Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 519.44/45

О ГРУППАХ ШУНКОВА, ДЕЙСТВУЮЩИХ СВОБОДНО НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

А. И. Созутов

Аннотация. Доказано существование локально конечной периодической части в группе Шункова ранга 1 с разрешимыми конечными подгруппами, в группе Шункова, действующей свободно на абелевой группе, и в группах аффинных преобразований почти-областей с конечными элементами.

Ключевые слова: условия конечности, конечный элемент, группа Шункова, регулярный автоморфизм, почти-область, почти-поле, точно дважды транзитивная группа.

К семидесятилетию Виктора Даниловича Мазурова

Любая пара инволюций в периодической группе порождает конечную подгруппу. Этот простой фундаментальный факт лежит в основе многих результатов о строении периодических и смешанных групп с инволюциями, из него выросло понятие сопряженно бипримитивно конечных групп [1], называемых *группами Шункова.* В последнее время активно и плодотворно изучаются группы автоморфизмов, порожденные элементами малых порядков [2–14], в некоторых из них выполняется то же условие конечности, что и в группах Шункова. В. Д. Мазуров обратил мое внимание на статью [14], в теореме 1 которой доказана локальная конечность бинарно конечной группы, действующей свободно на абелевой группе. В следствиях 2, 3 из [14] установлены локальная конечность почти-поля с бинарно конечной мультипликативной группой и бинарно конечной точно дважды транзитивной группой. Исследования в [14] опирались на результаты статей [4, 5, 9, 15]. В настоящей работе доказано, что результаты из [14] справедливы при более слабых ограничениях.

Теорема 1. *Группа Шункова ранга* 1 *с разрешимыми конечными подгруппами обладает локально конечной периодической частью.*

Теорема 2 является обобщением теорем 1 и 3 из [15] и теоремы 1 из [14].

Теорема 2. *Группа Шункова, действующая свободно на абелевой группе, обладает локально конечной периодической частью.*

Как известно [16–18], каждой точно дважды транзитивной группе T соответствует почти-область $F = F(+, \cdot)$, для которой T есть группа $T_2(F)$ аффинных преобразований $x \to a + bx$ $(b \neq 0)$, и, наоборот, группа $T_2(F)$ аффинных преобразований $x \to a + bx$ $(b \neq 0)$ каждой почти-области F точно дважды

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00509–а).

транзитивна. Если $T_2(F)$ обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой, то почти-область F является почти-полем. Следующая теорема обобщает теорему 2 из [17] и дает частичный ответ на вопросы 11.52, 12.48 В. Д. Мазурова из [19].

Теорема 3. *Если в группе $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области F есть конечный элемент порядка > 2, то $T_2(F)$ обладает нормальной регулярной абелевой подгруппой и почти-область F является почти-полем конечной характеристики.*

Мультипликативная группа почти-поля действует свободно на его аддитивной группе. Из теорем 2, 3 вытекает

Следствие 1. *Если группа $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области F является группой Шункова и $\operatorname{Char} F \neq 2$, то $T_2(F)$ обладает локально конечной периодической частью и регулярной элементарной абелевой нормальной подгруппой, а почти-область F является почти-полем конечной характеристики.*

Применяя следствие 3 из [14], получаем

Следствие 2. *Бесконечная периодическая точно дважды транзитивная группа Шункова G локально конечна, и*

$$G \leq \mathrm{A\Gamma L}\,(1, F) := \{x \to a\alpha(x) + b \mid a, b \in F,\ a \neq 0,\ \alpha \in \operatorname{Aut} F\}$$

для некоторого локально конечного поля F.

1. Доказательство теоремы 1

Группа называется *бинарно конечной* (по [14] — 2-*конечной*), если любые два элемента в ней порождают конечную подгруппу. Напомним определения более слабых условий конечности. Нееединичный элемент a группы G называется *конечным*, если в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$. Так, в *слабо сопряженно бипримитивно конечной* группе по определению конечен каждый элемент простого порядка. Если в группе G каждая секция по конечной подгруппе слабо сопряженно бипримитивно конечна, то G называется *группой Шункова.* Несложно доказывается

Предложение 1.1 [20]. *Класс групп Шункова замкнут относительно операций взятия подгрупп и гомоморфных образов по конечным, черниковским и центральным периодическим подгруппам.*

Группу, в которой все элементарные абелевы подгруппы циклические, называем *группой ранга* 1. Согласно теореме 12.5.2 из [21] конечная p-группа ранга 1 является либо циклической, либо (обобщенной) группой кватернионов (и $p = 2$). Хорошо известны следующие свойства конечных примарных групп ранга 1.

Предложение 1.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа автоморфизмов циклической 2-группы порядка > 2 и обобщенной группы кватернионов порядка ≥ 16 являются 2-группами;*

(2) *группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} Q$ группы кватернионов Q порядка 8 содержит элемент порядка 3;*

(3) *любой p'-автоморфизм циклической p-группы действует свободно на ее подгруппе порядка p.*

Следующее фольклорное предложение легко доказывается при помощи нормализаторного процесса и упомянутой выше теоремы 12.5.2 из [21].

Предложение 1.3. *Бесконечная p-группа Шункова ранга 1 является либо квазициклической (локально циклической), либо обобщенной группой кватернионов и $p = 2$.*

Группа обладает периодической частью, если все ее элементы конечных порядков составляют подгруппу. Так, в мультипликативной группе любого (коммутативного) поля элементы конечных порядков составляют подгруппу — периодическую часть. Группы Шункова в отличие от бинарно конечных групп не обязаны быть периодическими, более того, известен пример 3-ступенно разрешимой группы Шункова [22], не обладающей периодической частью, все элементы конечных порядков которой 2-элементы.

Предложение 1.4 [15, лемма 10]. *Группа Шункова с локально циклическими силовскими подгруппами обладает локально конечной периодической частью.*

Пусть группа G — контрпример к теореме 1. Непосредственно из предложения 1.4 следует

Предложение 1.5. *Среди 2-подгрупп группы G есть группа кватернионов.*

Предложение 1.6. *В G есть элементы конечных нечетных порядков.*

Доказательство. Предположим, что каждый элемент конечного порядка из G является 2-элементом, и пусть K, M — различные максимальные 2-подгруппы из G. Понятно, что $1 \neq O_2(G) \leq D_1 = K \cap M$. Выберем элементы $a \in N_M(D) \setminus D$, $b \in N_K(D) \setminus D$, квадраты которых принадлежат D, и рассмотрим подгруппу $L = \langle a, b, D\rangle$. Ввиду условий L — конечная 2-подгруппа, и если L — циклическая группа, то $L = \langle a\rangle = \langle b\rangle$, что невозможно. Значит, L — группа кватернионов. Пусть N — максимальная 2-подгруппа из G, содержащая подгруппу L. Так как $L \nleq K$, $L \nleq M$, $L \cap M \neq D$ и $L \cap K \neq D$, то D — собственная подгруппа пересечения $K \cap N$. Из этого заключаем, что подгруппа K и любая максимальная 2-подгруппа группы G бесконечны и среди максимальных 2-подгрупп группы G найдется подгруппа $M \neq K$ с пересечением $D = K \cap M$ порядка ≥ 16. Группа $\langle K, M\rangle$, очевидно, не обладает периодической частью, и без ограничения общности можем считать $G = \langle K, M\rangle$. Поскольку D либо (локально) циклическая группа, либо группа кватернионов, D содержит характеристическую циклическую подгруппу $\langle c\rangle$ порядка ≥ 8, нормальную в K и M. Следовательно, подгруппа $\langle c\rangle$ нормальна в G, и ввиду свойств групп кватернионов $c^b = c^{-1}$ для любого элемента b порядка 4 из $G \setminus \langle c\rangle$. Значит, подгруппа $V = C_G(a)$ содержит единственную подгруппу порядка 4, любая конечная подгруппа в V циклическая, и в силу предложения 1.4 C обладает периодической частью $C \simeq C_{2^\infty}$. Теперь нетрудно убедиться, что любой 2-элемент b из $G \setminus C$ имеет порядок 4, при этом подгруппа $Q = C \cdot \langle b\rangle$ — обобщенная группа кватернионов и периодическая часть группы G. Полученное противоречие означает, что $\pi(G) \neq \{2\}$.

Предложение 1.7. *Если конечная разрешимая группа L ранга 1 порождена элементами простого порядка $p \neq 2$, то L — группа одного из типов:*

(1) $L = \langle a\rangle$ — циклическая группа порядка p;

(2) $L = \langle b\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с циклическим ядром $\langle b\rangle$ и дополнением $\langle a\rangle$, $(|b|, |a|) = 1$ и $|a| = p$;

(3) $L = Q \leftthreetimes H$, *где* H — $2'$-*группа типа* 1 *или* 2 *предложения,* Q — *группа кватернионов порядка* 8 *с инволюцией* z, *принадлежащей центру* $Z(L)$, *и* $\overline{L} = L/\langle z\rangle$ — *группа Фробениуса с абелевым ядром и дополнением* $\langle \bar{a}\rangle$ *порядка* $p = 3$.

Доказательство. Пусть $|a| = p$ и $L = \langle a^L\rangle$ — минимальный контрпример. В силу условий $L = F \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $F = O_{p'}(L)$, и в L есть нормальная подгруппа $T \leq F$ простого порядка $q \neq p$. Поскольку a^L содержится в подгруппе $[a, F] \leftthreetimes \langle a\rangle$, то $[a, F] = F$, и если подгруппа F абелева, то она циклическая и L — группа Фробениуса с ядром F вопреки предположению. Из теорем 9.4.3, 12.5.2 в [21] выводим, что $2 \in \pi(F)$ и силовская 2-подгруппа Q в F есть группа кватернионов. Если $F = Q$ — 2-группа, то по предложению 1.2 F — группа кватернионов порядка 8, $|a| = 3$ и L не контрпример. Итак, F не абелева и не 2-группа. Если $q \neq 2$ и $C_L(T)$ содержит элемент порядка p, то $a^L \subseteq C_L(T)$ и $T \leq Z(L)$. Но тогда силовская q-подгруппа S содержится в $Z(L)$ и в силу теоремы 14.3.1 из [21] $L = S \times O_{q'}(L)$, что невозможно. Следовательно, подгруппа $\langle a\rangle$ действует на подгруппе T свободно. Поскольку все условия предложения выполняются для фактор-группы $\overline{L} = L/T$, то $\overline{L}$ — группа типа 3 и $|a| = 3$. Понятно, что инволюция z из Q не может инвертировать T и подгруппа $\langle z, T\rangle$ нормальна в L. Значит, $\langle z\rangle = Z(L)$, а фактор-группа $L/Z(L)$ — группа Фробениуса. Но тогда L — группа типа 3; противоречие. Таким образом, $q = 2$, и $T = \langle z\rangle$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в L. Обозначим через V прообраз минимального нормального делителя из L/T. Из доказанного выше следует, что V — 2-группа. Если V — циклическая группа, то каждый элемент порядка 4 из $Q \setminus V$ инвертирует V, а из равенства $L = \langle a^L\rangle$ следует $V \leq Z(L)$; противоречие. Значит, V — группа кватернионов, и по предложению 1.2 $|V| = 8$, $|a| = 3$. Но тогда L/V — группа ранга 1, L/V — $2'$-группа типа 2 предложения и L/T — группа Фробениуса с абелевым ядром. Значит, L — группа типа 3; окончательное противоречие. Рассмотрев все случаи, приходим к выводу, что предложение верно.

Предложение 1.8 [15, лемма 5]. *Пусть* X — *группа ранга* 1, a — *элемент простого порядка* $p \neq 2$ *из* X *и все подгруппы* $L_g = \langle a, a^g\rangle$ *в* X *конечны и не содержат группы кватернионов. Тогда либо* $X = N_X(\langle a\rangle)$, *либо* $X = F \leftthreetimes N_X(\langle a\rangle)$ *и* $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — *группа Фробениуса с периодическим локально циклическим ядром* F, *в частности,* $\langle a^G\rangle$ — *локально конечная группа.*

Обозначим через R локально конечный радикал группы G.

Предложение 1.9. *Если* P — *бесконечная силовская* p-*подгруппа из* R *и* $p > 3$, *то* P *нормальна в* G *и* $p \notin \pi(G/R)$.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\langle c\rangle$ — максимальная нормальная в G p-подгруппа, содержащаяся в R. Понятно, что $\langle c\rangle \leq P$, и поскольку по предложению 1.1 $G/\langle c\rangle$ есть группа Шункова и ранг фактор-группы $G/\langle c\rangle$, очевидно, равен 1, можно считать, что $c = 1$. Пусть a — элемент порядка p из P. По условиям теоремы все подгруппы $L_g = \langle a, a^g\rangle$ конечны и разрешимы, и по предложению 1.7 для $g \in G \setminus N_G(\langle a\rangle)$ подгруппы L_g суть группы Фробениуса с циклическим ядром F_g и дополнением $\langle a\rangle$. По предложению 1.8 $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$ и $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с периодическим локально циклическим ядром F. Но квазициклическая группа P действовать свободно на локально конечной локально циклической группе не может. Следовательно, P нормальна в G. Далее, если в G/R есть p-элемент, то в $G \setminus P$ есть p-элемент b

и p-подгруппа $P \cdot \langle b \rangle$. Однако это противоречит теореме 12.5.2 из [21]. Предложение доказано.

Предложение 1.10. *Пусть $p \in \pi(G)$, $p > 3$ и a — p-элемент из G такой, что $\langle a^G \rangle \neq \langle a \rangle$. Тогда $\langle a^G \rangle \leq R$, $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ и $q - 1$ делится на p для каждого $q \in \pi(F)$.*

Доказательство. Пусть a — p-элемент наименьшего порядка из G, для которого предложение неверно. Тогда нормальное замыкание T элемента a^p либо совпадает с $\langle a^p \rangle$, либо равно $F_1 \leftthreetimes \langle a^p \rangle \leq R$, $G = F_1 \leftthreetimes N_G(\langle a^p \rangle)$, и ввиду предложения 1.2 p делит $q-1$ для каждого $q \in \pi(F_1)$. Понятно, что фактор-группа $\overline{G} = G/T$ имеет ранг 1, все ее подгруппы $\langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}} \rangle$ конечны и разрешимы, при этом $\overline{G} \neq N_{\overline{G}}(\langle \bar{a} \rangle)$. По предложениям 1.7, 1.8 $\overline{G} = \overline{F} \leftthreetimes N_{\overline{G}}(\langle \bar{a} \rangle)$, $\overline{F} \leftthreetimes \langle \bar{a} \rangle$ — группа Фробениуса с локально конечным локально циклическим ядром $\overline{F}$ и дополнением $\langle \bar{a} \rangle$. В частности, p делит $q-1$ для любого $q \in \pi(\overline{F})$, и случай $T = 1$ сразу приводит к противоречию. Пусть $T = \langle a^p \rangle$ и F — полный прообраз подгруппы $\overline{F}$ в G. В этом случае ясно, что $T \leq Z(F)$ и $F = T \times O_{p'}(F)$. Поэтому $\langle a^G \rangle = O_{p'}(F) \leftthreetimes \langle a \rangle \leq R$, что снова противоречит предположению. Пусть, наконец $T = F_1 \leftthreetimes \langle a^p \rangle$. Как и выше, заключаем, что $F/F_1 = \langle a^p F_1 \rangle / F_1 \times O_{p'}(F/F_1)$ и $G = O_{p'}(F) \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ не контрпример. Следовательно, доказываемое предложение верно.

Обозначим через π' множество $\pi(G) \setminus \{2, 3\}$.

Предложение 1.11. *Имеет место равенство $O_{\pi'}(R) = O_{\pi'}(G)$, при этом $\pi(G/O_{\pi'}(G)) = \{2, 3\}$ и фактор-группа $G/O_{\pi'}(G)$ является группой Шункова ранга* 1.

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$ и $p > 3$. В силу предложения 1.10 каждый p-элемент группы G содержится в $O_{\pi'}(R)$, следовательно, $O_{\pi'}(G) = O_{\pi'}(R)$ и ввиду предложений 1.6, 1.9 $\pi(G/O_{\pi'}(G)) = \{2, 3\}$. Пусть $\overline{L}$ — конечная подгруппа в $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$. По теореме Шмидта ее полный прообраз L в G локально конечен и $L = MO_{\pi'}(G)$ для подходящей конечной подгруппы M из G. Поскольку M разрешима, в силу теорем Силова и Холла [21] $M = O_{\pi'}(M) \leftthreetimes H$, где H — холловская $\{2, 3\}$-подгруппа из M. Если K — любая холловская $\{2, 3\}$-подгруппа из L, то она конечна и сопряжена с H в конечной разрешимой подгруппе $\langle H, K \rangle \leq L$. По обобщенной лемме Фраттини $N_G(L) = O_{\pi'}(G) N_G(H)$ и $N_G(L)/O_{\pi'}(G) \simeq N_G(H)/(N_G(H) \cap O_{\pi'}(G))$. Если $\bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}}$ — элементы простого порядка p из $N_{\overline{G}}(\overline{L})/\overline{L}$, то $p \in \{2, 3\}$ и $\bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}}, \bar{g}$ являются образами подходящих элементов $a, a^g, g \in N_G(H)$, причем $a^p \in H$. По условиям теоремы подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из G конечна, значит, конечна и подгруппа $\langle \bar{a}, \bar{a}^{\bar{g}} \rangle$ из фактор-группы $N_{\overline{G}}(\overline{L}/\overline{L})$. Следовательно, $\overline{G}$ является группой Шункова. Поскольку примарные подгруппы из $\overline{G}$ изоморфны соответствующим примарным подгруппам группы G, ранг группы $\overline{G}$ равен 1.

Завершим доказательство теоремы 1. Ввиду предложения 1.11 считаем, что $\pi(G) = \{2, 3\}$. Пусть P — максимальная нормальная в G 3-подгруппа. В силу предложений 1.3, 1.1 G/P является группой Шункова ранга 1 и контрпримером к теореме. Поэтому считаем, что $P = 1$. Пусть a — элемент порядка 3 из G. Тогда $N_G(\langle a \rangle) \neq G$ и для любого $g \in G \setminus N_G(\langle a \rangle)$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ есть группа типа (3) предложения 1.7, более конкретно, $L_g = Q \leftthreetimes \langle a \rangle$, где Q — группа кватернионов порядка 8 с инволюцией z. Если в G инволюция z единственная, то в силу теоремы Шункова [23] $F = \bigcup_{g \in G} Q_g$ — нормальная в G подгруппа и

$F/\langle z\rangle$ — группа периода 2. Но тогда F локально конечна, $F = Q$ и в G/Q силовские 2-подгруппы циклические порядка ≤ 2. По предложению 1.4 G/Q обладает локально конечной периодической частью и G не является контрпримером к теореме.

Пусть инволюция z в G не одна. Тогда $C_G(z) \neq G$ и для любой инволюции $t \in G$ произведение tz является 3-элементом. Пусть t — инволюция, выбранная за пределами подгруппы $N_G(\langle a\rangle)$. Тогда, взяв в качестве элемента g инволюцию t, последовательно получим $L_g = L_t$, $t \in N_G(L_t)$, $tz = zt$, $z = t$ и $L_t = \langle a\rangle$; противоречие. Значит, все инволюции из G содержатся в подгруппе $N_G(\langle a\rangle)$, а поскольку их попарные произведения имеют нечетные порядки, все они сопряжены в $N_G(\langle a\rangle)$. Из $za = az$ заключаем, что все инволюции из G содержатся в $C_G(a)$. Однако в качестве элемента a изначально мы могли взять элемент, инвертируемый некоторой инволюцией из G; окончательное противоречие. Следовательно, контрпримера к теореме 1 не существует, и теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Группа G *действует свободно* на группе A, если для $a \in A$, $g \in G$ равенство $a^g = a$ имеет место только тогда, когда хотя бы один из элементов a, g единичен. Этот термин, предложенный В. Д. Мазуровым, не имеет других толкований в отличие от используемых ранее «группы регулярных автоморфизмов абелевой группы» и «группы, действующей без неподвижных точек на абелевой группе». Строение конечных групп, свободно действующих на абелевых группах, хорошо известно (см., например, [24, 25]), оно такое же, как у неинвариантных множителей в конечных группах Фробениуса. Согласно теоремам из [25, с. 635] имеют место следующие предложения.

Предложение 2.1. *Разрешимая конечная группа G, свободно действующая на абелевой группе, является группой одного из следующих типов:*

(1) *G — циклическая группа;*

(2) *$G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $(|a|, |b|) = 1$, $\langle a\rangle = G'$ и все элементы простых порядков из $\langle b\rangle$ лежат в центре G;*

(3) *$G = H \leftthreetimes Q$, где H — группа нечетного порядка одного из типов 1, 2, Q — (обобщенная) группа кватернионов с инволюцией t, принадлежащей центру G;*

(4) *$G = Q \leftthreetimes H$, где H — группа нечетного порядка одного из типов 1, 2, Q — группа кватернионов 8-го порядка;*

(5) *G содержит подгруппу индекса 2 типа 4 и силовская 2-подгруппа из G есть обобщенная группа кватернионов порядка 16.*

Предложение 2.2. *Неразрешимая конечная группа G, свободно действующая на абелевой группе, содержит в качестве подгруппы индекса ≤ 2 подгруппу $K = L \times H$, где $L \simeq SL(2,5)$, H — группа одного из типов 1, 2 предложения 2.1, порядок которой взаимно прост с 30.*

Предложение 2.3 [15, теорема 1]. *Слабо сопряженно бипримитивно конечная группа G тогда и только тогда свободно действует на абелевой группе, когда ее подгруппа $\Omega_1(G)$, порожденная всеми элементами простых порядков, есть группа одного из типов:*

(1) *$\Omega_1(G)$ — локально циклическая группа;*

(2) *$\Omega_1(G) = C \times S$, где $S \simeq SL_2(3)$, C — локально циклическая $\{2,3\}'$-группа;*

(3) *$\Omega_1(G) = C \times S$, где $S \simeq SL_2(5)$, C — локально циклическая $\{2,3,5\}'$-группа.*

Пусть G — контрпример к теореме 2.

Предложение 2.4. *Подгруппа $O_2(G)$ конечна и является циклической группой $\langle z \rangle$ порядка 2.*

Доказательство. Если подгруппа $O_2(G)$ бесконечна, то в силу предложения 1.3 она либо квазициклическая, либо обобщенная группа кватернионов. В первом случае силовские 2-подгруппы в фактор-группе $G/O_2(G)$, очевидно, имеют порядок 2, а во втором — тривиальны. По предложению 1.1 $G/O_2(G)$ есть группа Шункова, и ввиду предложения 1.4 $G/O_2(G)$ обладает локально конечной периодической частью $\overline{T}$. Но тогда полный прообраз T подгруппы $\overline{T}$, очевидно, является периодической частью группы G и локально конечен по теореме Шмидта, что противоречит выбору группы G. Значит, подгруппа $O_2(G)$ конечна.

Если $O_2(G)$ — группа кватернионов, то любая силовская 2-подгруппа Q в G содержит $O_2(G)$ и является группой кватернионов и $[Q : O_2(G)] \leq 2$. Как и выше, применяя предложения 1.1, 1.4 и теорему Шмидта, приходим к противоречию. Следовательно, $O_2(G) = \langle z \rangle$ — циклическая группа. Если $|z| \neq 2$, то ввиду предложения 2.3 каждый элемент порядка 4 из G инвертирует $\langle z \rangle$ и в $C_G(z)$ силовские 2-подгруппы (локально) циклические. По предложению 1.4 $C_G(z)$ обладает локально конечной периодической частью T_1. Понятно, что T_1 нормальна в G, и легко показать, что фактор-группа $\overline{G} = G/T_1$ является группой Шункова с (локально) циклическими силовскими подгруппами. Применяя предложения 1.1, 1.4 и теорему Шмидта, приходим к противоречию. Значит, $|O_2(G)| = 2$, и предложение доказано.

Предложение 2.5. *Подгруппа $\Omega_1(G)$ локально циклическая.*

Доказательство. Из предложения 2.4 следует, что $\Omega_1(G)$ не является группой типа (2) из предложения 2.3. Пусть $\Omega_1(G) = C \times S$ — группа типа (3) из предложения 2.3 и Q — силовская 2-подгруппа из S. По лемме Фраттини $G = S \cdot N_G(Q)$. Поскольку $G_1 = N_G(Q)$ — группа Шункова и $\Omega_1(G_1)$ — группа типа 2 из предложения 2.3, ввиду предложения 2.4 G_1 обладает локально конечной периодической частью T_1. По теореме Шмидта подгруппа $T = ST_1$ локально конечна и содержит все элементы конечного порядка из G, что противоречит выбору G. Следовательно, $\Omega_1(G)$ — локально циклическая группа.

Закончим доказательство теоремы 2. Из предложений 2.5, 2.3 и 2.2 следует, что все конечные подгруппы группы G разрешимы, и согласно теореме 1 контрпримера к теореме 2 не существует. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 3 и следствий

Группа G подстановок множества Ω называется *точно дважды транзитивной*, если $|\Omega| \geq 3$ и любые две упорядоченные пары различных элементов множества Ω можно перевести друг в друга с помощью единственного элемента из G. В частности, в G только единичная подстановка оставляет на месте две точки. На протяжении многих лет исследование точно дважды транзитивных групп велось в рамках теории почти-областей с использованием техники вычислений в этих алгебраических системах (см. монографию [16]). В. Д. Мазуров [17, 18] дал прямое теоретико-групповое доказательство некоторых ключевых результатов и постановкой вопросов 11.52, 12.48 в «Коуровской тетради» [19] привлек интерес автора к этой области исследований.

Пусть $T = T_2(F)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Поскольку T точно дважды транзитивна на F из [16, предложение V.1.2], отвлечемся от алгебраической структуры множества F и определения элементов $t \in T$ как аффинных преобразований и сосредоточим внимание на точно дважды транзитивном действии T на F как группы подстановок. Результат действия подстановки $t \in T$ на элемент (точку) $\gamma \in F$ обозначаем через γ^t. Докажем несколько хорошо известных свойств группы T. Пусть T_α — стабилизатор точки $\alpha \in F$ и $t \in T \setminus T_\alpha$. Поскольку $\beta = \alpha^t \neq \alpha$, то $T_\alpha \cap T_\alpha^t = T_\alpha \cap T_\beta = 1$ и верно следующее утверждение.

Предложение 3.1. *(T, T_α) — пара Фробениуса, т. е. $T_\alpha \cap T_\alpha^t = 1$ для любого $t \in T \setminus T_\alpha$.*

В силу 2-транзитивности в T есть подстановка t, переводящая упорядоченную пару (β, γ) точек из F в пару (γ, β). Так как $t^2 \in T_\beta \cap T_\gamma$, по предложению 1.1 $t^2 = 1$ и инволюция t однозначно определяется циклом (γ, β). Из 2-транзитивности T следует

Предложение 3.2. *Множество J инволюций в T непусто, и все инволюции сопряжены в T.*

Множество $J \setminus T_\alpha$, очевидно, также непусто и состоит из инволюций, содержащих цикл вида (α, β). Так как T_α транзитивна на $F \setminus \{\alpha\}$ и $(\alpha, \beta)^h = (\alpha, \beta^h)$ для $h \in T_\alpha$, справедливо

Предложение 3.3. *T_α действует сопряжениями транзитивно на множестве $J \setminus T_\alpha$.*

Пусть в T_β $(\beta \neq \alpha)$ есть две инволюции v и s. Тогда по предложению 3.3 $v = s^h$ для подходящего $h \in T_\alpha$ и по предложению 3.1 $h \in T_\beta$, $T_\alpha = T_\beta$; противоречие. Значит, верно следующее

Предложение 3.4. *Если в T_α есть инволюция j, то она единственна в T_α, любая инволюция в T однозначно определена точкой из F, которую она оставляет на месте, и T действует сопряжениями на множестве J всех своих инволюций точно дважды транзитивно.*

Предложение 3.5. *Произведение двух различных инволюций из T является регулярной подстановкой. Если в T_α нет инволюций, то $T \setminus T_\alpha = T_\alpha J$ и $J \cap T_\alpha k = \{k\}$ для любой инволюции $k \in J$.*

Доказательство. Если $1 \neq kv \in T_\alpha$ для $k, v \in J$, то $kv \in T_\alpha \cap T_\alpha^k \cap T_\alpha^v$ и по предложению 3.1 $k, v \in T_\alpha$ вопреки предложению 3.4. Значит, kv — регулярная подстановка. Далее, для любой точки $\beta \in F$ существует точно одна инволюция $k \in J$, переводящая α в β. Это доказывает вторую часть предложения.

Для произвольной инволюции $v \in J$ через N_v^* обозначим множество всех строго вещественных относительно v элементов из $T \setminus T_\beta$, где $v \in T_\beta$, и положим $N_v = N_v^* \cup \{1\}$.

Предложение 3.6. *Если в T_α есть инволюция j, то $T = T_\alpha J = T_\alpha N_v$ для любых $\alpha \in F$, $v \in J$, при этом для любого $x \in T$ имеют место равенства $|J \cap T_\alpha x| = |N_v \cap T_\alpha x| = 1$.*

Доказательство. Ввиду предложения 3.3 для любого $\beta \in F$ есть единственная инволюция $t \in J$ со свойством $\alpha^t = \beta$, значит, $T_\alpha J = T$, и поскольку

$N_v = Jv$, то $T = T_\alpha N_v$. Понятно, что $|J \cap T_\alpha x| = |N_v \cap T_\alpha x| = 1$ для любого $x \in T$.

Предложение 3.7. *Пусть в T_α есть инволюция, $k, v \in J$ и $k \neq v$. Тогда $kv \neq vk$, $k^t = v$ для однозначно определенной инволюции $t = t(v,k)$ из J и все элементы из $J^2 \setminus \{1\}$ сопряжены в T.*

Доказательство. В силу предложения 3.4 $\{k\} = J \cap T_\beta$, $\{v\} = J \cap T_\gamma$ для подходящих различных $\beta, \gamma \in F$. Поэтому ввиду предложения 3.1 $kv \neq vk$, а искомая сопрягающая инволюция $t \in T$ однозначно определяется своим циклом (β, γ). Если $r, s \in J$ и $s \neq r$, то в силу предложения 3.4 в T есть такой элемент g, что $k^g = r$, $v^g = s$. Отсюда $(kv)^g = rs$, и предложение доказано.

Итак, если в T_α есть инволюция, то ввиду предложения 3.7 и свойств групп диэдра все неединичные элементы $vk \in J^2$ имеют один и тот же порядок: либо бесконечный, либо равный простому числу $p \neq 2$. В первом случае по определению (см., например, [16]) почти-область F и группа T имеют характеристику 0, во втором — $\mathrm{Char}\, F = \mathrm{Char}\, T = p$, если же в T_α нет инволюций, то $\mathrm{Char}\, F = \mathrm{Char}\, T = 2$.

Приступим к доказательству теоремы. По ее условиям в T есть конечный элемент a и $|a| > 2$. Так как для $k \in J$ подгруппа $\langle a, a^k \rangle$ конечна и $k \in N_T(L)$, справедливо

Предложение 3.8. *Для каждой инволюции $k \in T$ и любого $b \in a^G$ подгруппа $L_k = \langle b, k \rangle$ конечна.*

Предложение 3.9. *Если подстановка a регулярна, то T_α содержит инволюцию, $a^T = N_k^*$ для любой инволюции k, $|a| = \mathrm{Char}\, T = p$ и N_k — абелева нормальная подгруппа в T.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in F$, $\beta = \alpha^a$ и k — инволюция из T такая, что $\alpha^k = \beta$, $\beta^k = \alpha$. Тогда $ak \in T_\alpha$ и по теореме Фробениуса L_k — группа Фробениуса с дополнением $T_\alpha \cap L_k$ и ядром, содержащим элемент a. Поскольку L_k порождена инволюцией k и элементом a, заключаем, что $L_k = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle k \rangle$ и T_α содержит инволюцию. Но тогда ввиду предложений 3.7, 3.8 и теоремы Фробениуса $a \in N_v$ для любой инволюции $v \in J$, $|a| = \mathrm{Char}\, T$ — простое нечетное число и $N_v^* = N_k^* = a^T$. Если $b, c \in a^T$, то $b = tv$, $c = vs$ для подходящих инволюций t, s и $bc \in N_s = N_k$. Значит, $N_k = N_v$ — подгруппа, инвертируемая каждой инволюцией из T. Это доказывает предложение.

Предложение 3.10. *Если $\mathrm{Char}\, T = 2$, то $A = J \cup \{1\}$ — абелева нормальная подгруппа группы T.*

Доказательство. Согласно предложению 3.9 элемент a стабилизирует некоторую точку $\alpha \in F$ и $|a|$ — нечетное число. По предложению 3.8 и теореме Фробениуса для любой инволюции $k \in J$ и любого элемента b простого порядка p из $\langle a \rangle$ подгруппа $L = \langle b, k \rangle$ является конечной группой Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle b \rangle$ и ядром, содержащим k. По основной теореме из [26] объединение всех ядер групп $L_g = \langle b, b^g \rangle$ является нормальной в T подгруппой F_p и $G = F_p \leftthreetimes T_\alpha$. В силу предложения 3.5 $F_p = J \cup \{1\}$ и как группа периода 2 подгруппа $J \cup \{1\}$ абелева. Предложение доказано.

Завершим доказательство теоремы 3. Согласно предложениям 3.9, 3.10 осталось рассмотреть случай, когда $a \in T_\alpha$ для некоторой точки $\alpha \in F$ и T_α содержит инволюцию j. Если в $\langle a \rangle$ есть элемент b нечетного простого порядка, то по основной теореме из [26] объединение всех ядер групп $L_g = \langle b, b^g \rangle$ является нормальной в T периодической подгруппой F_p и $T = F_p \leftthreetimes T_\alpha$. По предложению 3.4 j — единственная инволюция в T_α и $T_\alpha = C_T(j)$. Значит, $N_j \subseteq F_p$, и в силу предложения 3.6 $F_p = N_j$. Поскольку j по определению инвертирует N_j и $J = jN_j$, то N_j — абелева регулярная нормальная в T подгруппа, и теорема доказана.

Пусть в $\langle a \rangle$ нет элементов нечетного порядка. Тогда a — 2-элемент и тройка (T, T_α, a) удовлетворяет все условиям основной теоремы из [27]. По этой теореме в T есть периодическое нормальное дополнение к подгруппе T_α. Как показано выше, в этом случае T обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой, а почти-область F является почти-полем конечной нечетной характеристики. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Согласно [16, V.1.2] группа $T = T_2(F)$ точно дважды транзитивна на F. Так как $\operatorname{Char} T \neq 2$, стабилизатор T_α точки $\alpha \in F$ содержит инволюцию и по предложению 3.2 все инволюции в T сопряжены. Поскольку T — группа Шункова, элемент kv имеет конечный порядок для любых различных инволюций $k, v \in T$. По предложению 3.7 $|kv| = p$ — простое нечетное число, и по определению групп Шункова $a = kv$ — конечный элемент группы T. Согласно теореме 3 $A = \langle a^T \rangle$ — регулярная элементарная абелева p-подгруппа в T, $T = A \leftthreetimes T_\alpha$ и F является почти-полем характеристики p. По определению T_α — группа Шункова, и по теореме 2 T_α обладает локально конечной периодической частью V. Очевидно, что $A \leftthreetimes V$ — периодическая часть группы T, и следствие доказано.

Доказательство следствия 2. По [16, V.2.1] G есть группа $T_2(F)$ аффинных преобразований подходящей почти-области F. Согласно следствию 3 из [14] достаточно доказать локальную конечность группы G. В случае $\operatorname{Char} F \neq 2$ это утверждение вытекает из следствия 1. Пусть $\operatorname{Char} F = 2$. Очевидно, что G не 2-группа, и в силу периодичности G содержит элемент a нечетного простого порядка. По определению групп Шункова элемент a конечен в G. По теореме 3 почти-область F является почти-полем (характеристики 2) и группа $G = T_2(F)$ обладает регулярной элементарной абелевой 2-подгруппой A. В силу теоремы 2 и теоремы Шмидта G локально конечна, и следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.
2. *Mazurov V.* A new proof of Zassenhaus theorem on finite groups of fixed-point-free automorphisms // J. Algebra. 2003. V. 263, N 1. P. 1–7.
3. *Журтов А. Х.* О группах Фробениуса, содержащих элемент порядка 3 // Владикавк. мат. журн. 2000. Т. 2, № 2. С. 19–25.
4. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.
5. *Журтов А. Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 320–328.
6. *Мазуров В. Д., Чуркин В. А.* О группе, свободно действующей на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 888–891.
7. *Мазуров В. Д., Чуркин В. А.* О свободном действии группы на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 600–608.
8. *Журтов А. Х.* Группы Фробениуса, порожденные двумя элементами порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 533–537.
9. *Журтов А. Х.* О группе, действующей локально свободно на абелевой группе // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 343–346.

10. *Журтов А. Х., Мазуров В. Д.* О группах Фробениуса, порожденных квадратичными элементами // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 3. С. 271–292.

11. *Мазуров В. Д.* Обобщение теоремы Цассенхауза // Владикавк. мат. журн. 2008. Т. 10, № 1. С. 40–52.

12. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* О периодических группах, порожденных парой почти квадратичных автоморфизмов абелевой группы // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 599–603.

13. *Лыткина Д. В.* О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 379–387.

14. *Grundhöfer T., Jabara E.* Fixed-point-free 2-finite automorphism groups // Arch. Math. 2011. V. 97. P. 219–223.

15. *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893-901.

16. *Wähling H.* Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen Verl., 1987.

17. *Мазуров В. Д.* О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 102–104.

18. *Мазуров В. Д.* О точно дважды транзитивных группах // Вопросы алгебры и логики. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. С. 233–236.

19. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики, 2012.

20. *Остыловский А. Н., Шунков В. П.* О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности для подгрупп // Исследования по теории групп. Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1975. С. 32–48.

21. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

22. *Череп А. А.* О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.

23. *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 491–522.

24. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.

25. *Старостин А. И.* О группах Фробениуса // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 629–639.

26. *Созутов А. И., Шунков В. П.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 495–506.

27. *Попов А. М., Созутов А. И.* О группах с H-фробениусовым элементом четного порядка // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 70–80.

Статья поступила 11 октября 2012 г.

Созутов Анатолий Ильич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041;
Сибирский гос. аэрокосмический университет,
пр. Газеты Красноярский рабочий, 31, Красноярск 660037
sozutov_ai@mail.ru