Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 517.956.4

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

В. И. Антипин

Аннотация. Исследованы краевые задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа. Доказаны теоремы существования обобщенного решения, изучена гладкость решения в весовых пространствах Соболева и рассмотрены их приложения для уравнений нечетного порядка с меняющимся направлением времени.

Ключевые слова: краевая задача, операторно-дифференциальное уравнение, обобщенное решение, гладкость, весовые пространства Соболева.

Введение

В работе рассматриваются краевые задачи для операторно-дифференциальных уравнений вида

$$Au \equiv Bu_t - Lu = f(x,t), \tag{1}$$

где линейные операторы B, L определены в данном гильбертовом пространстве E, причем оператор B самосопряжен. Краевые условия имеют вид

$$P^+u(0) = u_0, \quad P^-u(T) = u_T, \tag{2}$$

где P^+, P^- — спектральные проекторы оператора B, которые отвечают положительной и отрицательной частям спектра. Здесь не предполагается, что оператор B обратим, в частности, B может иметь ненулевое ядро и спектр оператора B может содержать одновременно бесконечные подмножества положительной и отрицательной полуосей.

Известно, что подобные уравнения возникают во многих областях физики, механики и некоторых других приложениях [1]. В случае, когда оператор L самосопряжен, уравнение (1) рассматривалось в [1, 2]. В частности, в [2] можно найти ряд примеров, возникающих в приложениях.

Оператор L называется *Като-секториальным* (см. определение в [3]), если $|(Lu, v)| \leq c\|u\|_1\|v\|_1$ для любого $u \in D(L)$, где по определению $\|u\|_1^2 =$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект 4402) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашения 14.132.21.1350, 14.A18.21.0367).

$\mathrm{Re}(-(Lu,u)+\|u\|^2)$. Обобщение на случай диссипативного оператора, удовлетворяющего условию Като-секториальности, можно найти в работах С. Г. Пяткова и Н. Л. Абашеевой [4]. Краевые задачи для уравнения (1) при наших предположениях на операторы L, B в случае, когда условие Като-секториальности не выполнено, по-видимому, не рассматривались.

В разд. 1 приводятся некоторые вспомогательные утверждения и формулируются две теоремы существования решения. В разд. 2 даны доказательства основных результатов.

1. Вспомогательные утверждения

Даны гильбертовы пространства E и H_1, $H_1 \subset E$, причем последнее вложение плотно. Пусть $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в E. Тогда негативное пространство H_1', построенное как пополнение E по норме

$$\|u\|_{H_1'} = \sup_{v\in H_1, v\neq 0} |(u,v)|/\|v\|_{H_1},$$

совпадает с пространством непрерывных антилинейных функционалов над H_1 и скалярное произведение в E допускает продолжение до отношения двойственности между H_1 и H_1' [5].

Если X, Y — гильбертовы пространства, то под $L(X,Y)$ понимаем пространство линейных непрерывных отображений, определенных на X, со значениями в Y. Если $X = Y$, то пишем $L(X)$ вместо $L(X,X)$.

Назовем оператор $L: E \to E$ *диссипативным* (*равномерно диссипативным*), если $-\mathrm{Re}(Lu,u) \geq 0$ $(-\mathrm{Re}(Lu,u) \geq \delta\|u\|^2,\ \delta > 0)$ для всех $u \in D(L)$. Здесь $D(L)$ — область определения оператора L. Оператор L называется *максимальным диссипативным*, если он совпадает с любым своим диссипативным расширением.

Через $\rho(L), \sigma(L)$ обозначаем резольвентное множество и спектр оператора L. Основные предположения об операторах L, B состоят в следующем.

(I) L — максимально диссипативный оператор, и найдется гильбертово пространство F_1, плотно вложенное в E, такое, что $D(L^*) \subset F_1 \subset E$ и существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что $\mathrm{Re}(-L^*u,u) \geq \delta_0\|u\|^2_{F_1}$ для всех $u \in D(L^*)$, где L^* — сопряженный оператор.

Из условия (I) вытекает, что оператор L^* также максимальный диссипативный и $0 \in \rho(L)\cap\rho(L^*)$ [3, предложение C.7.2], более того, $\{\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\} \subset \rho(L)\cap\rho(L^*)$.

(II) Оператор B самосопряжен в E, и $F_1 \subset D(|B|^{1/2})$ плотно.

Лемма 1. *При выполнении условия* (II) *оператор B определяет непрерывное отображение пространства F_1 в F_1', где F_1' — негативное пространство, построенное по паре F_1, E.*

Доказательство. Оператор $B: D(|B|) \to E$ (в $D(|B|)$ вводим норму графика), будучи определенным на $D(|B|)$, допускает продолжение до непрерывного отображения из $D(|B|^{1/2})$ в $(D(|B|^{1/2}))'$. Действительно,

$$\|Bu\|_{(D(|B|^{1/2}))'} = \sup_{v\in D(|B|^{1/2})} \frac{|(Bu,v)|}{\|v\|_{D(|B|^{1/2})}} = \sup_{v\in D(|B|^{1/2})} \frac{|(|B|^{1/2}u, |B|^{1/2}v)|}{\|v\|_{D(|B|^{1/2})}}$$

$$\leq \sup_{v\in D(|B|^{1/2})} \frac{\||B|^{1/2}u\|\cdot\||B|^{1/2}v\|}{\|v\|_{D(|B|^{1/2})}} \leq \||B|^{1/2}u\|, \quad (3)$$

или

$$\|Bu\|_{(D(|B|^{1/2}))'} \leq \||B|^{1/2}u\|. \tag{4}$$

Имеем естественное вложение

$$F_1 \subset D(|B|^{1/2}) \subset E \subset (D(|B|^{1/2}))' \subset F_1' \tag{5}$$

(двойственное к E отождествляется с E).

Таким образом, оператор B, определенный на $D(|B|^{1/2})$, определен и на пространстве F_1, и имеем

$$\|Bu\|_{F_1'} \leq c\|u\|_{(D(|B|^{1/2}))'} \leq c_1\|u\|_{F_1}. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (I). *Тогда $D(L)$ плотно вложен в F_1 и операторы $L^{-1}, (L^*)^{-1}$ допускают продолжение до отображений класса $L(F_1', F_1)$.*

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{Re}(-L^*u, u) \geq \delta_0\|u\|_{F_1}^2, \tag{7}$$

$$|\operatorname{Re}(-L^*u, u)| \leq |(L^*u, u)| \leq \|L^*u\|_{F_1'}\|u\|_{F_1} \quad \forall u \in D(L^*). \tag{8}$$

Используя это неравенство в левой части (3) и сокращая на $\|u\|_{F_1}$, получим $\|L^*u\|_{F_1'} \geq \delta_0\|u\|_{F_1}$. Поскольку $0 \in \rho(L^*)$ [3], неравенство переписывается в виде

$$\|v\|_{F_1'} \geq \delta_0\|(L^*)^{-1}v\|_{F_1} \quad \forall v \in E. \tag{9}$$

Так как F_1 плотно вложено в E, то E плотно вложено в F_1', т. е. $F_1 \subset E \subset F_1'$ и из (9) вытекает, что $(L^*)^{-1}$ допускает продолжение до оператора класса $L(F_1', F_1)$. Имеем

$$(L^{-1}u, u) = (u, (L^*)^{-1}v) \quad \forall u, v \in E. \tag{10}$$

Далее, для любого $u \in E$

$$\begin{aligned}\|L^{-1}u\|_{F_1} &= \sup_{v\in E}\frac{|(L^{-1}u, v)|}{\|v\|_{F_1'}} = \sup_{v\in E}\frac{|(u, (L^*)^{-1}v)|}{\|v\|_{F_1'}} \\ &\leq \sup_{v\in E}\frac{\|u\|_{F_1'}\|(L^*)^{-1}v)\|_{F_1}}{\|v\|_{F_1'}} \leq \sup_{v\in H}\frac{\|u\|_{F_1'}}{\delta_0}\frac{\|v\|_{F_1'}}{\|v\|_{F_1'}},\end{aligned} \tag{11}$$

откуда

$$\|L^{-1}u\|_{F_1} \leq \frac{\|u\|_{F_1'}}{\delta_0}. \tag{12}$$

Из (12) следует, что L^{-1} допускает продолжение до оператора класса $L(F_1', F_1)$.

Рассмотрим равенство

$$(L^{-1}u, u) = (u, (L^*)^{-1}v) \quad \forall u, v \in E. \tag{13}$$

Имеем

$$|(u, (L^*)^{-1}v)| \leq \|(L^*)^{-1}v\|_{F_1}\|u\|_{F_1'} \leq c\|v\|_{F_1'}\|u\|_{F_1'}. \tag{14}$$

Если u фиксирована, то выражение $(u, (L^*)^{-1}v)$ есть антилинейный непрерывный функционал над F_1' (по v).

Существует $g \in F_1$ такой, что

$$(u, (L^*)^{-1}v) = (g, v) = (L^{-1}u, v) \quad \forall u, v \in E.$$

Таким образом, $g = L^{-1}u$, и, значит, $L^{-1}u \in F_1$ для любого $u \in E$. Возьмем $\psi \in D(L)$. Тогда $u = L\psi \in E$ и $\psi = L^{-1}u$.

Из доказанного получим $\psi \in F_1$. Стало быть, $D(L) \subset F_1$. Предположим противное, т. е. что $D(L)$ не плотно в F_1. Тогда существует $v \in F_1'$, $v \neq 0$, такой, что

$$(L^{-1}u, v) = 0 \quad \forall u \in E.$$

Предельным переходом получим, что равенство $(u, (L^*)^{-1}v) = (L^{-1}u, v)$ справедливо и для $v \in F_1'$, $u \in E$. Поскольку H плотно вложено в F_1' и $(u, (L^*)^{-1}v) = 0$, то $(L^*)^{-1}v = 0$. Отсюда следует, что $v = 0$. Получили противоречие. Таким образом, $D(L)$ плотно вложено в F_1. Лемма доказана.

Обозначим через F_2 класс функций $u \in F_1$ таких, что u представимо в виде $u = L^{-1}v$, где $v \in F_1'$, и $\|u\|_{F_2} = \|L^{-1}v\|_{F_1} + \|v\|_{F_1'} = \|u\|_{F_1} + \|Lu\|_{F_1'}$. Тогда $D(L) \subset F_2 \subset F_1$.

Пусть V — комплексное векторное пространство и B_1, B_2 — комплексные банаховы пространства. Пусть M_h $(h = 1, 2)$ — линейные отображения из V в пространство B_h.

Рассмотрим следующий вопрос. Вектор φ задан, требуется найти $\psi \in B_2^*$ такой, что

$$\langle \varphi, M_1 v\rangle = \langle \psi, M_2 v\rangle \tag{15}$$

для любого $v \in V$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают отношения двойственности между соответствующими пространствами.

Теорема А (принцип существования) [6]. *Необходимым и достаточным условием существования решения задачи* (15) *для любого* $\varphi \in B_1^*$ *является существование* $k > 0$ *такого, что*

$$\|M_1 v\| \le k\|M_2 v\| \quad \forall v \in V.$$

Определим пространство H как пополнение $D(|B|^{1/2})$ по норме $\||B|^{1/2}v\| = \|u\|_H$. Как вытекает из определения, $|B|^{1/2} \in L(H, E)$.

Положим $H_1 = \{v \in L_2(0, T; D(L^*)),\ v_t \in L_2(0, T; F_1)\}$.

Определение 1. Функция $u \in L_2(0, T; F_1)$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), если найдутся $\tilde u_0, \tilde u_T \in H$ такие, что $P^-\tilde u_0 = \tilde u_0, P^+\tilde u_T = \tilde u_T$ и выполнено равенство

$$\int_0^T (-(Bu, v_t) - (u, L^*v))\,dt + (Bu_T, v(T)) - (Bu_0, v(0)) \\ + (B\tilde u_T, v(T)) - (B\tilde u_0, v(0)) = \int_0^T (f, v)\,dt \tag{16}$$

для любого $v \in L_2(0, T; D(L^*))$, $v_t \in L_2(0, T; F_1)$.

Если u — обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле определения 1, то u является обобщенным решением задачи (1), (2) в смысле следующего, более естественного, определения.

Определение 2. Функция $u \in L_2(0, T; F_1)$ называется *обобщенным решением краевой задачи* (1), (2), если выполнено равенство

$$\int_0^T (-(Bu, v_t) - (u, L^*v))\,dt + (BP^-u_T, v(T)) - (BP^+u_0, v(0)) = \int_0^T (f, v)\,dt \tag{17}$$

для любого $v \in L_2(0,T;D(L^*))$, $v_t \in L_2(0,T;F_1)$ и $P^+v(T)=0$, $P^-v(0)=0$.

Приведем некоторые следствия, вытекающие из определения обобщенного решения. Пусть $H_2 = D(L^*)$. Тогда если $u \in L_2(0,T;F_1)$, то выражение Lu имеет смысл и является элементом $L_2(0,T;H_2')$.

Если $v \in C_0^\infty(0,T;H_2)$, то равенство (16) перепишется в виде

$$\int_0^T (-Bu, v_t)\,dt = \int_0^T (Lu, v)\,dt + \int_0^T (f, v)\,dt \quad \forall v \in C_0^\infty(0,T;H_2). \tag{18}$$

Имеем $Lu+f \in L_2(0,T;H_2')$. Отсюда и из определения обобщенной производной вытекает, что функция $Bu \in L_2(0,T;F_1')$ (по лемме 1) обладает обобщенной производной $(Bu)_t \in L_2(0,T;H_2')$.

Поскольку $F_1' \subset H_2'$, имеем $Bu \in C([0,T];H_2')$ после, может быть, изменения на множестве меры нуль. Из (18) вытекает, что справедливо равенство $Bu_t - Lu = f$ в пространстве $L_2(0,T;H_2')$.

Рассмотрим функции $v \in C^\infty([0,T];H_2)$ в (16). Интегрируя по частям и используя равенство $Bu_t - Lu = f$, получим

$$(B(u(T) - u_T - \tilde{u}_T), v(T)) - (B(u(0) - u_0 - \tilde{u}_T), v(0)) = 0.$$

Так как функции $v(T), v(0)$ могут быть произвольными, отсюда заключаем, что

$$Bu(T) = B(u_T + \tilde{u}_T), \quad Bu(0) = B(u_0 + \tilde{u}_0).$$

Равенство имеет место в H_2', поскольку показали, что $Bu \in C([0,T];H_2')$.

Отсюда вытекает, что следы $Bu(0), Bu(T)$ существуют, принадлежат пространству $(D(|B|^{1/2}))'$ и $BP^-u(T) = Bu_T$, $BP^+u(0) = Bu_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (I), (II). *Тогда для любых* $f \in L_2(0,T;F_1')$, $u_0, u_T \in H$ *существует обобщенное решение* $u \in L_2(0,T;F_1)$ *краевой задачи* (1), (2) *в смысле определения* 1.

Введем дополнительные условия:

(III) $\mathrm{Re}(-Lu,u) \ge \delta_0 \|u\|_{F_1}^2 \quad \forall u \in D(L)$;

(IV) существуют постоянные $c > 0$ и $\theta \in (0,1)$ такие, что

$$|(Bu,u)| \le c\|u\|_{F_1}^{2\theta} \|L^{-1}Bu\|_{F_1}^{2(1-\theta)} \quad \forall u \in F_1;$$

(V) $B|_{F_1} \in L(F_1, E)$.

Отметим, что $\|L^{-1}Bu\|_{F_1} \le c\|Bu\|_{F_1'} \le c_1\|u\|_{F_1}$ (см. лемму 1).

Если выполнены условие Като-секториальности для оператора L и условия теоремы 1, то можно показать, что условия (III) и (IV) лишние, они всегда выполнены.

Пусть $g(x)$ — положительная почти везде в области G функция. Определим пространство $L_{2,g}(G;H)$ (H — банахово пространство) как пространство сильно измеримых функций, определенных в G со значениями в H и таких, что

$$\|u\|_{L_{2,g}(G;H)} = \left(\int_G g(x)\|u(x)\|_H^2\,dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\varphi(t) = t^{2\alpha}(T-t)^{2\alpha}$, где $\alpha = \frac{1}{2(1-\theta)}$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (I)–(IV) *и* $f_t \in L_2(0,T;F_1')$, *то обобщенное решение, полученное в теореме* 1, *обладает свойством: существует обобщенная производная* $u_t \in L_{2,\varphi}(0,T;F_1)$. *Если дополнительно выполнено условие* (V) *и* $f \in L_{2,\varphi}(0,T;E)$, *то* $u \in L_{2,\varphi}(0,T;D(L))$.

2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть $\vec{u} = (u, \tilde{u}_0, \tilde{u}_T) \in F_1 \times H \times H$ и $\vec{f} = (f, u_0, u_T) \in L_2(0,T;F_1') \times H \times H$. Обозначим $Mv = -Bv_t - L^*v$. Далее, определим $S : H_1 \to F_1' \times H \times H$ такой, что $Sv = (Mv, P^-v(0), P^+v(T))$, и $S_0 : H_1 \to L_2(0,T;F_1) \times H \times H$ такой, что $S_0 v = (v, P^+v(0), P^-v(T))$.

Рассмотрим вопрос о нахождении функций $u(x) \in L_2(0,T;F_1)$, $\tilde{u}_0, \tilde{u}_T \in H :$ $P^-\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0, P^+\tilde{u}_T = \tilde{u}_T$, таких, что $[\vec{u}, Sv] = [\vec{f}, S_0 v]$ для любого $v \in H_1$, где

$$[\vec{u}, Sv] = \int_0^T (u, Mv)\,dt + (\tilde{u}_0, P^-v(0))_H + (\tilde{u}_T, P^+v(T))_H, \tag{19}$$

$$[\vec{f}, S_0 v] = \int_0^T (f, v)\,dt + (u_T, P^-v(T))_H + (u_0, P^+v(0))_H. \tag{20}$$

Здесь $(u,v)_H = (|B|u, v)$.

Возьмем $\vec{u} = (v, v(0), v(T))$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[\vec{u}, Sv] &= \mathrm{Re}\left(\int_0^T (u, Mv)\,dt + (Bu(T), P^+v(T)) - (Bu(0), P^-v(0))\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(-\int_0^T (Bu, v_t)\,dt - \int_0^T (u, L^*v)\,dt + (Bu(T), P^+v(T)) - (Bu(0), P^-v(0))\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Подставив $\vec{u} = (v, v(0), v(T))$, имеем

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}[\vec{u}, Sv] \\ &= \mathrm{Re}\left(-\int_0^T (Bv, v_t)\,dt - \int_0^T (v, L^*v)\,dt + (Bv(T), P^+v(T)) - (Bv(0), P^-v(0))\right) \\ &= \int_0^T -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\,\frac{(Bv,v)}{2}\,dt - \int_0^T \mathrm{Re}(v, L^*v)\,dt + (Bv(T), P^+v(T)) - (Bv(0), P^-v(0)) \\ &\qquad = -\frac{1}{2}(Bv(T), v(T)) + \frac{1}{2}(Bv(0), v(0)) + (Bv(T), P^+v(T)) \\ &\qquad - (Bv(0), P^-v(0)) + \int_0^T -\mathrm{Re}(v, L^*v)\,dt = -\frac{(BP^+v(T), P^+v(T))}{2} \\ &\qquad - \frac{(BP^-v(T), P^-v(T))}{2} + \frac{(BP^+v(0), P^+v(0))}{2} + \frac{(BP^-v(0), P^-v(0))}{2} \\ &\qquad + (BP^+v(T), P^+v(T)) - (BP^-v(0), P^-v(0)) + \int_0^T -\mathrm{Re}(v, L^*v)\,dt \\ &= \frac{1}{2}(|B|^{1/2}v(T), |B|^{1/2}v(T)) + \frac{1}{2}(|B|^{1/2}v(0), |B|^{1/2}v(0)) + \int_0^T -\mathrm{Re}(v, L^*v)\,dt. \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда получим

$$\operatorname{Re}[\vec{u}, Sv] = \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(T)\|^2 + \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(0)\|^2 + \int_0^T -\operatorname{Re}(v, L^*v)\,dt$$
$$\geq \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(T)\|^2 + \frac{1}{2}\||B|^{1/2}v(0)\|^2 + \delta\|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)}$$
$$= \frac{1}{2}\|v(T)\|^2_H + \frac{1}{2}\|v(0)\|^2_H + \delta\|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)}. \quad (23)$$

Имеем

$$\operatorname{Re}[\vec{u}, Sv] \leq \big(\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)}\big)^{1/2}$$
$$\times \big(\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|Mv\|^2_{L_2(0,T;F_1')}\big)^{1/2}. \quad (24)$$

Используя это неравенство в левой части (23) и производя сокращение, получим неравенство

$$\delta_0\big(\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|v\|^2_{L_2(0,T;F_1)}\big)^{1/2}$$
$$\leq 2\big(\|v(T)\|^2_H + \|v(0)\|^2_H + \|Mv\|^2_{L_2(0,T;F_1')}\big)^{1/2}, \quad (25)$$

или

$$\|S_0v\|_{L_2(0,T;F_1)\times H\times H} \leq c\|Sv\|_{L_2(0,T;F_1')\times H\times H}. \quad (26)$$

Итак, в силу теоремы A (принцип существования) [6] существует обобщенное решение задачи (1), (2) в смысле определения 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Имеем $Bu_t - Lu = f$. Возьмем

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} t^{2\alpha}(T_2 - t)^{2\alpha}, & t \in [0; T_2), \\ 0, & t \in [T_2; T], \end{cases} \quad (27)$$

$$\psi_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; T_1], \\ (t - T_1)^{2\alpha}(T - t)^{2\alpha}, & t \in (T_1; T], \end{cases} \quad (28)$$

где $T_1 < T_2$.

Пусть $w_1(\eta), w_2(\eta)$ — усредняющие ядра со свойствами: $w_i \geq 0$, $w_i \in C_0^\infty(\mathbb{R})\ \forall i$, $\operatorname{supp}(w_1) \subset (1/2, 1)$, $\operatorname{supp}(w_2) \subset (-1, -1/2)$, $\int_{\mathbb{R}} w_i(\eta)\,d\eta = 1\ \forall i$.

Положим

$$u^1_\rho = P^1_\rho u = \frac{1}{\rho}\int_0^T w_1\left(\frac{\eta - t}{\rho}\right)u(\eta)\,d\eta = \int_0^1 w_1(\xi)u(t + \rho\xi)\,d\xi, \quad t \in [0, T_2], \quad (29)$$

$$u^2_\rho = P^2_\rho u = \frac{1}{\rho}\int_0^T w_2\left(\frac{\eta - t}{\rho}\right)u(\eta)\,d\eta = \int_{-1}^0 w_2(\xi)u(t + \rho\xi)\,d\xi, \quad t \in [T_1, T], \quad (30)$$

и $\rho < \min((T - T_2), T_1)$,

$$Bu^1_{\rho t} = \int_0^1 w_1(\xi)Bu_t(t + \rho\xi)\,d\xi$$
$$= \int_0^1 w_1(\xi)Lu(t + \rho\xi)\,d\xi + \int_0^1 w_1(\xi)f(t + \rho\xi)\,d\xi = Lu^1_\rho + P^1_\rho f, \quad t < T_2. \quad (31)$$

Имеем

$$Bu^1_{\rho t} = Lu^1_\rho + P^1_\rho f. \tag{32}$$

В силу свойств усреднений $u^1_{\rho t}, u^1_{\rho tt} \in L_2(0, T_2; F_1)$. Из леммы 1 получаем $Bu^1_{\rho t}$, $Bu^1_{\rho tt} \in L_2(0, T_2; F'_1)$. Тогда ввиду (32)

$$u^1_\rho = L^{-1}v, \quad v = Bu^1_{\rho t} - P^1_\rho f \in L_2(0, T; F'_1). \tag{33}$$

Таким образом, $u^1_\rho \in L_2(0, T; F_2)$.

Имеем

$$\operatorname{Re}(-Lu, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{F_1} \quad \forall u \in D(L). \tag{34}$$

Предельным переходом в силу плотности $D(L)$ в F_2 получим, что неравенство

$$\operatorname{Re}(-Lu, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{F_1} \tag{35}$$

справедливо для любого $u \in F_2$.

Так как $\sqrt{\varphi} f_t,\ f \in L_2(0, T_2; F'_1)$, используя стандартные свойства усреднений, можно показать, что

$$P^1_\rho f_t \sqrt{\varphi},\ P^1_\rho f_t \in L_2(0, T_2; F'_1) \tag{36}$$

и, более того,

$$\left\|P^1_\rho f_t - f_t\right\|_{L_{2,\varphi}(0,T_2;F'_1)} + \left\|P^1_\rho f - f\right\|_{L_2(0,T_2;F'_1)} \to 0 \tag{37}$$

при $\rho \to 0$. Также имеем, что $BP^1_\rho u_t - P^1_\rho f \in L_2(0, T_2; F'_1)$ и, кроме того, существует обобщенная производная по t и

$$B\big(P^1_\rho u_t\big)_t - P^1_\rho f_t \in L_2(0, T_2; F'_1). \tag{38}$$

Из уравнения (32) вытекает, что существует обобщенная производная $\partial_t L P^1_\rho u_t = L\big(P^1_\rho u_t\big)_t$, причем

$$Bu^1_{\rho tt} - Lu^1_{\rho t} = f^1_{\rho t}. \tag{39}$$

Из этого равенства, как и выше, заключаем, что $u^1_{\rho t} \in L_2(0, T_2; F_2)$.

Умножая (39) на $\varphi_0(t)$, получим

$$\partial_t\big((Bu^1_{\rho t}, u^1_{\rho t})\varphi_0\big) - \varphi_{0t}\big(Bu^1_{\rho t}, u^1_{\rho t}\big) - \big(Lu^1_{\rho t}, u^1_{\rho t}\big)\varphi_0 = \big(P^1_\rho f \varphi_0, u^1_{\rho t}\big). \tag{40}$$

Проинтегрируем по частям:

$$\int_0^T \big(-Lu^1_{\rho t}, u^1_{\rho t}\big)\varphi_0\, dt = \int_0^T \varphi_{0t}\big(Bu^1_{\rho t}, u^1_{\rho t}\big)\, dt + \int_0^T \big(P^1_\rho f \varphi_0, u^1_{\rho t}\big). \tag{41}$$

Оценим правую часть. Для этого применим условие (IV):

$$\int_0^{T_2} |\varphi_{0t}|\big|\big(Bu^1_{\rho t}, \varphi_{\rho t}\big)\big|\, dt \leq \int_0^{T_2} |\varphi_{0t}| \big\|u^1_{\rho t}\big\|^{2\theta}_{F_1} \big\|L^{-1}Bu^1_{\rho t}\big\|^{2(1-\theta)}_{F_1}\, dt$$

$$\leq \left(\int_0^{T_2} |\varphi_{0t}|^{1/\theta} \big\|u^1_{\rho t}\big\|^2_{F_1}\, dt\right)^\theta \left(\int_0^{T_2} \big\|L^{-1}Bu^1_{\rho t}\big\|^2_{F_1}\, dt\right)^{1-\theta}. \tag{42}$$

Из (32) получим

$$\begin{aligned}\|L^{-1}Bu^1_{\rho t}\|^2_{L_2(0,T_2;F_1)} &\le 2\big(\|L^{-1}P^1_\rho f\|^2_{L_2(0,T_2;F_1)} + \|P^1_\rho u\|^2_{L_2(0,T_2;F_1)}\big)\\ &\le c\big(\|P^1_\rho f\|^2_{L_2(0,T_2;F_1)} + \|P^1_\rho u\|^2_{L_2(0,T_2;F_1)}\big)\\ &\le c_1\big(\|f\|^2_{L_2(0,T;F_1')} + \|u\|^2_{L_2(0,T;F_1)}\big). \quad (43)\end{aligned}$$

В силу условий на α имеем $|\varphi_{0t}|^{1/\theta} \le c|\varphi_0|$. Тогда из (42) выводим неравенство

$$\left|\int\limits_0^{T_2} |\varphi_{0t}|\big(Bu^1_{\rho t}, u^1_{\rho t}\big)\,dt\right| \le c\left(\int\limits_0^{T_2} \varphi_0\|u^1_{\rho t}\|^2_{F_1}\,dt\right)^\theta, \quad (44)$$

где c не зависит от ρ.

Используя неравенство Коши с малым параметром ε, получим

$$\left|\int\limits_0^{T_2} \varphi_{0t}\big(Bu^1_{\rho t}, u^1_{\rho t}\big)\,dt\right|^\theta \le \varepsilon\|u^1_{\rho t}\|^2_{L_{2,\varphi}(0,T_2;F_1)} + c(\varepsilon). \quad (45)$$

Аналогично

$$\left|\int\limits_0^{T_2} \big(f^1_{0t}, \varphi_0 u^1_{\rho t}\big)\,dt\right| \le \varepsilon\|u^1_{\rho t}\|^2_{L_{2,\varphi}(0,T_2;F_1)} + c(\varepsilon)\|f^1_{\rho t}\|_{L_{2,\varphi}(0,T_2;F_1)}. \quad (46)$$

Тогда из (41) и (45), (46) следует, что

$$\begin{aligned}\delta_0\|u^1_{\rho t}\|^2_{L_{2,\varphi_0}(0,T_2;F_1)} &\le \varepsilon\|u^1_{\rho t}\|^2_{L_{2,\varphi}(0,T_2;F_1)} + c(\varepsilon)\\ &\quad + \varepsilon\|u^1_{\rho t}\|^2_{L_{2,\varphi}(0,T_2;F_1)} + c(\varepsilon)\|f^1_{\rho t}\|_{L_{2,\varphi}(0,T_2;F_1)}. \quad (47)\end{aligned}$$

Выбрав ε так, что $2\varepsilon < \frac{\delta_0}{2}$, получим оценку

$$\|u^1_{\rho t}\|_{L_2(0,T_2;F_1)} \le c, \quad (48)$$

где постоянная c не зависит от ρ.

Отсюда вытекает существование подпоследовательности $P^1_{\rho_k}u_t$ такой, что

$$\big(P^1_{\rho_k}u\big)_t \to v \in L_{2,\varphi_0}(0,T_2;F_1). \quad (49)$$

Покажем, что существует обобщенная производная $u_t \in L_2(0,T_2;F_1)$ и $v = u_t$. Действительно, возьмем $\psi(t) \in C_0^\infty(0,T_2)$, $g \in F_1'$. Имеем

$$\int\limits_0^{T_2} ((P_{\rho_k}u)_t, g)\psi(t)\,dt \to \int\limits_0^{T_2} (v,g)\varphi\,dt. \quad (50)$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^{T_2} ((P_{\rho_k}u)_t, g)\psi(t)\,dt = -\int\limits_0^{T_2} \big(P^1_{\rho_k}u, g\big)\psi_t\,dt \to \int\limits_0^{T_2} (u,g)\psi_t\,dt. \quad (51)$$

Значит, существует $u_t = v$, что и требовалось.

Рассмотрим

$$Bu^2_{\rho t} = \int\limits_{-1}^{0} w_2(\xi) Bu_t(t+\rho\xi)\,d\xi = \int\limits_{-1}^{0} w_2(\xi) Lu(t+\rho\xi)\,d\xi$$
$$+ \int\limits_{-1}^{0} w_2(\xi) f(t+\rho\xi)\,d\xi = Lu^2_\rho + P^2_\rho f, \quad T_1 < t < T. \quad (52)$$

Имеем

$$Bu^2_{\rho t} = Lu^2_\rho + P^2_\rho f. \quad (53)$$

Повторяя рассуждения на промежутке $[T_1, T]$, покажем, что существует обобщенная производная $u_t \in L_{2,\varphi_1}(T_1, T; F_1)$. Отсюда вытекает существование обобщенной производной u_t такой, что $u_t \in L_{2,\varphi}(0, T; F_1')$.

В самом деле, возьмем $\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\psi}(t) \in C^\infty[0, T]$ такие, что $\widetilde{\varphi}(t) + \widetilde{\psi}(t) = 1$ для любого $t \in [0, T]$, $\widetilde{\varphi}(t) = 1$ при $t \in (0, T/2)$, $\widetilde{\psi}(t) = 1$ при $t \in (T/2, T)$, причем $\mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}(t))$, $\mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}'(t)) \subset [0, T_2)$ и $\mathrm{supp}(\widetilde{\psi}(t))$, $\mathrm{supp}(\widetilde{\psi}'(t)) \subset (T_1, T]$.

Для $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$ имеем

$$\int\limits_0^T u\varphi_t\,dt = \int\limits_0^T u((\varphi\widetilde{\varphi})_t + (\varphi_t\widetilde{\psi})_t)\,dt - \int\limits_0^T u_t\varphi\widetilde{\varphi}\,dt - \int\limits_0^T u_t\widetilde{\psi}\varphi\,dt$$
$$= -\int\limits_0^T (u_t\widetilde{\varphi} + u_t\widetilde{\psi})\varphi\,dt. \quad (54)$$

Обозначая через u_t^1 обобщенную производную на $[0, T_2]$, через u_t^2 — обобщенную производную на $[T_1, T]$, получим

$$u_t = u_t^1\widetilde{\varphi} + u_t^2\widetilde{\psi} \in L_2(0, T; F_1). \quad (55)$$

Пусть выполнены условие (V) и оставшиеся дополнительные предположения. Тогда из уравнения (1) имеем

$$Bu_t - Lu = f \in L_{2,\varphi}(0, T; E). \quad (56)$$

Поскольку $u \in L_{2,\varphi}(0, T; F_1)$, то $Bu_t \in L_{2,\varphi}(0, T; E)$, и тогда из (56) вытекает, что $Lu \in L_{2,\varphi}(0, T; E)$, т. е. $u \in L_{2,\varphi}(0, T; D(L))$. Теорема 2 доказана.

3. Приложение

Рассмотрим краевую задачу

$$g(x)u_t - Lu = f, \quad (57)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in G^+, \quad u|_{t=T} = u_T(x),\ x \in G^-, \quad (58)$$

$$u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (59)$$

$$u^{(m)}(0) = 0, \quad (60)$$

где L — дифференциальный оператор вида

$$Lu = (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{2m+1} a_i(x) u^{(i)}, \quad a_{2m+1} = 1, \quad (61)$$

$$L^*v = (-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{2m+1} (a_i(x)v)^{(i)} \tag{62}$$

и $g(x) \in L_1(0,1)$ — вещественная измеримая на $(0,1)$ функция такая, что существуют открытые множества $G^+, G^- \subset (0,1)$ со свойством $\mu(\overline{G}^+ \backslash G^+) = 0$, $\mu(\overline{G}^- \backslash G^-) = 0$ и $g(x) > 0$ почти всюду на G^+, $g(x) < 0$ почти всюду на G^- и $g(x) = 0$ на $G \backslash (\overline{G}^+ \cup \overline{G}^-)$.

Положим

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}\, dx. \tag{63}$$

Будем предполагать, что

$$a_i \in W_\infty^i(0,1), \quad i = 0, 1, \ldots, 2m. \tag{64}$$

Считаем, что $D(L) = \{u \in W_2^{2m+1}(0,1) : u \text{ удовлетворяет (59), (60)}\}$, $D(L^*) = \{u \in W_2^{2m+1}(0,1) : \text{выполняется (59) и } u^{(m)}(1) = 0\}$ и найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\operatorname{Re}(-Lu, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{W_2^m(0,1)}, \quad \operatorname{Re}(-L^*u, u) \geq \delta_0 \|u\|^2_{W_2^m(0,1)} \tag{65}$$

для всех $u \in D(L)$ и $u \in D(L^*)$ соответственно.

Таким образом, $F_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^m(0,1)$.

В частности, условие (65) выполнено для оператора вида $L - \lambda I$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ начиная с некоторого λ_0, т. е. для $\lambda \geq \lambda_0$. Это утверждение легко проверяется при помощи интегрирования по частям с использованием условий на коэффициенты.

В силу (65) оператор L с указанной выше областью определения максимально диссипативен и полуплоскость $\{\operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ принадлежит $\rho(L)$ (см. [7]).

Обозначим через $\widetilde{W}_2^s(0,1)$ ($s \in (0, 2m{+}1)$) замыкание $D(L)$ в норме $W_2^s(0,1)$ и через $\widehat{W}_2^s(0,1)$ — замыкание $D(L^*)$ в норме $W_2^s(0,1)$. Нормы в этих пространствах совпадают с нормами в $W_2^s(0,1)$. При $s = 2m+1$ имеем $D(L) = \widetilde{W}_2^{2m+1}(0,1)$, $D(L^*) = \widehat{W}_2^{2m+1}(0,1)$. Оператор L осуществляет изоморфизм пространств $\widetilde{W}_2^{2m+1}(0,1) = D(L)$ на $L_2(0,1)$ и допускает расширение до изоморфизма $L_2(0,1)$ на $(D(L^*))'$, $D(L^*) = \widehat{W}_2^{2m+1}(0,1)$.

Через $(A_0, A_1)_{\theta,2}$ обозначаем пространства, построенные с помощью метода вещественной интерполяции (см. [8]). Тогда по теореме о двойственности L — изоморфизм $\big(\widetilde{W}_2^{2m+1}(0,1), L_2(0,1)\big)_{\theta,2}$ на

$$\big(L_2(0,1), \big(\widehat{W}_2^{2m+1}(0,1)\big)'\big)_{\theta,2} = \big(\big(L_2(0,1), \widehat{W}_2^{2m+1}(0,1)\big)_{\theta,2}\big)'.$$

В соответствии с теоремой 4.3.3 из [8]

$$\big(\widetilde{W}_2^{2m+1}(0,1), L_2(0,1)\big)_{\theta,2} = \widetilde{W}_2^{(1-\theta)(2m+1)}(0,1) \tag{66}$$

при $(1-\theta)(2m+1) \neq k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Аналогично

$$\big(L_2(0,1), \widehat{W}_2^{2m+1}(0,1)\big)_{\theta,2} = \widehat{W}_2^{\theta(2m+1)}(0,1) \tag{67}$$

при $\theta(2m+1) \neq k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

При $(1-\theta)(2m+1)=m+1$ имеем

$$\big(\big(L_2(0,1),\widehat{W}_2^{2m+1}(0,1)\big)_{\theta,2}\big)'=\big(\overset{\circ}{W}{}_2^{\,m}(0,1)\big)'=F_1', \tag{68}$$

$$\big(\big(\widetilde{W}_2^{2m+1}(0,1),L_2(0,1)\big)_{\theta,2}\big)'=\widetilde{W}_2^{m+1}(0,1). \tag{69}$$

Таким образом, L — изоморфное отображение $\widetilde{W}_2^{m+1}(0,1)$ на F_1', и, значит, $F_2=\widetilde{W}_2^{m+1}(0,1)$. Аналогично показывается, что L^* изоморфно отображает $\widetilde{W}_2^{m+1}(0,1)$ на F_1'.

Проверим выполнение условия (IV), т. е. неравенство вида

$$|(gu,u)|\le c\|u\|_{F_1}^{2\theta}\|L^{-1}gu\|_{F_1}^{2(1-\theta)}\quad \forall u\in F_1. \tag{70}$$

Пусть вначале $g\in L_1(0,1)$. Очевидно, что

$$|(gu,u)|\le\|u\|_{F_1}\|gu\|_{F_1'}. \tag{71}$$

Как следствие из теоремы о реитерации [8] имеем

$$\begin{gathered}\overset{\circ}{W}{}_2^{\,m}(0,1)=\big(\widetilde{W}_2^{2m+1}(0,1),\widetilde{W}_2^{s}(0,1)\big)_{\theta,2}=\big(\widetilde{W}_2^{m+1}(0,1),\widetilde{W}_2^{s}(0,1)\big)_{\theta_1,2},\\ (1-\theta)(2m+1)+\theta s=m,\ s>\frac12,\quad (1-\theta_1)(m+1)+\theta_1 s=m,\ s>\frac12.\end{gathered} \tag{72}$$

Тогда по теореме о двойственности получим

$$\begin{aligned}F_1'=W_2^{-m}(0,1)&=\big(\big(\widehat{W}_2^{m+1}(0,1),\widehat{W}_2^{s}(0,1)\big)_{\theta_1,2}\big)'\\ &=\big(\big(\widehat{W}_2^{m+1}(0,1)\big)',\big(\widehat{W}_2^{s}(0,1)\big)'\big)_{\theta_1,2}.\end{aligned} \tag{73}$$

Следовательно,

$$\|gu\|_{F_1'}\le c\|gu\|^{1-\theta_1}_{(\widehat{W}_2^{m+1}(0,1))'}\|gu\|^{\theta_1}_{(\widehat{W}_2^{s}(0,1))'}. \tag{74}$$

Оценим последний множитель:

$$\|g\|^{\theta_1}_{L_1(0,1)}\|u\|^{\theta_1}_{C(0,1)}\le c_1\|u\|^{\theta_1}_{F_1}. \tag{75}$$

По доказанному имеем равенство

$$\|gu\|_{(\widehat{W}_2^{m+1}(0,1))'}=\|L^{-1}gu\|_{F_1}. \tag{76}$$

Таким образом, из (71)–(76) получим

$$|(gu,u)|\le c\|u\|^{1+\theta_1}_{F_1}\|L^{-1}gu\|^{1-\theta_1}_{F_1}. \tag{77}$$

Значит, можно взять в качестве величины 2θ в (70) величину $\theta=(1+\theta_1)/2$. Если $g\in L_2(0,1)$, то оценка (77) может быть уточнена. Повторяя вышеприведенные рассуждения с $s\ge0, s\ne1/2$, придем к неравенству (77). Единственное изменение в доказательстве: оценка (75) имеет немного другой вид. При $s=0$ получим $(1-\theta_1)=\frac{m}{m+1},\theta_1=\frac{1}{m+1}$. Таким образом, можно взять

$$\theta=\frac{m+2-s}{2(m+1-s)}, \tag{78}$$

где $1/2<s<m+1$, если $g\in L_1(0,1))$, и $0\le s<m+1$, $s\ne1/2$, если $g\in L_2(0,1)$.

Итак, доказана

Теорема 3. *Пусть выполнены условие (65) и вышеприведенные условия на коэффициенты оператора L (64) и функцию $g \in L_1(0,1)$. Тогда если $f \in L_2\big(0,T;W_2^{-m}(0,1)\big)$, $u_0 \in L_{2,g}(G^+)$, $u_T \in L_{2,g}(G^-)$, то существует обобщенное решение задачи (57)–(60) из класса $u \in L_2\big(0,T;W_2^m(0,1)\big)$, $g(x)u_t \in L_2\big(0,T;\big(\widehat{W}_2^{m+1}(0,1)\big)'\big)$. Если, кроме того, предположим, что $f_t \in L_{2,\varphi}\big(0,T;W_2^{-m}(0,1)\big)$, где $\varphi(t) = t^{2\theta}(T-t)^{2\theta}$ и параметр θ определен равенством (78), то решение обладает свойством: $u \in L_{2,\varphi}\big(0,T;W_2^{m+1}(0,1)\big)$, $u_t \in L_{2,\varphi}\big(0,T;W_2^m(0,1)\big)$. Если дополнительно $g \in L_2(0,1)$, $f \in L_{2,\varphi}(0,T;L_2(0,1))$, то решение также обладает свойством $u \in L_{2,\varphi}\big(0,T;W_2^{2m+1}(0,1)\big)$. В последнем случае уравнение (57) выполняется почти всюду в $Q=(0,1)\times(0,T)$ и все обобщенные производные, входящие в уравнение, существуют.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теорем 1, 2 и рассуждений, приведенных перед теоремой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van der Mee C. V. M.* Semigroup and factorization methods in transport theory. Amsterdam: Math. Centrum, 1981. (Math. Centre Trac.; V. 146).
2. *Karabash I. M.* Abstract kinetic equations with positive collision operators//arXiv:0708.2510v2 [math.SP]. Univ. of Calgary, Canada. 2 Oct. 2007. P. 1–20.
3. *Haase M.* The functional calculus for sectorial operators. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verl., 2006. (Operator Theory: Adv. Appl.; V. 169).
4. *Пятков С. Г., Абашеева Н. Л.* Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1419–1435.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
6. *Fichera G.* Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Baltimore, MD: Springer-Verl., 1965. (Lect. Notes Math.; V. 8).
7. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
8. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

Статья поступила 9 июня 2011 г., окончательный вариант — 22 ноября 2012 г.

Антипин Василий Иванович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики, кафедра математического анализа,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891, Республика Саха (Якутия)
antvasiv@mail.ru