tau^2 M_\varphi^2 P_\tau(g_1 * g_\mu) + \sup_{x\geq 0}\Delta(x)\bigr\} < \infty,$$

что наряду с уже доказанным в начале соотношением $g*\mu \in \widetilde{S}_{\varphi+}$ и неравенством (24) означает, что $g*\mu \in \mathscr{A}$. Для доказательства того, что $g*\mu \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, установим предварительно, что $g_1 * g_\mu \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$. Для этого достаточно показать, что $g_\mu \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$, поскольку $g_1 \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$. Имеем (см. (26))

$$\frac{g_\mu(x)\varphi(x)}{\tau(x)} \leq \frac{\mu(([x],\infty))\varphi(x)}{\tau(x)} \leq C_1\frac{e^{-\xi x}\varphi(x)}{\tau(0)e^{|\gamma|}\tau(x)}.$$

Значит, $P_\tau(g_\mu) < \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} g_\mu(x)\varphi(x)/\tau(x) = 0$, т. е. $g_\mu \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}(g_\mu) = 0$. Таким образом, $g_1 * g_\mu \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$. В силу (12) $\mathscr{L}(g_1 * g_\mu) = \hat{g}_\mu(\gamma)$. Оценим $\hat{g}_\mu(\gamma)$. Если $\gamma = 0$, то $\hat{g}_\mu(\gamma) = \mu([A,\infty))$. Пусть $\gamma > 0$. Получаем

$$\hat{g}_\mu(\gamma) = \int\limits_A^\infty e^{\gamma y} g_\mu(y)\,dy = \sum_{k=A}^\infty \frac{e^{\gamma(k+1)} - e^{\gamma k}}{\gamma}\mu_k$$
$$= \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}\sum_{k=A}^\infty e^{\gamma k}\mu_k \leq \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}\int\limits_A^\infty e^{\gamma y}\,\mu(dy).$$

Аналогично рассматривается случай $\gamma < 0$. Окончательно имеем

$$\mathscr{L}(g_1 * g_\mu) = \hat{g}_\mu(\gamma) \le \frac{e^{|\gamma|} - 1}{|\gamma|} \int\limits_A^\infty e^{\gamma y}\, \mu(dy), \tag{27}$$

причем эта оценка по непрерывности охватывает также случай $\gamma = 0$.

Завершим доказательство леммы 4. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем целое $A = A(\varepsilon) > 0$ так, чтобы

$$\max\biggl\{\mathscr{L}(g), P_\tau(g) M_\tau^2 M_\varphi^2 \frac{e^{|\gamma|} - 1}{|\gamma|}\biggr\} \int\limits_A^\infty e^{\gamma y}\, \mu(dy) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Затем выберем $x_1 = x_1(\varepsilon)$ так, чтобы при $x \ge x_1$ (см. (23) и (26))

$$\left| I_1(x) - \mathscr{L}(g) \int\limits_0^A e^{\gamma y}\, \mu(dy) \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad P_\tau(g) M_\tau^2 M_\varphi^2 \Delta(x) < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$P_\tau(g) M_\tau^2 M_\varphi^2 \left| \frac{g_1 * g_\mu(x)\varphi(x)}{\tau(x)} - \mathscr{L}(g_1 * g_\mu) \right| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Кроме того (см. (27)),

$$P_\tau(g) M_\tau^2 M_\varphi^2 \mathscr{L}(g_1 * g_\mu) \le P_\tau(g) M_\tau^2 M_\varphi^2 \frac{e^{|\gamma|} - 1}{|\gamma|} \int\limits_A^\infty e^{\gamma y}\, \mu(dy) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Объединяя перечисленные оценки (см. также (23) и (25)), видим, что при $x \ge x_1$

$$\begin{aligned} &\left| \frac{g * \mu(x)\varphi(x)}{\tau(x)} - \mathscr{L}(g)\hat{\mu}(\gamma) \right| \\ &\qquad = \left| I_1(x) - \mathscr{L}(g) \int\limits_0^A e^{\gamma y}\, \mu(dy) - \mathscr{L}(g) \int\limits_A^\infty e^{\gamma y}\, \mu(dy) + I_2(x) \right| \\ &\qquad \le \frac{2\varepsilon}{5} + P_\tau(g) J(x) \le \frac{2\varepsilon}{5} + P_\tau(g) M_\tau^2 M_\varphi^2 \biggl\{ \frac{g_1 * g_\mu(x)\varphi(x)}{\tau(x)} + \Delta(x) \biggr\} \\ &= \frac{2\varepsilon}{5} + P_\tau(g) M_\tau^2 M_\varphi^2 \biggl\{ \biggl(\frac{g_1 * g_\mu(x)\varphi(x)}{\tau(x)} - \mathscr{L}(g_1 * g_\mu) \biggr) + \mathscr{L}(g_1 * g_\mu) + \Delta(x) \biggr\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. $g * \mu \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}(g * \mu) = \mathscr{L}(g)\hat{\mu}(\gamma)$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Продолжим функцию $\varphi(x)$ на всю прямую с сохранением свойства полумультипликативности, полагая $\varphi(x) := \exp(\gamma x)$, $x < 0$. Пусть $f \in \mathscr{A}_{\mathscr{L}}$. Имеем

$$\begin{aligned} P_\tau(g * f) &\le \sup_{x \ge 0} \frac{\varphi(x)}{\tau(x)} \int\limits_{-h}^0 |f(x - y) g(y)|\, dy \\ &= \sup_{x \ge 0} \int\limits_{-h}^0 \frac{|f(x - y)|\varphi(x - y)}{\tau(x - y)} \frac{\tau(x - y)\varphi(x)}{\tau(x)\varphi(x - y)} |g(y)|\, dy \\ &\le \int\limits_{-h}^0 P_\tau(f) M_\tau^{[h]+1} e^{\gamma y} |g(y)|\, dy \le P_\tau(f) M_\tau^{[h]+1} e^{|\gamma| h} \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Для доказательства равенства $\mathscr{L}(g * f) = \mathscr{L}(f)\hat{g}(\gamma)$ перейдем к пределу под знаком интеграла в равенстве

$$\frac{g * f(x)\varphi(x)}{\tau(x)} = \int_{-h}^{0} \frac{f(x-y)\varphi(x-y)}{\tau(x-y)} \frac{\tau(x-y)\varphi(x)}{\tau(x)\varphi(x-y)} g(y)\, dy.$$

Это законно, поскольку подынтегральное выражение стремится к $\mathscr{L}(f)e^{\gamma y}g(y)$ при $x \to \infty$ и мажорируется интегрируемой функцией $P_\tau(f)M_\tau^{[h]+1}e^{\gamma y}|g(y)|$. Лемма 5 доказана.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
4. *Власов В. В., Иванов С. А.* Оценки решений неоднородных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2006. № 3. С. 24–30.
5. *Лесных А. А.* Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 4. С. 569–585.
6. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.
7. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
9. *Сгибнев М. С.* Банаховы алгебры функций, обладающих одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 3. С. 179–187.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2.
11. *Сгибнев М. С.* Асимптотическое разложение решения системы интегродифференциальных уравнений с точной асимптотикой остатка // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 650–667.
12. *Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.* Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 2. С. 160–169.
13. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т. 1.
14. *Sgibnev M. S.* An asymptotic expansion for the distribution of the supremum of a random walk // Stud. Math. 2000. V. 140. P. 41–55.
15. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 24 мая 2011 г.

Сгибнев Михаил Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sgibnev@math.nsc.ru