Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.8

КЛАССЫ СКРУЧЕННОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ЕДИНИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В. Г. Бардаков, Т. Р. Насыбуллов, М. В. Нещадим

Аннотация. Изучаются классы скрученной сопряженности единичного элемента в различных группах. Как показали А. Л. Фельштын и Е. В. Троицкий, в абелевой группе класс скрученной сопряженности единичного элемента является подгруппой для любого автоморфизма. Исследуется вопрос о строении группы, у которой класс скрученной сопряженности единичного элемента является подгруппой для всякого автоморфизма (внутреннего автоморфизма).

Ключевые слова: эндоморфизм, автоморфизм, скрученная сопряженность, класс скрученной сопряженности.

Введение

Классы сопряженности в группе отражают свойства самой группы. Например, один из вопросов, сформулированный на заре развития комбинаторной теории групп, звучал так: существует ли бесконечная группа с конечным числом классов сопряженности? В 1949 г. Хигман, Б. Нойман и Х. Нойман [1] построили бесконечно порожденную группу с конечным числом классов сопряженности. Позднее С. В. Иванов (см. [2, теорема 41.2]) построил пример конечно порожденной группы с этим свойством. Затем Д. В. Осин [3] привел пример конечно порожденной бесконечной группы, в которой любые два неединичных элемента сопряжены.

Обобщением классов сопряженности являются классы скрученной сопряженности, а точнее, классы φ-сопряженности, где φ — некоторый эндоморфизм группы. В последние годы много работ посвящено изучению скрученной сопряженности в различных классах групп. Соответствующие обзоры можно найти в [4–6].

Классы скрученной сопряженности естественным образом возникают в теории неподвижных точек Нильсена — Рейдемайстера. Пусть $f : X \longrightarrow X$ — отображение компактного топологического пространства X на себя; $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ — универсальное накрытие пространства X и $\tilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ — поднятие отображения f, т. е. $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. При этом два поднятия называются *сопряженными*, если существует $\gamma \in \pi_1(X)$ такое, что $\tilde{f}' = \gamma \circ \tilde{f} \circ \gamma^{-1}$. Подмножество $p(\mathrm{Fix}(\tilde{f}))$ называется *классом неподвижных точек* отображения f, определенным классом поднятий $[\tilde{f}]$. Класс неподвижных точек называется *существенным*, если

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект 44–2012), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.5191).

его индекс отличен от нуля. Число классов поднятий отображения f (и, следовательно, число классов неподвижных точек) называется *числом Рейдемайстера* отображения f и обозначается через $R(f)$. Число существенных классов неподвижных точек называется *числом Нильсена* отображения f и обозначается символом $N(f)$. При этом числа $N(f)$ и $R(f)$ являются гомотопическими инвариантами отображения f. Числа $N(f)$ и $R(f)$ отображения f тесно связаны между собой и являются главными объектами изучения теории Нильсена — Рейдемайстера.

С другой стороны, отображению f соответствует эндоморфизм $\varphi = f_\sharp$ фундаментальной группы $\pi_1(X)$. При этом число классов φ-сопряженности эндоморфизма φ, которое обозначается символом $R(\varphi)$, совпадает с числом Рейдемайстера $R(f)$ и называется *числом Рейдемайстера эндоморфизма* φ. Таким образом, топологическая задача нахождения числа $R(f)$ сводится к чисто алгебраической задаче нахождения числа $R(\varphi)$ (более подробно см. [4, 5]).

Как установили А. Л. Фельштын и Е. В. Троицкий [7], если G — абелева группа, то класс скрученной сопряженности $[e]_\varphi$ единичного элемента является подгруппой для любого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\ G$; при этом любой другой класс φ-сопряженности является смежным классом по этой подгруппе. Возникает естественный вопрос: верно ли обратное утверждение?

В предлагаемой работе мы покажем, что в общем случае ответ на поставленный вопрос отрицательный. Будет доказано, что во всякой двуступенно нильпотентной группе класс $[e]_\varphi$ является подгруппой, если автоморфизм φ действует тождественно по модулю коммутанта. А. Е. Залесский [8] построил пример бесконечно порожденной двуступенно нильпотентной группы, у которой всякий автоморфизм внутренний. Следовательно, в этой группе класс $[e]_\varphi$ является подгруппой для любого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\ G$, но G не абелева группа.

Мы предполагаем, что справедлива

Гипотеза 1. *Если в некоторой группе G класс скрученной φ-сопряженности $[e]_\varphi$ единичного элемента является подгруппой для любого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}\ G$, то группа G нильпотентна. Если при этом G конечно порождена, то она абелева.*

Как отмечено выше, если G абелева, то для любого автоморфизма φ справедливо $[e]_\varphi \leq G$ и при этом $R(\varphi) = |G : [e]_\varphi|$. В предлагаемой работе будет показано, что даже если $[e]_\varphi$ является подгруппой группы G, то равенство $R(\varphi) = |G : [e]_\varphi|$ выполнено не всегда.

В работе Е. Г. Кукиной и В. А. Романькова [9] для нильпотентных групп без кручения предложена другая формула для вычисления $R(\varphi)$. В настоящей статье показано, что для конечных нильпотентных групп эта формула неверна.

Опишем структуру работы. В § 1 устанавливаются общие свойства классов скрученной сопряженности единичного элемента. В частности, устанавливается, что если класс $[e]_\varphi$ является подгруппой для некоторого эндоморфизма $\varphi \in \mathrm{End}\, G$, то эта подгруппа нормальна в G (см. предложение 1). Пример 1 показывает, что если классы $[e]_\varphi$ и $[e]_\psi$ являются подгруппами для автоморфизмов φ, ψ, то класс $[e]_{\varphi\psi}$ не обязательно является подгруппой.

В § 2 изучаются классы скрученной сопряженности для внутренних автоморфизмов. В предложении 4 устанавливается связь между классами скрученной сопряженности и классами обычной сопряженности. Далее (см. теорему 1) доказано, что если в некоторой группе класс скрученной сопряженности единичного элемента является подгруппой для всякого внутреннего автоморфизма, то группа принадлежит классу Куроша — Черникова $\overline{Z}$. В теореме 2 для групп, у которых класс скрученной сопряженности единичного элемента является подгруппой, строится строго убывающая матрешка нормальных подгрупп. В качестве следствия отсюда получается, что если группа имеет тривиальный центр и удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп, то у нее найдется внутренний автоморфизм, для которого класс скрученной сопряженности единичного элемента не является подгруппой. В теореме 3 доказано, что если в некоторой группе класс скрученной сопряженности является подгруппой для всякого внутреннего автоморфизма и при этом группа удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп, то эта группа нильпотентна. Следовательно, для таких групп и, в частности, для конечных групп первая часть сформулированной выше гипотезы справедлива.

В § 3 доказано, что во всякой неабелевой простой группе найдется внутренний автоморфизм φ, для которого класс $[e]_\varphi$ не является подгруппой. Далее изучается группа подстановок S_n и доказывается, что если внутренний автоморфизм φ определяется четной подстановкой, то класс $[e]_\varphi$ не является подгруппой.

В § 4 изучаются классы скрученной сопряженности единичного элемента в некоторых разрешимых и нильпотентных группах. Установлено, что в любой группе класс $[e]_\varphi$ является подгруппой для любого центрального автоморфизма φ. В качестве следствия получается утверждение о том, что в свободной двуступенно нильпотентной группе класс $[e]_\varphi$ является подгруппой для любого IA-автоморфизма φ, но для трехступенно нильпотентных групп это уже неверно.

По ходу изложения и в конце работы формулируются некоторые открытые вопросы.

Авторы благодарят О. В. Брюханова, В. А. Романькова, Ю. В. Сосновского, а также всех участников семинара «Эварист Галуа» за полезные замечания и предложения.

§ 1. Определения и простейшие свойства

Пусть G — группа, $\operatorname{End} G$ — $\operatorname{Aut} G$ — множества ее эндоморфизмов и автоморфизмов соответственно. Если $h \in G$, то символом $\hat{h}$ будем обозначать внутренний автоморфизм $\hat{h} : x \mapsto h^{-1}xh$. Символом $\operatorname{Inn} G$ обозначается группа внутренних автоморфизмов. Для элементов $x, y \in G$ определим коммутатор $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Во всякой группе справедливы следующие коммутаторные тождества:

$$[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][[x, z], y][y, z], \tag{1}$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][[x, y], z], \tag{2}$$

$$[x, y]^{-1} = [y, x]. \tag{3}$$

Для элемента g из G символом g^G будем обозначать множество элементов из G, сопряженных с g.

Если $\varphi \in \operatorname{End} G$, то говорят, что элементы x и y из G *φ-сопряжены*, если для некоторого элемента $z \in G$ справедливо равенство $y = z^{-1}xz^\varphi$. Легко видеть, что отношение φ-сопряженности является отношением эквивалентности на группе G и класс эквивалентности элемента $x \in G$ обозначается $[x]_\varphi$. Таким образом, $[x]_\varphi = \{z^{-1}xz^\varphi \mid z \in G\}$. В частности, если $\varphi = \hat{h}$ — внутренний автоморфизм, то для упрощения записи вместо $[x]_{\hat{h}}$ будем писать $[x]_h$. Тогда $[x]_h = \{z^{-1}xz^h = z^{-1}xh^{-1}zh \mid z \in G\}$.

Непосредственно из определения следует, что если ε — тривиальный эндоморфизм группы G, т. е. $\varepsilon(G) = e$, то $[e]_\varepsilon = G$. С другой стороны, для тождественного автоморфизма id группы G класс $[e]_{\mathrm{id}}$ содержит только единичный элемент e. Более интересным является

Предложение 1. *Пусть $\varphi \in \operatorname{End} G$. Если класс φ-сопряженности $[e]_\varphi$ единичного элемента e группы G является подгруппой, то эта подгруппа нормальна в G.*

Доказательство. По определению всякий элемент из класса $[e]_\varphi$ имеет вид $z^{-1}z^\varphi$ для некоторого z из G. Перепишем его в виде $[z,\varphi]$. Далее воспользуемся коммутаторным тождеством (1): $[xy,\varphi] = [x,\varphi]^y[y,\varphi]$. Имеем $[x,\varphi]^y = [xy,\varphi][y,\varphi]^{-1}$. Так как $[e]_\varphi$ — подгруппа в группе G, то $[x,\varphi]^y \in [e]_\varphi$ для любого y из G. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть $\varphi \in \operatorname{End} G$, $\theta \in \operatorname{Aut} G$. Тогда*
(1) $([e]_\varphi)^\theta = [e]_{\varphi^\theta}$;
(2) *пересечение* $\bigcap\limits_{\psi \in \operatorname{Aut} G} [e]_\psi$ *— характеристическая подгруппа в группе G.*

Доказательство. (1) Вытекает из равенства $[x,\varphi]^\theta = [x^\theta, \varphi^\theta]$.
(2) Легко следует из (1). Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Aut} G$ и $[e]_\varphi, [e]_\psi \le G$. Тогда $[e]_{\varphi\psi} \subseteq [e]_\varphi[e]_\psi$.*

Доказательство следует из коммутаторного тождества

$$[x,\varphi\psi] = [x,\psi][x,\varphi]^\psi = [x,\psi][x,\varphi][[x,\varphi],\psi]$$

и нормальности подгрупп $[e]_\varphi$, $[e]_\psi$.

Построенный ниже пример показывает, что в общем случае включение $[e]_{\varphi\psi} \subseteq [e]_\varphi[e]_\psi$ строгое. Более того, этот пример показывает, что из того, что классы $[e]_\varphi$ и $[e]_\varphi$ являются подгруппами для автоморфизмов φ и ψ, еще не следует, что класс $[e]_{\varphi\psi}$ — подгруппа.

Пример 1. Рассмотрим свободную двупорожденную двуступенно нильпотентную группу $N = N_{2,2}$ со свободными порождающими x, y и два ее автоморфизма $\varphi : x \mapsto x^{-1}$, $y \mapsto y$ и $\psi : x \mapsto x$, $y \mapsto y^{-1}$. Покажем, что $[e]_\varphi$, $[e]_\psi$ являются подгруппами в группе N, а $[e]_{\varphi\psi}$ нет.

Любой элемент z в группе N однозначно представим в виде $z = x^a y^b [x,y]^c$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Поэтому $z^{-1}z^\varphi = x^{-2a}[x,y]^{-2ab-2c}$. Так как a, b, c — произвольные целые числа, $[e]_\varphi = \{x^{2a}[x,y]^{2c} \mid a,c \in \mathbb{Z}\}$. Аналогично $[e]_\psi = \{y^{2b}[x,y]^{2c} \mid b,c \in \mathbb{Z}\}$. Ясно, что $[e]_\varphi$, $[e]_\psi$ являются подгруппами в группе N.

Для произведения $\varphi\psi$ имеем $z^{-1}z^{\varphi\psi} = x^{-2a}y^{-2b}[x,y]^{-2ab}$. Поскольку a, b — произвольные целые числа,

$$[e]_{\varphi\psi} = \{x^{2a}y^{2b}[x,y]^{-2ab} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

Элементы x^2, y^2 лежат в $[e]_{\varphi\psi}$, а их произведение x^2y^2 нет, поэтому $[e]_{\varphi\psi}$ не является подгруппой.

Покажем, что теорема Фельштына — Троицкого перестает быть справедливой уже для группы подстановок S_3, которая является полупрямым расширением циклической группы порядка 3 при помощи циклической группы второго порядка.

Пример 2. Рассмотрим группу подстановок на трех символах $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ и внутренний автоморфизм, индуцированный элементом $h = (123)$. В этом случае $[e]_h = [S_3, (123)] = \{e, (132)\}$, т. е. $[e]_h$ не является подгруппой.

Если же рассмотреть внутренний автоморфизм, индуцированный элементом $h = (12)$, то в этом случае $[e]_h = [S_3, (12)] = \{e, (123), (132)\}$, т. е. $[S_3, (12)] = A_3$, а потому $|S_3 : [e]_h| = 2$. С другой стороны, легко заметить, что число $R(\hat{h})$ классов $\hat{h}$-сопряженности в S_3 равно трем, так как $S_3 = [e]_h \sqcup [(12)]_h \sqcup [(13)]_h$, где $[(12)]_h = \{(12)\}$, $[(13)]_h = \{(13), (23)\}$.

§ 2. Внутренние автоморфизмы

Покажем вначале, что изучение классов скрученной сопряженности для внутренних автоморфизмов сводится к изучению классов обычной сопряженности. Справедливо

Предложение 4. *Пусть $g, h \in G$. Тогда класс $\hat{h}$-сопряженности элемента g равен классу сопряженности элемента gh^{-1} в G, умноженному на элемент h, т. е. $[g]_h = (gh^{-1})^G \cdot h$.*

Доказательство следует непосредственно из определения.

Известно (см., например, [10, теорема 2.5.6]), что число элементов, сопряженных с элементом g в G, равно $|g^G| = |G : N_G(g)|$. Из этого равенства и предыдущего предложения легко получаем такое

Следствие 1. *Для элементов $g, h \in G$ справедливо равенство $|[g]_h| = |G : N_G(gh^{-1})|$.*

В частности, если рассматриваем класс $\hat{h}$-сопряженности единичного элемента, то $[e]_h = (h^{-1})^G h = [G, h]$. Следовательно, класс $[e]_h$ образует подгруппу тогда и только тогда, когда множество коммутаторов $[G, h]$ образует подгруппу. В частности, для любых элементов x, y из G найдется элемент $z \in G$ такой, что справедливо равенство $[x, h][y, h] = [z, h]$, а также для всякого элемента $x \in G$ найдется элемент $x' \in G$ такой, что справедливо равенство $[x, h]^{-1} = [x', h]$. В частности, отсюда следует, что примеры групп, для которых класс $[e]_h$ образует подгруппу для любого внутреннего автоморфизма $\hat{h}$, можно искать среди групп, у которых всякий элемент из коммутанта является коммутатором. Примеры таких групп дают симметрическая группа и знакопеременная группа. В следующем параграфе рассмотрим эти группы более подробно.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 1. *Класс $[e]_h$ при $e \neq h \in G$ не содержит элемента h.*

Напомним (см. [10, § 22]), что группа принадлежит классу Куроша — Черникова $\overline{Z}$, если в ней всякую нормальную матрешку можно уплотнить до центральной матрешки. Справедлива

Теорема 1. *Пусть группа G такова, что для любого $h \in G$ класс скрученной сопряженности $[e]_h$ является подгруппой группы G. Тогда группа G принадлежит классу $\overline{Z}$.*

Доказательство. В книге Робинсона [11] получен следующий критерий принадлежности группы N классу $\overline{Z}$: N принадлежит классу $\overline{Z}$ тогда и только тогда, когда для всякого неединичного элемента $h \in N$ выполняется условие $h \notin \langle [g, h] \mid g \in N \rangle$. Если группа G удовлетворяет условиям теоремы, то, как замечено ранее, $[e]_h = [G, h] = \langle [g, h] \mid g \in G \rangle$ и в силу леммы 1 элемент h не лежит в $[e]_h$. Следовательно, G принадлежит классу $\overline{Z}$.

Предложение 5. *Пусть группа G такова, что для некоторого $h \in G$ класс скрученной сопряженности $[e]_h$ является подгруппой в G. Тогда для любой нормальной подгруппы $N \trianglelefteq G$ класс скрученной сопряженности $[\bar{e}]_{\bar{h}}$ является подгруппой в G/N. Здесь $\bar{e}$ — единица фактор-группы G/N, $\bar{h} = hN \in G/N$.*

Доказательство следует из равенств

$$[\bar{x}, \bar{h}][\bar{y}, \bar{h}] = [x, h][y, h]N = [z, h]N = [\bar{z}, \bar{h}],$$

$$[\bar{x}, \bar{h}]^{-1} = [x, h]^{-1}N = [x', h]N = [\bar{x}', \bar{h}].$$

Предложение 6. *Пусть группа G такова, что $[e]_h \leq G$ для любого $h \in G$. Тогда для любой собственной максимальной нормальной подгруппы N группы G фактор-группа G/N является циклической простого порядка.*

Доказательство. Так как N — максимальная нормальная подгруппа, G/N — простая группа. По предложению 5 в фактор-группе G/N каждый класс $[\bar{e}]_{\bar{h}}$ является подгруппой для любого $\bar{h} = hN \in G/N$. По предложению 1 $[\bar{e}]_{\bar{h}}$ — нормальная подгруппа. По лемме 1 $[\bar{e}]_{\bar{h}} \lneqq G/N$. Поскольку G/N — простая группа, то $[\bar{e}]_{\bar{h}} = \{\bar{e}\}$. Следовательно, фактор-группа G/N абелева. Очевидно, что всякая простая абелева группа является циклической простого порядка. Предложение доказано.

Докажем основной результат о строении групп, у которых класс скрученной сопряженности является подгруппой для любого внутреннего автоморфизма.

Теорема 2. *Пусть группа G такова, что для любого $h \in G$ класс $\hat{h}$-сопряженности $[e]_h$ является подгруппой. Тогда в G существует строго убывающая матрешка нормальных подгрупп $G \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \ldots$.*

Доказательство. Выберем некоторый элемент $h_0 \in G$ и определим подгруппу $G_1 = [e]_{h_0}$. По лемме 1 имеет место неравенство $G_1 \neq G$, ибо h_0 не лежит в G_1. Далее выберем некоторый элемент $h_1 \in G_1$ и определим подгруппу $G_2 = [e]_{h_1}$. Так как G_1 — нормальная подгруппа в G, то G_2 содержится в G_1. По лемме 1 имеет место неравенство $G_2 \neq G_1$, поскольку h_1 не лежит в G_2, и т. д. Получим искомую матрешку нормальных подгрупп в группе G:

$$G \triangleright G_1 = [e]_{h_0} \triangleright G_2 = [e]_{h_1} \triangleright \cdots \triangleright G_{k+1} = [e]_{h_k} \triangleright \ldots,$$

где $h_k \in G_k = [e]_{h_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots$. Теорема доказана.

Вопрос 1. *Можно ли что-то сказать про секции этой матрешки?*

Из доказанной теоремы получаем такое

Следствие 2. *Если группа G имеет тривиальный центр и удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп, то найдется элемент $h \in G$, для которого класс скрученной сопряженности $[e]_h$ не является подгруппой группы G.*

Доказательство проведем от противного. Пусть группа G такая, что $[e]_h \leq G$ для любого $h \in G$. По теореме 2 имеем нормальную матрешку

$$G \triangleright G_1 = [e]_{h_0} \triangleright G_2 = [e]_{h_1} \triangleright \cdots \triangleright G_{k+1} = [e]_{h_k} \triangleright \ldots,$$

где $e \neq h_k \in G_k = [e]_{h_{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots$. Из условия минимальности для нормальных подгрупп следует, что $G_{k+1} = \{e\}$ для некоторого номера k. Это означает, что $x^{-1}h_k^{-1}xh_k = e$ для любого $x \in G$, т. е. h_k лежит в центре группы G. Так как $h_k \neq e$, это противоречит тому, что группа G имеет тривиальный центр. Следствие доказано.

Непосредственно из доказательства следствия 2 получаем такое

Предложение 7. *Пусть $[e]_h$ является подгруппой для некоторого $h \in G$. Тогда центр фактор-группы $G/[e]_h$ нетривиален.*

Доказательство. Очевидно, что элемент $h[e]_h \neq [e]_h$ принадлежит центру этой группы.

Далее символом min-n (max-n) будем обозначать условие обрыва убывающей (соответственно возрастающей) матрешки нормальных подгрупп. Справедливо

Следствие 3. *Пусть группа G удовлетворяет условию* min-n *и для всякого элемента $h \in G$ класс $[e]_h$ является подгруппой. Тогда центр группы G нетривиален.*

Доказательство. По теореме 2 существует матрешка нормальных подгрупп

$$G \triangleright G_1 = [e]_{h_0} \triangleright G_2 = [e]_{h_1} \triangleright \cdots \triangleright G_{k+1} = [e]_{h_k} \triangleright \ldots.$$

Из условия min-n следует, что она обрывается, т. е. $[e]_{h_n} = \{e\}$ для некоторого нетривиального элемента h_n, но это и означает, что элемент h_n лежит в центре группы G. Следствие доказано.

Теорема 3. *Пусть группа G удовлетворяет условиям* min-n *и* max-n, *и для всякого элемента $h \in G$ класс $[e]_h$ является подгруппой. Тогда группа G нильпотентна.*

Доказательство. По следствию 3 центр $Z(G)$ нетривиален. По предложению 5 фактор-группа $\overline{G} = G/Z(G)$ удовлетворяет следующему условию: для любого элемента $\bar{h} \in \overline{G}$ класс $[\bar{e}]_{\bar{h}}$ является подгруппой группы $\overline{G}$. Учитывая, что условие min-n переносится на фактор-группы, заключаем, что центр группы $\overline{G}$ нетривиален. Таким образом, в G есть возрастающая матрешка гиперцентров $\{e\} < \zeta_1(G) = Z(G) < \zeta_2(G) < \ldots$. Учитывая, что G удовлетворяет условию max-n, заключаем, что $\zeta_m(G) = G$ для некоторого натурального m. Следовательно, группа G нильпотентна. Теорема доказана.

Всякая конечная группа удовлетворяет условиям min-n и max-n, а потому непосредственно из доказанной теоремы получаем

Следствие 4. *Пусть в конечной группе G для всякого элемента $h \in G$ класс $[e]_h$ является подгруппой. Тогда группа G нильпотентна.*

Вопрос 2. *Можно ли в следствии 4 утверждать, что G нильпотентна ступени 2?*

Установим связь между классами скрученной сопряженности единичного элемента и некоторыми вербальными подгруппами группы.

Предложение 8. *Пусть для любого элемента $h \in G$ класс скрученной сопряженности $[e]_h$ является подгруппой группы G. Если для всякого нетривиального класса $[e]_h \neq \{e\}$ фактор-группа $G/[e]_h$ абелева, то коммутант G' лежит в центре $Z(G)$ группы G.*

Доказательство. Так как $G/[e]_h$ абелева, $G' \subseteq [e]_h$. С другой стороны, $[e]_h \subseteq G'$. Поэтому $G' = [e]_h$. Пусть $h_1 \in G'$ и $h_1 \notin Z(G)$. Тогда $[e]_{h_1} < [e]_h$ (равенства нет, поскольку $h_1 \notin [e]_{h_1}$). Это противоречит тому, что $[e]_{h_1} = G' = [e]_h$. Предложение доказано.

Пусть теперь $w(x) = w(x_1, \ldots, x_n)$ — внешне коммутаторное слово в свободной группе $F_n = \langle x_1, x_2, \ldots , x_n\rangle$, т. е. выписаны рядом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и как-то расставлены $n-1$ пар коммутаторных скобок. Если G — некоторая группа, то символом $w(g) = w(g_1, g_2, \ldots , g_n)$ будем обозначать значение слова w на группе G. В этих обозначениях справедлива

Лемма 2. *Пусть для любого элемента $h \in G$ класс скрученной сопряженности $[e]_h$ является подгруппой группы G, $g = (g_1, g_2, \ldots , g_n)$. Тогда*

(1) $w(g) \in [e]_{g_1} \cap \cdots \cap [e]_{g_n}$;

(2) $[e]_{w(g_1,\ldots,g_n)} \leq [e]_{g_1} \cap \cdots \cap [e]_{g_n}$.

Доказательство. (1) Проведем индукцию по длине слова $w(x)$. Если $n = 2$, то $w(g) = [g_1, g_2] \in [e]_{g_2}$. С другой стороны, $w(g) = [g_2, g_1]^{-1} \in [e]_{g_1}$. Допустим, что утверждение верно для всех коммутаторных слов длины, не превосходящей n. Пусть $w = [u, v]$ — коммутаторное слово длины n, где u, v — коммутаторные слова меньшей длины. Для определенности будем считать, что $u = u(x_1, \ldots, x_k)$, $v = v(x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Пусть $i \leq k$. По индукционному предположению $u(g) \in [e]_{g_i}$. Тогда $u(g) = [a_i, g_i]$ для некоторого a_i, $i = 1, \ldots , k$. Следовательно, $w(g) = [[a_i, g_i], v(g)] = [a_i, g_i]^{-1}[a_i, g_i]^v \in [e]_{g_i}$. В силу произвольности выбора i имеем $w(g) \in [e]_{g_1} \cap \cdots \cap [e]_{g_k}$. Случай $i \geq k$ разбирается аналогично.

(2) Из того, что $w \in [e]_{g_i}$ и $[e]_{g_i}$ нормальна в G, следует, что $[e]_{w(g)}$ является подгруппой в $[e]_{g_i}$. Лемма доказана.

В теореме 2 построена некоторая нормальная матрешка подгрупп группы G. Следующее предложение показывает, какие элементы могут быть выбраны в качестве последовательности $\{h_i\}$.

Предложение 9. *Для любых элементов $g_1, \ldots, g_n$ из G существует нормальная матрешка*

$$[e]_{g_1} > [e]_{[g_1,g_2]} > [e]_{[g_1,g_2,g_3]} > \cdots > [e]_{[g_1,\ldots,g_n]}.$$

При этом если ни один из элементов

$$g_1, [g_1, g_2], [g_1, g_2, g_3], \ldots , [g_1, \ldots , g_n]$$

не является центральным, то все включения строгие.

Как уже отмечено, пересечение $\bigcap\limits_{\varphi\in \operatorname{Aut} G} [e]_\varphi$ — характеристическая подгруппа. Более того, в силу леммы 1 имеем

$$\bigcap_{\varphi\in \operatorname{Aut} G} [e]_\varphi < \bigcap_{g\in G\setminus Z(G)} [e]_g \subset Z(G).$$

§ 3. Простые группы и группы подстановок

Для простых групп справедлива

Теорема 4. *Пусть G — простая неабелева группа, h — неединичный элемент из G. Тогда $[e]_h$ не является подгруппой в группе G.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть $[e]_h$ — подгруппа в группе G. По предложению 1 она является нормальной подгруппой. Так как G — простая группа, $[e]_h = G$. Это означает, что для любого элемента $g \in G$ найдется элемент $x \in G$, для которого выполняется равенство $[x, h] = g$. Возьмем $g = h$, получим $[x, h] = h$, т. е. $h = e$. Противоречие с тем, что h — неединичный элемент группы G. Теорема доказана.

Замечание. Если в группе G класс $[e]_h$ является подгруппой, а по предложению 1 и нормальной подгруппой, то ввиду предложения 2 справедливо равенство $([e]_h)^g = [e]_{h^g}$ для любого $g \in G$. Поэтому, перебирая элементы h, достаточно перебирать представителей классов сопряженности.

Для знакопеременной группы справедливо

Предложение 10. *В группе A_n, $n \geq 4$, найдется элемент h, для которого класс $[e]_h$ не является подгруппой.*

Доказательство. При $n \geq 5$ требуемое утверждение вытекает из предыдущего предложения.

Рассмотрим группу $A_4 = \{e, (123), (132), (134), (143), (124), (142), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Учитывая сформулированное выше замечание, мы должны рассмотреть два случая $h = (123)$, $(12)(34)$.

Зафиксируем $h = (123)$ и рассмотрим класс $[e]_h$. Очевидно, что он совпадает с множеством коммутаторов $[A_4, h]$. Прямые вычисления показывают, что

$$[A_4, (123)] = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

т. е. $[e]_{(123)}$ — четверная группа Клейна [10, § 3]. При этом (123) не лежит в этой группе.

Зафиксируем $h = (12)(34)$. Тогда

$$[A_4, (12)(34)] = \{e, (13)(24), (14)(23)\}.$$

Очевидно, что эти элементы не образуют подгруппу, а потому класс $[e]_{(12)(34)}$ не является подгруппой. Предложение доказано.

Рассмотрим группу подстановок S_n. Справедливо

Предложение 11. *Если в группе подстановок S_n, $n \geq 5$, элемент h принадлежит A_n, то класс $[e]_h$ не является подгруппой.*

Доказательство. Так как $[e]_h = [S_n, h]$, все элементы из $[e]_h$ лежат в A_n. Если $[e]_h$ — подгруппа, то по предложению 1 она является нормальной подгруппой. Учитывая, что центр группы S_n тривиален, заключаем, что множество $[e]_h$ содержит неединичные элементы, а потому совпадает с A_n. С другой стороны, по лемме 1 сам элемент h не принадлежит классу $[e]_h$. Полученное противоречие и доказывает нужное утверждение.

Отметим, что группы S_3 и A_4 являются полупрямыми расширениями абелевой группы при помощи циклической. Действительно, есть точная последовательность

$$1 \longrightarrow A_3 \longrightarrow S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1,$$

при этом $A_3 = S_3'$ и $S_3 = \mathbb{Z}_3 \leftthreetimes \mathbb{Z}_2$, т. е. S_3 является расширением группы $\mathbb{Z}_3$ при помощи группы $\mathbb{Z}_2$.

Аналогично есть точная последовательность

$$1 \longrightarrow K_4 \longrightarrow A_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 1,$$

при этом $K_4 = A_4' = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, т. е. A_4 является расширением группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ при помощи группы $\mathbb{Z}_3$.

Вопрос 3. *Пусть группа G — расширение абелевой группы при помощи циклической (при помощи абелевой). Можно ли утверждать, что найдется элемент $h \in G$, для которого класс $[e]_h$ не является подгруппой?*

Вопрос 4. *Расширения абелевых групп описываются в терминах групп гомологий. Можно ли в этих терминах сформулировать условия того, что каждый класс скрученной сопряженности единичного элемента является подгруппой?*

§ 4. Разрешимые группы

Как показано в примере 1, уже в двуступенно нильпотентных группах существуют автоморфизмы, для которых класс скрученной сопряженности единичного элемента не является подгруппой. Тем не менее для центральных автоморфизмов справедливо

Предложение 12. *Пусть G — группа, а $\varphi : G \to G$ — центральный автоморфизм группы G. Тогда множество $[e]_\varphi$ является подгруппой в G.*

Доказательство. Так как φ — центральный автоморфизм группы G, он действует по правилу $\varphi : x \mapsto \overline{\varphi}(x)x$, где $\overline{\varphi} : G \to Z(G)$ — гомоморфизм группы G в ее центр $Z(G)$. Отсюда следует, что

$$[e]_\varphi = \{x^{-1}\varphi(x) \mid x \in G\} = \{x^{-1}\overline{\varphi}(x)x \mid x \in G\} = \{\overline{\varphi}(x) \mid x \in G\}.$$

Очевидно, что множество такого вида является подгруппой в G. Более того, так как $\overline{\varphi}$ — гомоморфизм в центр группы G, то $[e]_\varphi$ является подгруппой и в $Z(G)$.

Гипотеза 2. *Если группа G не имеет центра, то найдется внутренний автоморфизм φ такой, что $[e]_\varphi$ не является подгруппой.*

Таким образом, мы должны рассматривать группы с нетривиальным центром. В частности, нильпотентные группы.

Как известно, группа S_n при $n \geq 3$ совершенна, а потому не имеет центра. Группа A_n при $n \geq 5$ проста, а потому не имеет центра. Как показывают приведенные выше вычисления, группа A_4 также не имеет центра.

Напомним, что автоморфизм свободной нильпотентной группы $N_{n,r}$ называется IA-*автоморфизмом*, если он действует тождественно по модулю коммутанта $N_{n,r}$. Существует короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow \mathrm{IA}(N_{n,r}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, N_{n,r} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

Если при этом $r = 2$, то всякий IA-автоморфизм централен, а потому из доказанного предложения получаем

Следствие 5. *Для всякого* IA-*автоморфизма φ свободной двуступенно нильпотентной группы $N_{n,2}$ класс $[e]_\varphi$ является подгруппой.*

Покажем, что обобщить это утверждение на свободные нильпотентные группы произвольной ступени уже нельзя.

Предложение 13. *В свободной трехступенно нильпотентной группе ранга 2 существует внутренний автоморфизм, для которого класс скрученной сопряженности единичного элемента не является подгруппой.*

Доказательство. Пусть $G = N_{2,3}$ — свободная трехступенно нильпотентная группа ранга 2 с порождающими x, y, а φ — автоморфизм, действующий по правилу $x \mapsto x[x, y]$, $y \mapsto y$. Очевидно, что это IA-автоморфизм. Более того, φ внутренний: $\varphi = \hat{y}$ — сопряжение элементом y.

Любой элемент группы G имеет вид $g = x^a y^b [y, x]^c [[y, x], y]^d [[y, x], x]^f$ для некоторых целых a, b, c, d, f. Тогда

$$\begin{aligned}[g, y] &= [x^a y^b [y, x]^c, y] = [x^a y^b, y]^{[y,x]^c} [[y, x]^c, y] = [x^a y^b, y][[y, x], y]^c \\ &= [x^a, y]^{y^b} [[y, x], y]^c = [x^a, y][[x^a, y], y^b][[y, x], y]^c \\ &= [x, y]^a [[x, y], x]^{\frac{a(a-1)}{2}} [[x, y], y]^{ab} [[y, x], y]^c \\ &= [x, y]^a [[x, y], x]^{\frac{a(a-1)}{2}} [[y, x], y]^{c-ab} = [y, x]^{-a} [[y, x], x]^{-\frac{a(a-1)}{2}} [[y, x], y]^{c-ab},\end{aligned}$$

т. е. для класса скрученной сопряженности единичного элемента имеем

$$[e]_\varphi = \{[y, x]^{-a} [[y, x], x]^{-\frac{a(a-1)}{2}} [[y, x], y]^{c-ab} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Ясно, что коммутатор $[x, y]$ лежит в классе $[e]_\varphi$ (при $a = b = c = 1$). Но его квадрат $[x, y]^2$ уже не принадлежит классу $[e]_\varphi$. Действительно, допустим, что $[x, y]^2 \in [e]_\varphi$, тогда

$$[x, y]^2 = [y, x]^{-a} [[y, x], x]^{-\frac{a(a-1)}{2}} [[y, x], y]^{c-ab}.$$

Следовательно, $a = 2$ и

$$[x, y]^2 = [y, x]^{-2} = [y, x]^{-2} [[y, x], x]^{-1} [[y, x], y]^{c-2b},$$

т. е. $[[y, x], x]^{-1} [[y, x], y]^{c-2b} = e$, что невозможно в группе $N_{2,3}$ ни для каких целых b и c. Следовательно, класс $[e]_\varphi$ не является подгруппой.

Предложение 14. *Существует группа, в которой класс $[e]_\varphi$ не является подгруппой для некоторого автоморфизма φ, но для всякого эндоморфизма ψ, имеющего нетривиальное ядро, класс $[e]_\psi$ является подгруппой.*

Доказательство. Рассмотрим группу

$$G = \text{гр}(x, y \mid x^2 = y^2 = [x, y]^2 = [[x, y], x] = [[x, y], y] = 1).$$

Непосредственно из приведенного представления группы G следуют следующие утверждения.

1. $G = \{e, x, y, xy, [x, y], x[x, y], y[x, y], xy[x, y]\}$, т. е. $|G| = 8$.
2. В группе G выполнены соотношения

$$[x, y] = (xy)^2, \quad [x, y]^{-1} = [y, x] = [x, y], \quad (xy)^4 = e, \quad yx = (xy)^3.$$

3. Центр группы G совпадает с ее коммутантом и является циклической подгруппой порядка 2 с порождающим $[x, y] = (xy)^2$.

Приведем описание классов скрученной сопряженности $[e]_\varphi$, $\varphi \in \operatorname{End} G$.

В соответствии с предложением 2 достаточно выбрать представителей множества $\operatorname{End} G$ по отношению сопряженности относительно группы $\operatorname{Aut} G$.

Заметим, что любой эндоморфизм группы G определяется своим действием на порождающих x, y. Так как x, y — элементы второго порядка, учитывая определяющие соотношения группы G, получаем, что любое отображение $x^\varphi = a$, $y^\varphi = b$, где a и b — элементы второго порядка группы G, задает эндоморфизм группы G.

Множество элементов второго порядка группы G имеет вид $\{e, x, y, [x,y], x[x,y], y[x,y]\}$, поэтому $|\operatorname{End} G| = 36$. Полная информация о множестве $\operatorname{End} G$ содержится в табл. 1.

Таблица 1

	e	x	y	$[x,y]$	$x[x,y]$	$y[x,y]$
e	$E.0$	$E.2$	$E.4$	$E.5$	$E.2$	$E.4$
x	$E.4$	$E.3$	$A.3$	$E.1$	$E.7$	$A.4$
y	$E.2$	$A.0$	$E.3$	$E.8$	$A.1$	$E.7$
$[x,y]$	$E.5$	$E.8$	$E.1$	$E.6$	$E.8$	$E.1$
$x[x,y]$	$E.4$	$E.7$	$A.4$	$E.1$	$E.3$	$A.3$
$y[x,y]$	$E.2$	$A.1$	$E.7$	$E.8$	$A.2$	$E.3$

В верхней строке указано значение эндоморфизма на элементе x, а в левом столбце — на элементе y. Буква A соответствует тому, что данной клетке отвечает автоморфизм, а буква E — тому, что данной клетке отвечает эндоморфизм (причем с нетривиальным ядром). Цифра после букв A, E — номер класса сопряженности относительно элементов группы $\operatorname{Aut} G$.

Например, класс $E.0$ состоит из тривиального эндоморфизма ε: $\varepsilon(g) = e$ для любого $g \in G$. Класс $A.0$ состоит из тождественного автоморфизма группы G. Класс $E.1$ содержит четыре эндоморфизма:

$$(x^\varphi = (xy)^2,\ y^\varphi = x), \quad (x^\varphi = y,\ y^\varphi = (xy)^2),$$

$$(x^\varphi = y(xy)^2,\ y^\varphi = (xy)^2), \quad (x^\varphi = (xy)^2,\ y^\varphi = x(xy)^2),$$

и т. д. Отметим только, что класс $A.2$ состоит из единственного внутреннего автоморфизма, соответствующего элементу xy группы G, и этот автоморфизм порождает центр группы $\operatorname{Aut} G$. Порядок группы $\operatorname{Aut} G$ равен восьми.

В табл. 2, 3 содержится полная информация о классах скрученной сопряженности для автоморфизмов и эндоморфизмов.

Итак, в группе G есть автоморфизм φ, для которого класс $[e]_\varphi$ не является подгруппой, но для любого эндоморфизма φ из дополнения $\operatorname{End} G \setminus \operatorname{Aut} G$ класс $[e]_\varphi$ является подгруппой.

Покажем, что для группы из последнего предложения равенство $R(\varphi) = |G : [e]_\varphi|$ не выполняется. Действительно, рассмотрим автоморфизм φ, определенный на порождающих $x^\varphi = y$, $y^\varphi = x$. Тогда класс φ-сопряженности единичного элемента является подгруппой и состоит из элементов $[e]_\varphi = \{e, xy, (xy)^2, (xy)^3\}$; класс φ-сопряженности элемента x — из элементов $[x]_\varphi = \{x, y\}$; класс φ-сопряженности элемента $x[x,y]$ — из элементов $[x[x,y]]_\varphi = \{x[x,y], y[x,y]\}$. Таким образом, $G = [e]_\varphi \sqcup [x]_\varphi \sqcup [x[x,y]]_\varphi$, т. е. $R(\varphi) = 3$. С другой стороны, $|G| = 8$, $[e]_\varphi = 4$, а потому $|G : [e]_\varphi| = 2$.

Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения ступени нильпотентности k и $\zeta_0 G = 1 < \zeta_1 G < \cdots < \zeta_{k-1} G < \zeta_k G = G$ — ее верхний

Таблица 2

$\mathrm{Aut}\,G$	$x^\varphi = x$, $y^\varphi = y$	$x^\varphi = y$, $y^\varphi = x$	$x^\varphi = y[x,y]$, $y^\varphi = x$	$x^\varphi = x$, $y^\varphi = y[x,y]$	$x^\varphi = x[x,y]$, $y^\varphi = y[x,y]$
$x^{-1}x^\varphi$	e	xy	$(xy)^3$	e	$(xy)^2$
$(xy)^{-1}(xy)^\varphi$	e	$(xy)^2$	e	$(xy)^2$	e
$y^{-1}y^\varphi$	e	$(xy)^3$	$(xy)^3$	$(xy)^2$	$(xy)^2$
$[x,y]^{-1}[x,y]^\varphi$	e	e	e	e	e
$(x[x,y])^{-1}(x[x,y])^\varphi$	e	xy	$(xy)^3$	e	$(xy)^2$
$(xy[x,y])^{-1}(xy[x,y])^\varphi$	e	$(xy)^2$	e	$(xy)^2$	e
$(y[x,y])^{-1}(y[x,y])^\varphi$	e	$(xy)^3$	$(xy)^3$	$(xy)^2$	$(xy)^2$
	гр(e)	гр(xy)	–	гр$((xy)^2)$	гр$((xy)^2)$

Таблица 3

$\mathrm{End}\,G$	$x^\varphi = x$, $y^\varphi = e$	$x^\varphi = x$, $y^\varphi = x$	$x^\varphi = (xy)^2$, $y^\varphi = (xy)^2$	$x^\varphi = (xy)^2$, $y^\varphi = e$	$x^\varphi = y$, $y^\varphi = e$	$x^\varphi = y$, $y^\varphi = (xy)^2$	$x^\varphi = x(xy)^2$, $y^\varphi = x$	$x^\varphi = (xy)^2$, $y^\varphi = y$
$x^{-1}x^\varphi$	e	e	$x(xy)^2$	$x(xy)^2$	xy	xy	$(xy)^2$	$x(xy)^2$
$(xy)^{-1}(xy)^\varphi$	y	$(xy)^3$	$(xy)^3$	xy	$x(xy)^2$	x	xy	x
$y^{-1}y^\varphi$	y	$(xy)^3$	$y(xy)^2$	y	y	$y(xy)^2$	$(xy)^3$	e
$[x,y]^{-1}[x,y]^\varphi$	$(xy)^2$	$(xy)^2$	$(xy)^2$	$(xy)^2$	$(xy)^2$	$(xy)^2$	$(xy)^2$	$(xy)^2$
$(x[x,y])^{-1}(x[x,y])^\varphi$	$(xy)^2$	$(xy)^2$	x	x	$(xy)^3$	$(xy)^3$	e	x
$(xy[x,y])^{-1}(xy[x,y])^\varphi$	$y(xy)^2$	xy	xy	$(xy)^3$	x	$x(xy)^2$	$(xy)^3$	$x(xy)^2$
$(y[x,y])^{-1}(y[x,y])^\varphi$	$y(xy)^2$	xy	y	$y(xy)^2$	$y(xy)^2$	y	xy	$(xy)^2$
	гр$(y,(xy)^2)$	гр(xy)	G	G	G	G	гр(xy)	гр$(y,(xy)^2)$

центральный ряд. Пусть $A_i = \zeta_{i+1}G/\zeta_i G$, φ_i — автоморфизм, индуцированный φ на A_i. Если $R(\varphi) < \infty$, то, как установлено в [9], справедливо равенство

$$R(\varphi) = \prod_{i=0}^{k-1} |A_i : [e]_{\varphi_i}|.$$

Покажем, что эта формула неверна для конечных нильпотентных групп. В качестве контрпримера годится группа из последнего предложения. Действительно, для нее

$$\zeta_1(G) = Z(G) = \langle (xy)^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2, \quad \zeta_2(G) = G.$$

Автоморфизм $x^\varphi = y, \quad y^\varphi = x$ индуцирует автоморфизмы φ_0 и φ_1 групп $Z(G)$ и $G/Z(G)$ соответственно. При этом $|Z(G) : [e]_{\varphi_0}| = 2$, а $|G/Z(G) : [\bar{e}]_{\varphi_1}| = 2$. Следовательно, $|Z(G) : [e]_{\varphi_0}| \cdot |Z(G) : [e]_{\varphi_0}| = 4$, а, как было замечено ранее, $R(\varphi) = 3$.

Приведем пример группы без кручения, являющейся расширением свободной абелевой группы при помощи бесконечной циклической, включающей внутренний автоморфизм, для которого класс скрученной сопряженности единичного элемента не является подгруппой.

Пример 3. Пусть λ — переменная. Рассмотрим группу G, порожденную матрицами

$$d = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_{12}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матричные элементы лежат в кольце $\mathbb{Z}[\lambda^{\pm 1}]$. Как отмечено в [10, § 6], группа G изоморфна сплетению $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$.

Заметим, что справедливы формулы

$$d^{-1}t_{12}(\mu)d = t_{12}(\lambda^{-1}\mu), \quad dt_{12}(\mu)d^{-1} = t_{12}(\lambda\mu), \quad [d^l, t_{12}(\mu)] = t_{12}(\mu(1-\lambda^{-l})),$$

где $l \in \mathbb{Z}$ и μ — произвольный элемент кольца $\mathbb{Z}[\lambda^{\pm 1}]$.

Покажем, что не для любого $h = d^m t_{12}(\mu) \in G$ класс $[e]_h$ является подгруппой в группе G.

Предварительно заметим, что коммутант G' группы G является абелевой подгруппой и любой элемент группы G представим в виде $h = d^m t_{12}(\mu)$. Далее в вычислениях воспользуемся коммутаторными тождествами (1)–(3) из § 1. Имеем

$$\begin{aligned}
&[d^l t_{12}(\nu), d^m t_{12}(\mu)] = [d^l, d^m t_{12}(\mu)]^{t_{12}(\nu)}[t_{12}(\nu), d^m t_{12}(\mu)] \\
&\quad = [d^l, d^m t_{12}(\mu)][t_{12}(\nu), d^m t_{12}(\mu)] = [d^m t_{12}(\mu), d^l]^{-1}[d^m t_{12}(\mu), t_{12}(\nu)]^{-1} \\
&\qquad = ([d^m, d^l]^{t_{12}(\mu)}[t_{12}(\mu), d^l])^{-1}([d^m, t_{12}(\nu)]^{t_{12}(\mu)}[t_{12}(\mu), t_{12}(\nu)])^{-1} \\
&\qquad\qquad = [d^l, t_{12}(\mu)][d^m, t_{12}(\nu)]^{-1} = t_{12}(\mu(1-\lambda^{-l}) - \nu(1-\lambda^{-m})).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&[d^l t_{12}(\nu), d^m t_{12}(\mu)][d^{l_1} t_{12}(\nu_1), d^m t_{12}(\mu)] \\
&\qquad = t_{12}(\mu(2-\lambda^{-l}-\lambda^{-l_1}) - (\nu+\nu_1)(1-\lambda^{-m})).
\end{aligned}$$

Если

$$[d^l t_{12}(\nu), d^m t_{12}(\mu)][d^{l_1} t_{12}(\nu_1), d^m t_{12}(\mu)] = [d^{l_2} t_{12}(\nu_2), d^m t_{12}(\mu)],$$

т. е. $[G, d^m t_{12}(\mu)]$ является подгруппой, то

$$\mu(2-\lambda^{-l}-\lambda^{-l_1}) - (\nu+\nu_1)(1-\lambda^{-m}) = \mu(1-\lambda^{-l_2}) - \nu_2(1-\lambda^{-m})$$

или

$$\mu(1+\lambda^{-l_2}-\lambda^{-l}-\lambda^{-l_1}) = (1-\lambda^{-m})(\nu+\nu_1-\nu_2).$$

Пусть, например, $m = 0$ и $\mu \neq 0$. Тогда $1+\lambda^{-l_2} = \lambda^{-l}+\lambda^{-l_1}$. Это равенство имеет место, если и только если

$$(l = 0 \text{ и } l_1 = l_2) \quad \text{или } (l_1 = 0 \text{ и } l = l_2).$$

Таким образом, множество $[G, d^m t_{12}(\mu)]$ не для всех m и μ является подгруппой.

В заключение сформулируем ряд вопросов, решение которых позволит лучше понять строение классов скрученной сопряженности.

Вопрос 5. *Дать описание групп G, для которых $[e]_\varphi \leq G$ при условии, что*
(а) $\varphi \in \operatorname{End} G$ *— произвольный эндоморфизм;*
(б) $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ *— произвольный автоморфизм;*
(в) $\varphi \in \operatorname{Inn} G$ *— произвольный внутренний автоморфизм.*

Как установлено в предложении 12, в произвольной группе G класс $[e]_\varphi$ является подгруппой для всякого центрального автоморфизма φ.

Вопрос 6. *Пусть $Z(G)$ — центр группы G. Есть естественные отображения группы $\operatorname{Aut} G$ в группы $\operatorname{Aut}(G/Z(G))$ и $\operatorname{Aut} Z(G)$, для которых автоморфизму φ сопоставляются индуцированный автоморфизм $\overline{\varphi}$ на фактор-группе $G/Z(G)$ и ограничение $\operatorname{Res}\varphi$ на подгруппу $Z(G)$ соответственно. Ввиду предложения 12 класс $[e]_{\operatorname{Res}\varphi}$ всегда является подгруппой.*

Если $[e]_\varphi \leq G$, то что можно сказать о фактор-группе $[e]_\varphi/[e]_{\operatorname{Res}\varphi}$? Можно ли эту фактор-группу связать с $[\bar{e}]_{\overline{\varphi}}$, где $\bar{e}$ — единица фактор-группы $G/Z(G)$?

Вопрос 7. *Пусть* $N \trianglelefteq G$, $h \in G$. *Обозначим* $[e]_{h,N} = \{[x,h] \mid x \in N\}$. *Ясно, что* $[e]_{h,G} = [e]_h$.

(а) *Пусть* $[e]_h \leq G$ *для любого* $h \in G$. *Будет ли* $[e]_{h,N} \leq N$, *если* $h \in G$ (*если* $h \in N$)?

(б) *Как связаны* $N \cap [e]_h$ *и* $[e]_{h,N}$, *если* $h \in G$ (*если* $h \in N$)?

Вопрос 8. *Существует ли группа* G *такая, что* $[e]_\varphi$ — *подгруппа для любого автоморфизма* φ *группы* G, *но для некоторого* $\theta \in \operatorname{End} G$ *класс* $[e]_\theta$ *не является подгруппой? Предложение* 14 *показывает, что противоположная ситуация возможна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Higman G., Neumann B. H., Neumann H.* Embedding theorems for groups // J. London Math. Soc. 1949. V. 24. P. 247–254.
2. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
3. *Osin D. V.* Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems // Ann. Math. 2010. V. 172, N 1. P. 1–39.
4. *Fel′shtyn A.* New directions in Nielsen–Reidemeister theory // Topology Appl. 2010. V. 157, N 10–11. P. 1724–1735.
5. *Fel′shtyn A.* New directions in Nielsen–Reidemeister theory // ArXiv:0712.2601, 50 pp.
6. *Fel′shtyn A., Troitsky E.* Twisted conjugacy classes in residually finite groups // ArXiv:math. GR/1204.3175.
7. *Fel′shtyn A., Troitsky E.* Geometry of Reidemeister classes and twisted Burnside theorem // J. K-Theory. 2008. V. 2, N 3. P. 463–506.
8. *Залесский А. Е.* Пример нильпотентной группы без кручения, не имеющей внешних автоморфизмов // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 1. С. 21–26.
9. *Kukina E. G., Roman′kov V.* On the Reidemeister spectrum and the R_∞ property for some free nilpotent groups // ArXiv:math.GR/0903.4533.
10. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 2009.
11. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions an generalized soluble groups. Part 1, 2. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1972.

Статья поступила 31 октября 2012 г.

Бардаков Валерий Георгиевич, Насыбуллов Тимур Ринатович,
Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск 630090
bardakov@math.nsc.ru, timur.nasybullov@mail.ru, neshch@math.nsc.ru