Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ДИРИХЛЕ — НЕЙМАНА

В. И. Налимов

Аннотация. На границе искривленного полупространства, ограниченного снизу поверхностью, близкой к гиперплоскости, рассматривается оператор Дирихле — Неймана. Установлены его дифференциальные свойства в зависимости от гладкости границы и найдено представление оператора Дирихле — Неймана.

Ключевые слова: оператор Дирихле — Неймана, дифференциал.

§ 1. Операторы «нормальная производная» и Дирихле — Неймана в задаче о волнах на воде

Оператор «нормальная производная» ставит в соответствие гармонической внутри области функции значение ее производной по внешней нормали на границе. Впервые на его важность обратил внимание Л. В. Овсянников [1] в связи с проблемой корректности постановки начально-краевой задачи о поверхностных волнах. Движение несжимаемой безвихревой идеальной жидкости в эйлеровых координатах описывается с помощью потенциала Φ, который является гармонической функцией внутри области течения:

$$\sum_{i=1}^{d+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0, \tag{1.1}$$

зависящей от времени t. Обычно считается, что жидкость занимает некоторую область из $\mathbb{R}^{d+1}$, где $d = 1$ или $d = 2$. Предполагается, что сила тяжести имеет вид $F = -gx_{d+1}$ (g — ускорение свободного падения).

На твердых стенах должно выполняться условие непротекания, т. е.

$$\sum_{i=1}^{d+1} n_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \tag{1.2}$$

где n_i — координаты вектора внешней нормали к границе.

На свободной поверхности, заданной уравнением $x_{d+1} = h(x_1, x_2, \dots, x_d, t)$, должны выполняться условие непротекания и условие постоянства давления:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{d+1}} - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -gh - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d+1} \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right|^2. \tag{1.3}$$

Систему (1.1)–(1.3) можно формально свести к уравнениям на свободной границе, если определить оператор «нормальная производная»:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_d) \to \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x_1, x_2, \dots, x_d,\ h) = N(h)\varphi,$$

сопоставляющий заданной на границе функции φ значение производной по внешней нормали на границе ее гармоничного продолжения внутри области. Этот оператор линеен по φ, по h он нелинеен и нелокален.

В новых обозначениях краевые условия (1.3) принимают вид

$$h_t = JN\varphi, \quad \varphi_t = -gh - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^2 + \frac{1}{2J^2}\left(JN\varphi + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial h}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2, \tag{1.4}$$

где $J^2 = 1 + \sum\limits_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^2$. К этим уравнениям нужно добавить начальные данные

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0; \quad h|_{t=0} = h_0. \tag{1.5}$$

В результате процедуры сведения на свободную границу получается эволюционная задача Коши для функций φ и h.

Оператор $G(h) = JN(h)$ называется *оператором Дирихле — Неймана.* С помощью него гамильтонову систему В. Е. Захарова [2], описывающую динамику поверхности волн, можно переформулировать так:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial\varphi}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial h} \tag{1.6}$$

с гамильтонианом $H(h,\ \varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(\varphi G\varphi + gh^2)\,dx$, который имеет вид функционала полной энергии.

Исследование корректности начально-краевой задачи о волнах на воде имеет уже достаточно большую историю, и ссылки на основные работы по данной тематике можно найти в обзорной статье [3].

Цель данной работы состоит в том, чтобы установить свойства оператора Дирихле — Неймана, требуемые для доказательства разрешимости в малом по времени задачи (1.4), (1.5) при $d > 1$.

§ 2. Обозначения и предварительные сведения

Пусть $k \geq 0$ — целое число и Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^d$. Через $C^k(\Omega)$ будем обозначать пространство k раз непрерывно дифференцируемых в Ω функций. Через $\mathscr{S}$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^d$ функций, убывающих быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Преобразование Фурье функций из $\mathscr{S}$ и обратное к нему даются формулами

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx, \quad u(x) = (2\pi)^{-d}\int e^{ix\cdot\xi}u(\xi)\,d\xi.$$

Здесь и ниже знак интеграла без указания пределов интегрирования означает, что интеграл берется по всему пространству.

Пространство H^s состоит из обобщенных функций u, для которых $\lambda^s\hat{u} \in L^2$, где

$$\lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

Как известно, H^s — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_s = (2\pi)^{-d}\int \lambda^{2s}(\xi)\hat{u}(\xi)\overline{v(s)}\,d\xi$$

и нормой $\|u\|_s = (u,u)_s^{1/2}$. Здесь черта означает операцию комплексного сопряжения. Поскольку пространство H^0 совпадает с L^2, то 0 в символах для скалярного произведения и нормы в L^2 далее будет опускаться.

Для вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ и матрицы a размера $m \times n$ с элементами a_{ij} будем использовать обозначения

$$\|u\|_s^2 = \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_s^2, \quad \|a\|_s^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|_s^2$$

и будем говорить в этом случае, что u и a *принадлежат* H^s.

Псевдодифференциальный оператор $P(D)$ с символом $P(\xi)$ определится через преобразование Фурье формулой $\widehat{P(D)u}(\xi) = P(\xi)\hat{u}(\xi)$. Классическими примерами псевдодифференциальных операторов являются операторы Λ^s, $|\nabla|^s$ и $\exp\{-t|\nabla|\}$ $(t \geq 0)$ с символами $\lambda^s(\xi)$, $|\xi|^s$ и $\exp\{-t|\xi|\}$.

Ниже будем использовать очевидные утверждения $(u,v)_s = (\Lambda^s u, \Lambda^s v)$, $\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|$, $\|\nabla u\|_s = \||\nabla|u\|_s$, $\||\nabla|\Lambda^{-1}u\|_s \leq \|u\|_s$, $\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla|^{-1}u\right\|_s \leq \|u\|_s$, $\|u\|_{s-1} \leq \||\nabla|^{-1}u\|_s$ без ссылок на них. При $0 < s < 1$ норма функции u в пространстве H^s эквивалентна [4] величине

$$\left(\|u\|^2 + \iint |u(x) - u(y)|^2 |x-y|^{-d-2s}\, dxdy\right)^{1/2}.$$

Если в этом выражении заменить функцию u на $\Lambda^m u$ и определить оператор сдвига равенством $T_y u(x) = u(x+y)$, то после замены переменных получим неравенства

$$c_1\|u\|_{m+s}^2 \leq \|u\|_m^2 + \int \|(T_y - I)u\|_m^2 |y|^{-d-2s}\, dy \leq c_2\|u\|_{m+s}^2, \tag{2.2}$$

где I — тождественный оператор и положительные постоянные зависят только от m и s.

Каждую точку из $\mathbb{R}^{d+1}$ будем записывать в виде (x, x_{d+1}), где $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Если $(x, x_{d+1}) \to \varphi(x, x_{d+1})$ — функция, определенная в некотором множестве из $\mathbb{R}^{d+1}$, то положим $\varphi(t) : x \to \varphi(x,t)$ и будем рассматривать φ как функцию от t со значениями в пространстве функций или обобщенных функций.

Для функций φ, определенных в полупространстве $R_+^{d+1} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{d+1} : t > 0\}$, условимся говорить $\varphi(\infty) = 0$, если $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ в смысле обобщенных функций.

Для любого числа ε положим

$$|\nabla|_\varepsilon = (\varepsilon^2 + |\nabla|^2)^{1/2}, \tag{2.3}$$

так что $|\nabla|_0 = |\nabla|$, $|\nabla|_1 = \Lambda$. Хорошо известно, что оператор $|\nabla|_\varepsilon$ можно определить с помощью решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (-\varepsilon^2 + \Delta)U = 0 \text{ в } R_+^{d+1}, \quad U(0) = u, \quad U(\infty) = 0. \tag{2.4}$$

Тогда $|\nabla|_\varepsilon u = -\frac{\partial U}{\partial t}(0)$.

Лемма 2.1. *Пусть U — решение краевой задачи* (2.4). *Справедливо равенство*

$$\big\||\nabla|_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\big\|^2 = \int\limits_0^\infty \left(\||\nabla|_\varepsilon U\|^2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2\right) dt. \tag{2.5}$$

Если U — произвольное продолжение u внутрь $\mathbb{R}_+^{d+1}$, то имеет место оценка

$$\big\||\nabla|_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\big\|^2 \le \int\limits_0^\infty \left(\||\nabla|_\varepsilon U\|^2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2\right) dt. \tag{2.6}$$

Доказательство. Поскольку $\big\||\nabla|_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\big\|^2 = (|\nabla|_\varepsilon u, u) = -\big(\frac{\partial U}{\partial t}(0), U(0)\big)$, равенство (2.5) получается после умножения уравнения (2.4) на U и интегрирования по частям. Утверждение (2.6) получим, если в формуле

$$\big\||\nabla|_\varepsilon^{\frac{1}{2}}u\big\|^2 = -2\int\limits_0^\infty \left(|\nabla|_\varepsilon U, \frac{\partial U}{\partial t}\right) dt$$

поочередно воспользуемся неравенствами Гёльдера и Коши. □

Будем обозначать через E^s пространство функций $t \to U(t)$, для которых определена полунорма $|U|_s$, заданная равенством

$$|U|_s^2 = \int\limits_0^\infty \left(\||\nabla|^{\frac{3}{2}}U\|_s^2\, dt + \left\||\nabla|^{\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_s^2 + \left\||\nabla|^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\|_s^2\right) dt. \tag{2.7}$$

Лемма 2.2. *Пусть $U \in E^s$. Тогда для п. в. t определены функции $|\nabla|U(t)$ и $\frac{\partial U}{\partial t}(t)$. Справедливы неравенства*

$$\||\nabla|U(t)\|_s \le |U|_s, \quad \left\|\frac{\partial U}{\partial t}(t)\right\|_s \le |U|_s. \tag{2.8}$$

Доказательство первой оценки в (2.8) основано на формулах

$$\||\nabla|U\|_s^2 = -2\int\limits_t^\infty \left(|\nabla|U, |\nabla|\frac{\partial U}{\partial t}\right)_s dt \le \int\limits_0^\infty \left(\||\nabla|^{\frac{3}{2}}U\|_s^2 + \left\||\nabla|^{\frac{1}{2}}\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_s^2\right) dt \le |U|_s^2.$$

Второе неравенство в (2.8) выводится точно так же. □

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \Delta U = f \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{d+1}, \quad U(0) = u, \quad U(\infty) = 0. \tag{2.9}$$

Лемма 2.3. *Пусть U — решение задачи* (2.9). *Тогда верны неравенства*

$$\int\limits_0^\infty \left(\||\nabla|U\|_s^2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_s^2\right) dt \le 2\||\nabla|^{\frac{1}{2}}u\|_s^2 + 2\int\limits_0^\infty \||\nabla|^{-1}f\|_s^2\, dt, \tag{2.10}$$

$$|U|_s^2 \le 4\||\nabla|u\|_s^2 + 4\int\limits_0^\infty \||\nabla|^{-\frac{1}{2}}f\|_s^2\, dt. \tag{2.11}$$

В самом деле, представим U в виде $U_1 + U_2$, где U_1 — решение задачи (2.9) при $f = 0$, а U_2 — решение (2.9) при $u = 0$. Оценку левой части (2.10) для функции U_1 имеем из равенства (2.5) при $\varepsilon = 0$ для функции $\Lambda^s U_1$. Соответствующую оценку левой части (2.10) для функции U_2 получим, если умножим уравнение (2.9) для функции U_2 на $\Lambda^{2s} U_2$, проинтегрируем по частям и воспользуемся неравенствами Гёльдера и Коши. Вместе такие оценки приводят к (2.10).

Для доказательства формулы (2.11) нужно подействовать на обе части уравнения (2.9) оператором $|\nabla|^{\frac{1}{2}}$. Тогда из неравенства (2.10) вытекает оценка первых двух слагаемых в определении (2.7) полунормы. Вторая производная по t от решения оценивается из уравнения. Проделав эти процедуры, в итоге получим (2.11).

Следствие 2.1. *Справедливо неравенство*

$$\||\nabla| U(t)\|_s^2 + \left\| \frac{\partial U}{\partial t}(t) \right\|_s^2 \leq 8\||\nabla| u\|_s^2 + 8 \int_0^\infty \||\nabla|^{-\frac{1}{2}} f(t)\|_s^2 \, dt. \tag{2.12}$$

Это утверждение вытекает из (2.11) и леммы 2.2.

§ 3. Постановка задачи и основные результаты

Пусть Γ — гиперповерхность в $\mathbb{R}^{d+1}$ класса C^∞, заданная равенством

$$\Gamma = \{(y, y_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1},\ y_{d+1} = h(y)\}, \tag{3.1}$$

и пусть $J = (1 + |\nabla h|^2)^{1/2}$. Функция J определяет меру на Γ: $d\Gamma = J\,dy$. Предположим, что в области $\Omega = \{(y, y_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : -\infty < y_1, y_2, \dots, y_d < \infty,$ $y_{d+1} > h(y)\}$ задана функция $(y, y_{d+1}) \to \Phi(y, y_{d+1})$, принимающая значение φ на Γ и гармоническая в Ω:

$$\sum_{i=1}^{d+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Phi = \varphi \text{ на } \Gamma. \tag{3.2}$$

Наша цель состоит в изучении дифференциальных свойств оператора Дирихле — Неймана

$$\varphi(y) = \Phi(y, h(y)) \to J(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(y, h(y)), \tag{3.3}$$

где оператор $\frac{\partial}{\partial n}$ ставит в соответствие заданной на Γ функции φ значение на Γ производной по единичной внешней нормали функции Φ, в зависимости от дифференциальных свойств границы Γ.

Будем действовать по следующей схеме. Пусть задано параметрическое представление $x \to \xi(x)$ класса C^∞ гиперповерхности Γ:

$$y_i = \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (i = 1, 2, \dots, d+1). \tag{3.4}$$

Предполагается, что на бесконечности отображение ξ совпадает с тождественным, так что параметрическое представление (3.4) можно записать в виде

$$y_i = x_i + \eta_i(x_1, x_2, \dots, x_d) \ (i = 1, 2, \dots, d), \quad y_{d+1} = \eta_{d+1}(x_1, x_2, \dots, x_d), \tag{3.5}$$

где $\eta_i \to 0$, если $|x| \to \infty$ $(i = 1, 2, \dots, d+1)$.

Если f — отображение открытого множества из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^k$, то символ f' будем использовать для обозначения производного отображения (производной Фреше) отображения f, а также для записи матрицы Якоби отображения f. Положим $J = \sqrt{\det(\xi'^* \xi')}$. Такое обозначение обусловлено тем, что после параметризации поверхностная мера на Γ примет вид $d\Gamma = J\,dx$.

Пусть обратимое отображение

$$(x, x_{d+1}) \to X(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) : y_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_{d+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, d+1)$$

переводит полупространство $\mathbb{R}^{d+1}_+ = \{(x, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_{d+1} > 0\}$ в Ω. Определим матрицу b равенством

$$b = (X'^* X')^{-1} \det X'. \tag{3.6}$$

Примем далее не совсем корректное, но удобное соглашение. Отождествим функции f и $f \circ X$, считая, что речь идет об одной и той же функции, выражающейся либо через переменные (y, y_{d+1}), либо через переменные (x, x_{d+1}). В новых переменных задача (3.1) запишется в виде

$$\sum_{i,j=1}^{d+1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right) = 0 \text{ в } R^{d+1}_+, \quad \Phi(x,\ 0) = \varphi(x), \quad \Phi(x, \infty) = 0. \tag{3.7}$$

Далее будем предполагать, что отображение X не произвольно, а удовлетворяет условиям

$$X(x,\ 0) = \xi(x), \quad \frac{\partial X}{\partial x_{d+1}}(x, 0) = -Jn(x).$$

Полагая $X = x + Y$, запишем эти условия в виде

$$Y(x,\ 0) = \eta(x), \quad \frac{\partial Y}{\partial x_{d+1}}(x, 0) = -\nu(x), \tag{3.8}$$

где $\nu = Jn + q_{d+1}$ и q_{d+1} — последний вектор канонического базиса в $\mathbb{R}^{d+1}$. Поскольку

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(y, h(y)) = -\frac{1}{J}\frac{\partial \Phi}{\partial x_{d+1}}(x, 0),$$

оператор Дирихле — Неймана (3.3) $\xi \to G(\xi)$ в новых переменных определяется равенством

$$G(\xi)\varphi(x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_{d+1}}(x, 0). \tag{3.9}$$

Именно этот оператор будем изучать.

Теорема 3.1. *Пусть $d \geq 2$, $s \geq 0$, $r > d/2$ и величина $\rho = \||\nabla|^{1/2}\eta\|_{1/2+\max(r,s)}$ достаточно мала. Тогда справедливо неравенство*

$$\|G(\xi)\varphi\|_s \leq \varkappa(\rho)\||\nabla|\varphi\|_s. \tag{3.10}$$

Следует отметить, что проблемой зависимости нормы оператора Дирихле — Неймана от свойств гладкости границы занимались и другие авторы (см., например, [5]). Однако таких оценок недостаточно для нужд задачи о волнах на воде. Необходимо получить представление оператора Дирихле — Неймана, в котором явно указывается его зависимость от старших производных отображения ξ.

Отметим также статью [6], в которой оператор Дирихле — Неймана представлен в виде суммы операторов порядка 1, 0, -1 и т. д. По сути дела в этой работе вычислен символ оператора Дирихле — Неймана.

Определим матрицу a равенством

$$a(x) = J^2(x)(\xi'^*(x)\xi'(x))^{-1}, \tag{3.11}$$

так что $b = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $x_{d+1} = 0$. Элементы матрицы a зависят только от параметрического представления гиперповерхности Γ и поэтому однозначно определяются геометрией Γ.

Поставим в соответствие матрице a дифференциальный оператор

$$Au = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \quad (= \operatorname{div}(a\nabla u)). \tag{3.12}$$

Будем предполагать оператор A эллиптическим:

$$C_1|z|^2 \le \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}z_iz_j \le C_2|z|^2, \tag{3.13}$$

с некоторыми положительными постоянными. Так как оператор $-A$ положителен, используя спектральное разложение [7], можно определить оператор

$$K = \sqrt{-A}. \tag{3.14}$$

Оператор K позволяет получить представление для «старших производных» оператора Дирихле — Неймана.

Теорема 3.2. *Пусть $d \ge 2$, $s > 2 + d/2$ и величина $\rho = \||\nabla|^{1/2}\eta\|_{s-1/2}$ достаточно мала. Справедливы равенство*

$$\Lambda^s G\varphi = K\Lambda^s\varphi + ((X_0')^{-1}(K\Lambda^s\eta - \Lambda^s\nu))_{d+1}G\varphi \\ - \sum_{i=1}^{d}((X_0')^{-1}(K\Lambda^s\eta - \Lambda^s\nu))_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + M\varphi \tag{3.15}$$

и оценка $\|M\varphi\| \le \rho\varkappa(\rho)\||\nabla|^{1/2}\varphi\|_{s-1/2}$.

Здесь X_0' — матрица X', вычисленная при $x_{d+1} = 0$. Она состоит из векторстолбцов $\frac{\partial\xi}{\partial x_1}, \frac{\partial\xi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\xi}{\partial x_d}$, $-Jn$.

Теорема 3.3. *Пусть $d \ge 2$, $s \ge 0$ и $r > d/2$. Предположим, что величина $\rho = \||\nabla|^{\frac{1}{2}}\eta\|_{1/2+\max(1+r,s-1)}$ достаточно мала. Тогда справедливо неравенство*

$$\|G\varphi - K\varphi\|_s \le \rho\varkappa(\rho)\||\nabla|^{1/2}\varphi\|_{s-1/2}. \tag{3.16}$$

Эта оценка для функции $\Lambda^s\varphi$ вместе с формулой (3.15) дает представление для коммутатора операторов Λ^s и G.

Доказательство теоремы 3.2 весьма громоздко и требует знания свойств нелинейных функций в пространствах H^s и E^s, оценок коммутаторов операторов Λ^s и $|\nabla|^s$ с функциями и свойств решений нелинейных краевых задач.

Пример. Пусть $d \ge 2$ и поверхность Γ в $\mathbb{R}^{d+1}$ задана уравнением $x_{d+1} = h(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Определим оператор $D(h)$ равенством

$$D(h)\varphi = \frac{1}{J^2}(G(h)\varphi - \nabla h \cdot \nabla\varphi)$$

и положим для краткости $a_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, d)$. Согласно (3.2) $\eta = (0, 0, \dots, 0, h)$ и $\nu = (a_1, a_2, \dots, a_{d,0})$. Прямыми вычислениями проверяется формула

$$(X')_0^{-1} = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} J^2 - a_1^2 & -a_1 a_2 & \dots & -a_1 a_d & a_1 \\ -a_2 a_1 & J^2 - a_2^2 & \dots & -a_2 a_d & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_d a_1 & -a_d a_2 & \dots & J^2 - a_d^2 & a_d \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_d & 1 \end{bmatrix}.$$

Представление (3.15) в этом случае запишется в виде

$$\Lambda^s G(h)\varphi = K(h)\Lambda^s \varphi + \nabla \Lambda^s h \cdot \nabla \varphi + D(h)\varphi(K\Lambda^s h + \nabla h \cdot \nabla \Lambda^s h) + M(h)\varphi. \quad (3.17)$$

Оператор $K(h)$ определен равенством (3.14) с матрицей a из (3.12), элементы которой имеют вид

$$a_{ij} = J^2 \delta_{ij} - a_i a_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, d,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Замечание 3.1. Пусть $d = 1$ и кривая Γ в $\mathbb{R}^2$ определена уравнением $y = h(x)$. Оператор K в плоском случае имеет вид $|\nabla| = \sqrt{-\frac{d^2}{dx^2}}$. Равенство (3.15) запишем в виде

$$\Lambda^s G\varphi = |\nabla|\Lambda^s \varphi + \frac{1}{J^2}\left(h'\Lambda^s h' + |\nabla|\Lambda^s h\right) G\varphi + \frac{1}{J^2}\left(\Lambda^s h' - h'|\nabla|\Lambda^s h\right)\varphi' + M\varphi. \quad (3.18)$$

Методы теории полугрупп, которые будут использоваться для доказательства теоремы (3.2), в плоском случае малопригодны. Это связано с тем, что потенциалы Рисса $|\nabla|^{-1/2}u$ в одномерном случае не убывают, вообще говоря, на бесконечности даже для финитных функций $u \in \mathscr{S}$. Тем не менее другие подходы, основанные, например, на теории потенциала или на формуле Сохоцкого для граничных значений аналитических функций дают представление (3.18) и в плоском случае.

Замечание 3.2. Поскольку для C^∞-функции h главная часть символа оператора $-A$ имеет вид $J^2|\xi|^2 - (\xi \cdot \nabla h)^2$, главная часть символа оператора Дирихле — Неймана представима в виде $\sqrt{J^2|\xi|^2 - (\xi \cdot \nabla h)^2}$. Этот факт был установлен в работе [8] другими средствами.

При доказательстве сформулированных теорем будем использовать традиционное определение оператора Дирихле — Неймана через решение краевых задач для гармонических функций. Возможен и другой подход к изучению, основанный на его определении через решение задачи Фробениуса:

Имея в виду задачу о волнах на воде, будем предполагать, что функция φ гармонична в «полупространстве» $x_{d+1} < h(x)$ и оператор Дирихле — Неймана определен формулой

$$\varphi(x) = \Phi(x, h(x)) \to G(h)\varphi(x) = J(x)\frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, h(x)),$$

где n — внешняя нормаль к границе.

Известно утверждение: для любых функций $d\varphi, dh \in \mathscr{S}$ верно равенство

$$d(G(h)\varphi) = G(h)d\varphi - \operatorname{div}(dh(\nabla\varphi - D(h)\varphi\nabla h)) - G(h)(dhD(h)\varphi). \quad (3.19)$$

Эта формула приведена, например, в [9].

Если в (3.19) зафиксировать φ (т. е. положить $d\varphi = 0$), то его в силу произвольности φ можно рассматривать как уравнение на оператор $G(h)$. Вместе с «начальными» данными

$$G(0)\varphi = |\nabla|\varphi \tag{3.20}$$

оно однозначно определяет оператор $G(h)$. Простой вывод уравнения (3.19) (правда, нестрогий) будет дан в конце параграфа.

Из (3.19) вытекают важные следствия. Например, $\frac{\partial}{\partial x_i}G(h)\varphi$ равно правой части (3.18), в которой нужно положить $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $dh = \frac{\partial h}{\partial x_i}$.

Уравнение (3.19) вместе с условием (3.20) позволяют вычислить все дифференциалы $d^m G(h)\varphi$ при $h = 0$, и решение задачи (3.19), (3.20) можно записать в виде ряда Тейлора: $G(h)\varphi = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} d^m G(h,\varphi)$, где $dh = h$. В частности,

$$G(h)\varphi = |\nabla|\varphi - \operatorname{div}(h\cdot\nabla\varphi) - |\nabla|(h|\nabla|\varphi) + \frac{1}{2}\{-|\nabla|(h\nabla h\cdot\nabla\varphi)$$
$$+ \operatorname{div}(h|\nabla|\varphi\nabla h) + \operatorname{div}(h\nabla(h|\nabla|\varphi)) + 2|\nabla|(h|\nabla|(h|\nabla|\varphi))\}$$

с точностью до членов третьего порядка малости по h.

Докажем формулу (3.19). Предположим, что некоторый функционал

$$F(\varphi,h) = \int f(\varphi,h)\,dx$$

дифференцируем. Это означает, что для любых функций $d\varphi$ и dh из $\mathscr{S}$ и вектора $\tau = (d\varphi, dh)$ существует производная F вдоль τ и верно равенство

$$dF(\varphi,h) = D_\tau F(\varphi,h) = (a(\varphi,h), d\varphi) + (b(\varphi,h), dh). \tag{3.21}$$

Функции a и b называются *производными функционала* F по φ и h соответственно. Положим $\tau_1 = (d\varphi, 0)$ и $\tau_2 = (0, dh)$. Если функционал F дважды дифференцируем, то существуют смешанные производные $D_{\tau_2}D_{\tau_1}F(\varphi,h)$ и $D_{\tau_1}D_{\tau_2}F(\varphi,h)$ и они равны. Нетрудно видеть, что

$$D_{\tau_2}D_{\tau_1}F(\varphi,h) = D_{\tau_2}(a(\varphi,h), d\varphi) = \left(\frac{\partial a}{\partial h}(\varphi,h)\,dh, d\varphi\right),$$

и аналогично

$$D_{\tau_1}D_{\tau_2}F(\varphi,h) = \left(dh, \frac{\partial b}{\partial \varphi}(\varphi,h)\,d\varphi\right).$$

Из равенства смешанных производных имеем

$$\frac{\partial a}{\partial h}(\varphi,h)\,dh = \left(\frac{\partial b}{\partial \varphi}(\varphi,h)\right)^* dh \quad \text{или} \quad \frac{\partial a}{\partial h}(\varphi,h) = \left(\frac{\partial b}{\partial \varphi}(\varphi,h)\right)^*. \tag{3.22}$$

Рассмотрим функционал

$$F(\varphi,h) = \frac{1}{2}\int \varphi G(h)\varphi\,dx.$$

В. Е. Захаров показал [2], что для F верно равенство (3.21) с функциями

$$a(\varphi,h) = G(h)\varphi, \quad b(\varphi,h) = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{2J^2}(G(h)\varphi + \nabla h\cdot\nabla\varphi)^2.$$

Отметим, что его рассуждения не связаны с размерностью пространства $\mathbb{R}^d$.

Производная от b по φ вычисляется без труда:

$$\frac{\partial b}{\partial \varphi}(\varphi,h)\,d\varphi = \nabla\varphi\cdot\nabla d\varphi - \frac{1}{J^2}(G(h)\varphi + \nabla h\cdot\nabla\varphi)(G(h)\,d\varphi + \nabla h\cdot\nabla\,d\varphi). \tag{3.23}$$

Формула (3.19) очевидным образом следует из (3.22) и (3.23).

§ 4. Нелинейные функции в $\mathbf{H}^s$

Рассмотрим композицию функции $\mathbb{R}^k \ni\ z \to F(z)$ и векторной функции v со значениями в $\mathbb{R}^k$. Обозначая через δz приращение z, через $\delta F(z) = F(z+\delta z) - F(z)$ будем обозначать приращение функции F в точке z. Соответственно для композиции $F \circ v$ будем писать $\delta F(v) = F(v+\delta v) - F(v)$.

Пусть $m > d/2$ — целое число, и пусть функция u и вектор-функция v со значениями в $\mathbb{R}^k$ принадлежат H^m. В [10] приведена оценка нормы композиции

$$\|F(v)u\|_m \le c\|F\|_{c^m(\Omega)}(1+\|v\|_m)^m\|u\|_m, \tag{4.1}$$

из которой следует неравенство

$$\|\delta F(v)\|_m \le c\|F\|_{c^{m+1}(\Omega)}(1+\|v\|_m+\|\delta v\|_m)^m\|v\|_m. \tag{4.2}$$

Здесь Ω — область, содержащая выпуклую оболочку множества значений всех вектор-функций вида $v + t\delta v$ $(0 \le t \le 1)$.

Аналогичные неравенства верны для дробных $s > d/2$:

$$\|F(v)u\|_s \le c\|F\|_{c^{[s]+1}(\Omega)}\varkappa(\|v\|_s)\|u\|_s. \tag{4.3}$$

Здесь и всюду ниже символом $\varkappa$ будем обозначать различные непрерывные функции своих аргументов, если конкретный вид их несуществен.

Приведем набросок доказательства этих оценок в случае $[s] > d/2$. Это ограничение особого значения не имеет, так как модификация неравенства (4.1) позволяет от него избавиться. Положим $\delta u = (T_y - I)u$ и точно так же определим δv. Если в формуле Тейлора

$$\delta F(v) = \sum \delta v_i \int\limits_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(v+t\delta v)\,dt \tag{4.4}$$

воспользоваться оценкой (4.2) и учесть, что сдвиг не меняет H^s-нормы, то получим

$$\|(T_y - I)F(v)\|_m \le \|F\|_{c^{m+2}(\Omega)}\varkappa(\|v\|_m)\|(T_y - I)v\|_m.$$

Из этого неравенства и (4.1) следует оценка

$$\|(T_y - I)F(v)u\|_m \le \|F\|_{c^{m+2}(\Omega)}\varkappa(\|v\|_m)(\|u\|_m\|(T_y - I)v\|_m + \|(T_y - I)u\|_m).$$

Подставляя ее в (2.2), придем к (4.3).

В дальнейшем, говоря о композиции $F \circ v$, всегда будем считать, что функция $\mathbb{R}^k \ni\ z \to F(z)$ определена и бесконечно дифференцируема в окрестности начала координат $z = 0$, а значения вектор-функции U лежат в $\mathbb{R}^k$.

Лемма 4.1. *Пусть $s > d/2$ и величина $\rho = \|v\|_s$ достаточно мала. Тогда при достаточно малых ρ справедливы неравенства*

$$\|F(v) - F(0)\|_s \le \varkappa(\rho)\|v\|_s, \quad \|F(v) - F(0)\|_{s+1} \le \varkappa(\rho)\|v\|_{s+1}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Согласно теореме вложения Соболева $\|v\|_{c(\mathbb{R}^d)} \le c\|v\|_s \le c\rho$, поэтому значения v при достаточно малых ρ лежат в некотором шаре пространства $\mathbb{R}^k$ с центром в начале координат, который, в свою очередь, содержится в той окрестности, в которой определена и бесконечно дифференцируема функция F. Для таких ρ определена композиция $F \circ v$. Первое утверждение леммы вытекает из формулы Тейлора (4.4) и неравенства (4.3). Так как $\|\varphi\|_{s+1} \le c\|\varphi\|_s + c\|\nabla\varphi\|_s$, оценивая производные композиции $F(v)$ снова с помощью (4.3), придем к (4.5). $\square$

Задача, с которой имеем дело, нелинейна, и в дальнейшем потребуются оценки норм коммутаторов функции и операторов Λ^s и $|\nabla|^s$. Эти оценки основаны на свойствах функции λ, определенной формулой (2.1), и опираются на очевидное неравенство

$$\lambda^s(\xi) \le c\lambda^s(\eta) + c\lambda^s(\xi-\eta) \quad (s \ge 0), \tag{4.6}$$

верное для всех ξ и η из $\mathbb{R}^d$ с постоянной, зависящей только от s.

Предложение 4.1. *Пусть $0 \le s \le p$. Тогда для всех ξ и η справедливы неравенства*

$$\lambda^s(\xi) \le c\lambda^s(\eta) + c\lambda^p(\xi-\eta)\lambda^{s-p}(\eta) \tag{4.7}$$

с постоянной, зависящей только от s и p.

Определим функцию $\xi \to \mu(\xi)$ либо равенством $\mu(\xi) = \lambda(\xi)$, либо равенством $\mu(\xi) = |\xi|$. Положим

$$f(\xi,\eta) = \lambda^p(\xi)(\mu^s(\xi) - \mu^s(\eta)). \tag{4.8}$$

Предложение 4.2. *Пусть $s \ge 0$ и $p \ge 0$. Тогда для всех ξ и η имеет место неравенство*

$$|f(\xi,\eta)| = c\lambda(\xi-\eta)\lambda^{s+p-1}(\eta) + c\lambda^{s+p}(\xi-\eta). \tag{4.9}$$

Если дополнительно $q \ge 0$ и $s+p-1 \le q$, то верна оценка

$$|f(\xi,\eta)| = c\lambda(\xi-\eta)\lambda^{s+p-1}(\eta) + c\lambda^{1+q}(\xi-\eta)\lambda^{s+p-1-q}(\eta). \tag{4.10}$$

Постоянные в этих формулах не зависят от ξ и η.

Предложение 4.3. *Пусть*

$$g(\xi,\eta) = \lambda^p(\xi)(\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta) - \lambda^s(\xi-\eta)). \tag{4.11}$$

Предположим, что $p \ge 0$ и $s \ge 1$. Тогда для любых ξ и η справедлива оценка

$$|g(\xi,\eta)| \le c\lambda(\xi-\eta)\lambda^{s+p-1}(\eta) + c\lambda(\eta)\lambda^{s+p-1}(\xi-\eta)$$

с постоянной, зависящей только от s и p.

Эти утверждения проверяются в области $|\xi| \gtrless 2\eta$, а также $|\xi| \gtrless |\eta|$ в случае предложения 4.2 при помощи формулы конечных приращений и неравенства (4.6). Они будут доказаны в § 9.

Учитывая их, изучим свойства произведения двух функций из $\mathscr{S}$. Оценки нормы произведения опираются на операцию свертки $u * v = \int u(x-y)v(y)\,dy$ двух функций, неравенство

$$\|u * v\| \le \|u\|_{L^1}\|v\|, \tag{4.12}$$

которое является частным случаем неравенства Хаусдорфа — Юнга, и формулу $\widehat{uv} = (2\pi)^{-d}\hat{u} * \hat{v}$ для преобразования Фурье. Отметим, что при $r > d/2$

$$\|\hat{u}\|_{L^1} \le c\|u\|_r \tag{4.13}$$

с постоянной, зависящей только от r.

Лемма 4.2. *Пусть $r > d/2$ и функция $s \to \sigma(s)$ определена формулой*

$$\sigma(s) = \begin{cases} r, & \text{если } |s| \le d/2, \\ |s|, & \text{если } |s| > d/2. \end{cases} \tag{4.14}$$

Справедливо неравенство

$$\|\varphi u\|_s \le \|\varphi\|_{\sigma(s)} \|u\|_s. \tag{4.15}$$

Кроме того,

$$\|\varphi u\|_s \le \|\varphi\|_r \|u\|_s + c\|\varphi\|_s \|u\|_r. \tag{4.16}$$

Доказательство. Пусть сначала $s \ge 0$. В соответствии с формулой преобразования Фурье произведения двух функций достаточно оценить L^2-норму функции

$$v(\xi) = \int \lambda^s(\xi) |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)||\hat{u}(\eta)|\, d\eta \le c v_1(\xi) + c v_2(\xi),$$

где согласно (4.7)

$$v_1(\xi) = \int |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| \lambda^s(\eta) |\hat{u}(\eta)|\, d\eta, \quad v_2(\xi) = \int \lambda^{s-p}(\xi - \eta) |\hat{u}(\xi - \eta)| \lambda^p(\eta) |\widehat{\varphi}(\eta)|\, d\eta.$$

Оценка (4.15) получается из формул (4.12) и (4.13) для функций v_k при $p = r$. Если взять $p = s$, то эти формулы дают неравенство (4.16).

Случай $s < 0$ в (4.15) вытекает из соотношения двойственности. □

Следствие 4.1. *Пусть норма $\rho = \|v\|_{\sigma(s)}$ достаточно мала. Тогда*

$$\|(F(v) - F(0))u\|_s \le \rho \varkappa(\rho) \|u\|_s. \tag{4.17}$$

Это утверждение есть очевидное следствие (4.15) и оценки нормы композиции (4.5).

Условимся в дальнейшем символом r обозначать число, строго большее $d/2$. В зависимости от обстоятельств оно может принимать различные значения.

Лемма 4.3. *Пусть $0 < p < d/2$. Тогда для всех s справедливо неравенство*

$$\||\nabla|^{-p}(\varphi u)\|_s \le c\|\varphi\|_{\sigma(s-p)} \|u\|_{s-p}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Заметим сначала, что при $|\xi| \le 1$ верна оценка

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le c\|\varphi\|_{|s-p|} \|u\|_{s-p}. \tag{4.19}$$

Действительно,

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le (2\pi)^{-d} \int \lambda^{p-s}(\eta) |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| \lambda^{s-p}(\eta) |\hat{u}(\eta)|\, d\eta,$$

и при $p - s \le 0$ неравенство (4.19) следует из неравенства Гёльдера. Если же $p - s > 0$, то $\lambda(\xi - \eta) \le c\lambda(\eta)$ для указанных ξ и из предыдущей формулы имеем

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le c \int \lambda^{p-s}(\xi - \eta) |\widehat{\varphi}(\xi - \eta)| \lambda^{s-p}(\eta) |\hat{u}(\eta)|\, d\eta.$$

Применяя снова неравенство Гёльдера, получим (4.19).

Формула (4.19) позволяет оценить интеграл

$$\int\limits_{|\xi| \le 1} |\xi|^{-2p} \lambda^{2s}(\xi) |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2\, d\xi \le c\|\varphi\|^2_{|s-p|} \|\eta\|^2_{s-p}.$$

Так как

$$\int\limits_{|\xi| \ge 1} |\xi|^{-2p} \lambda^{2s}(\xi) |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2\, d\xi \le c\|\varphi u\|^2_{s-p},$$

ссылка на (4.15) завершает доказательство леммы. □

Следствие 4.2. *Пусть* $0 < p < d/2$ *и величина* $\rho = \|v\|_{\sigma(s-p)}$ *достаточно мала. Тогда*
$$\||\nabla|^{-p}(F(v) - F(0))u\|_s \leq \rho\varkappa(\rho)\|u\|_{s-p}. \tag{4.20}$$

Это утверждение получается из неравенств (4.19) и (4.5).

Определим функцию $\xi \to \mu(\xi)$ либо равенством $\mu(\xi) = \lambda(\xi)$, либо равенством $\mu(\xi) = |\xi|$. Соответственно через M обозначим либо оператор Λ, либо оператор $|\nabla|$. Приступим к изучению дифференциальных свойств коммутаторов степеней оператора M с функцией из $\mathscr{S}$.

Лемма 4.4. *Пусть функция* $s \to \theta(s)$ *задана формулой*
$$\theta(s) = \begin{cases} 1 + r, & \text{если } s \leq 1 + d/2, \\ s, & \text{если } s > 1 + d/2. \end{cases} \tag{4.21}$$

При $s \geq 0$ *и* $p \geq 0$ *справедливо неравенство*
$$\|[M^s, \varphi]u\|_p \leq c\|\varphi\|_{\theta(s+p)}\|u\|_{s+p-1}. \tag{4.22}$$

Кроме того,
$$\|[M^s, \varphi]u\|_p \leq c\|\varphi\|_{1+r}\|u\|_{s+p-1} + c\|\varphi\|_{s+p}\|u\|_r. \tag{4.23}$$

Доказательство. Оценим L^2-норму интеграла
$$v(\xi) = \int f(\xi, \eta)\widehat{\varphi}(\xi - \eta)\hat{u}(\eta)\, d\eta$$
с функцией f, заданной формулой (4.8). Так как $|v| \leq cv_1 + cv_2$ согласно (4.9), из (4.12) и (4.13) следует оценка (4.23), а также неравенство (4.22) при $s + p > d/2$. В случае $s + p \leq d/2$ в неравенстве для абсолютной величины v функцию v_2 согласно (4.10) можно заменить функцией
$$v_2(\xi) = \int \lambda^{s+p-1-r}(\xi - \eta)|\hat{u}(\xi - \eta)|\lambda^{1+r}(\eta)|\widehat{\varphi}(\eta)|\, d\eta.$$

Оценка (4.22) вытекает снова из (4.12) и (4.13). □

Следствие 4.3. *Пусть* $0 \leq p \leq 1$ *и* $0 < s \leq 1 - p$. *Тогда*
$$\|[M^s, \varphi]u\|_{-p} \leq c\|\varphi\|_{\theta(1+p)}\|u\|_{s-1-p}. \tag{4.24}$$

Доказательство. Поскольку коммутатор является антисимметричным оператором, согласно соотношению двойственности норма в левой части (4.24) не превосходит величины
$$\sup_{v, \|v\|=1} |(u,\ [M^s, \varphi]\Lambda^{-p}v)| \leq \|u\|_{s-1-p} \sup_{v, \|v\|=1} \|[M^s, \varphi]\Lambda^{-p}v\|_{1+p-s}$$
и нужный результат вытекает из (4.22).

Лемма 4.5. *Пусть* $d \geq 2$ *и* $s > 2 + d/2$. *Тогда*
$$\|[M^s, \varphi]u\|_{-1/2} \leq c\|\varphi\|_{s-1}\|u\|_{s-3/2} + c\|\varphi\|_{s-1/2}\|u\|_{s-2}. \tag{4.25}$$

Доказательство. Запишем равенство
$$[M^s, \varphi]u = M^{\frac{1}{2}}[M^{s-\frac{1}{2}}, \varphi]u + [M^{\frac{1}{2}}, \varphi]M^{s-\frac{1}{2}}u.$$

Так как оператор $M^{1/2}\Lambda^{-1/2}$ ограничен в L^2, из оценок (4.23) и (4.24) отсюда $\|M^s, \varphi]u\|_{-1/2} \leq c\|\varphi\|_{1+r}\|u\|_{s-3/2} + c\|\varphi\|_{s-1/2}\|u\|_r$. Выбирая $r = s - 2$, придем к (4.25). □

Следствие 4.4. *Пусть $d \geq 2$ и $s > 2 + d/2$. Тогда*

$$\||\nabla|^{-1/2}[\Lambda^s, \varphi]u\| \leq c\|\varphi\|_{s-1}\|u\|_{s-\frac{3}{2}} + c\|\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}\|u\|_{s-2}. \tag{4.26}$$

Для доказательства этого утверждения положим $v = [\Lambda^s, \varphi]u$ и заметим, что $\lambda(\eta) \leq c\lambda(\xi - \eta)$ при $|\xi| \leq 1$. Поэтому

$$|\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta)| \leq c\lambda^s(\eta) \leq c\lambda^{3/2}(\xi - \eta)\lambda^{s-3/2}(\eta), \quad |\hat{v}(\xi)| \leq c\|\varphi\|_{3/2}\|u\|_{s-3/2}$$

для таких ξ. Следовательно,

$$\int\limits_{|\xi|\leq 1} |\xi|^{-1}|\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi \leq c\|\varphi\|_{3/2}^2\|u\|_{s-3/2}.$$

Аналогичный интеграл по множеству $|\xi| \geq 1$ оценивается сверху через $c\|v\|_{-1/2}^2$. Складывая оба интеграла, из (4.25) получим (4.26).

Следствие 4.5. *Пусть $d \geq 2$ и $s > 2 + d/2$. Предположим, что норма $\rho = \|v\|_{s-1}$ достаточно мала. Тогда*

$$\||\nabla|^{-1/2}[\Lambda^s, F(v)]u\| \leq \varkappa(\rho)(\rho\|u\|_{s-3/2} + \|v\|_{s-1/2}\|u\|_{s-2}). \tag{4.27}$$

Действительно, поскольку в коммутаторе можно заменить $F(v)$ на $F(v) - F(0)$, нужное неравенство вытекает из (4.26) и оценок норм композиции (4.5).

Рассмотрим далее выражение

$$B_s(u, v) = \Lambda^s(uv) - v\Lambda^s u - u\Lambda^s v. \tag{4.28}$$

Лемма 4.6. *Пусть $p \geq 0$, $s \geq 1$ и $s + p > 1 + d/2$. Справедливо неравенство*

$$\|B_s(u, v)\|_p \leq c\|u\|_{s+p-1}\|v\|_{s+p-1}. \tag{4.29}$$

Доказательство сводится к оценке L^2-нормы функции

$$w(\xi) = \int g(\xi, \eta)\hat{u}(\xi - \eta)\hat{v}(\eta)\, d\eta,$$

где g определено равенством (4.11). Согласно предложению 4.3 норма функции w не превосходит суммы норм функций cw_1 и cw_2, где

$$w_1(\xi) = \int \lambda(\xi - \eta)|\hat{u}(\xi - \eta)|\lambda^{s+p-1}(\eta)|\hat{v}(\eta)|\, d\eta,$$

а функция w_2 отличается от w_1 только тем, что в ней $\hat{u}$ и $\hat{v}$ меняются местами. Выбирая $r = s + p - 1$, из (4.12) и (4.13) получим оценки w_i. Складывая их, придем к (4.29). $\square$

Следствие 4.6. *Пусть $s > (3 + d)/2$ и $d \geq 2$. Тогда*

$$\||\nabla|^{-1/2}B_s(u, v)\| \leq c\|u\|_{s-3/2}\|v\|_{s-3/2}. \tag{4.30}$$

Действительно, запишем равенство

$$\begin{aligned}|\nabla|^{-1/2}B_s(u, v) = B_{s-1/2}(u, v) &+ |\nabla|^{-1/2}(\Lambda^{1/2} - |\nabla|^{1/2})B_{s-1/2}(u, v) \\ &+ |\nabla|^{-1/2}[\Lambda^{1/2}, v]\Lambda^{s-1/2}u + |\nabla|^{-1/2}[\Lambda^{1/2}, u]\Lambda^{s-1/2}v.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части оценим с помощью (4.29). Так как оператор $\Lambda^{1/2} - |\nabla|^{1/2}$ имеет порядок $-3/2$, оценку второго слагаемого получим, учитывая вид функции $B_{s-1/2}(u,v)$, из формулы (4.18). Нужные неравенства для двух последних слагаемых следуют из (4.25). Тем самым формула (4.30) установлена.

Замечание о нормали к гиперповерхности. Будем предполагать, что гиперповерхность Γ, определенная параметрическим представлением (3.5), является дифференцируемым многообразием, и поэтому в каждой ее точке определена внешняя к Ω нормаль n. Для функции ν из формулы (3.8) верны следующие утверждения.

Пусть $s > d/2$ и величина $\rho = \||\nabla|^{1/2}\eta\|_{s+1/2}$ достаточно мала. Тогда

$$\|\nu\|_s \le \rho\varkappa(\rho), \quad \||\nabla|^{-1/2}\nu\|_{s+1/2} \le \rho\varkappa(\rho). \tag{4.31}$$

Действительно, поскольку вектор единичной внешней нормали n ортогонален всем касательным векторам $\frac{\partial\xi}{\partial x_i}$, координаты вектора ν находятся из системы уравнений

$$\nu_i = -\frac{\partial\eta_{d+1}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial\eta}{\partial x_i} \ (i = 1, 2, \dots, d); \quad \nu_{d+1} = \frac{1}{2}(J^2 - 1) + \frac{1}{2}|\nu|^2. \tag{4.32}$$

Воспользовавшись для оценок правых частей этих уравнений формулами (4.15) и (4.5), а также формулами (4.18) и (4.20), получим квадратное неравенство $\gamma \le \rho\varkappa(\rho) + c\rho\gamma + c\gamma^2$, где γ обозначает либо $\|\nu\|_s$, либо $\||\nabla|^{-1/2}\nu\|_{s+1/2}$. Решение этого неравенства при малых ρ дает оценки (4.31).

Отметим, что при $d = 2$ требование малости ρ является излишним, поскольку $\nu = -\frac{\partial\xi}{\partial x_1} \times \frac{\partial\xi}{\partial x_2} + q_{d+1}$.

§ 5. Свойства квадратного корня из эллиптического оператора второго порядка

Пусть A — определенный равенством (3.12) оператор с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Для удобства мы будем предполагать, что постоянные эллиптичности из (3.13) удовлетворяют неравенствам $c_1 \le 1 \le c_2$. Эти неравенства всегда можно считать выполненными, так как в (3.13) имеем право уменьшать c_1 и увеличивать c_2. Наряду с оператором A рассмотрим оператор $A_\varepsilon = -\varepsilon^2 + A$ с произвольной постоянной $\varepsilon > 0$. Простейшие свойства оператора $K_\varepsilon = \sqrt{-A_\varepsilon}$ получим, отправляясь от его определения: для всех $u \in \mathscr{S}$ справедливы неравенства

$$\sqrt{c_1}\||\nabla|_\varepsilon u\| \le \|K_\varepsilon u\| \le \sqrt{c_2}\||\nabla|_\varepsilon u\| \tag{5.1}$$

с постоянными из условия эллиптичности. Здесь $|\nabla|_\varepsilon$ — определенный в (2.3) оператор. Неравенства (5.1) вытекают из равенств

$$\|K_\varepsilon u\|^2 = -(u, A_\varepsilon u) = \varepsilon^2\|u\|^2 + (\nabla u, a\nabla u)$$

и условия эллиптичности (3.13).

Пусть далее P и Q — определенные на $\mathscr{S}$ и действующие в L^2 операторы. Условимся писать $P \sim Q$ и говорить, что P *эквивалентен* Q, если для всех $u \in \mathscr{S}$ выполняются неравенства

$$c^{-1}\|Pu\| \le \|Qu\| \le c\|Pu\| \tag{5.2}$$

с некоторой положительной постоянной, которую в дальнейшем будем называть *постоянной эквивалентности.*

Лемма 5.1. *Пусть операторы P и Q симметричны, эквивалентны и, кроме того, оператор P обратим на $\mathscr{S}$ и действует из $\mathscr{S}$ в себя. Тогда на $\mathscr{S}$ оператор Q обратим и оператор P^{-1} эквивалентен оператору Q^{-1}.*

Доказательство. Положим $u = P^{-1}v$, где v — произвольная функция из $\mathscr{S}$ в неравенстве (5.2), и введем обозначение $M = QP^{-1}$. Тогда для v из $\mathscr{S}$ верны неравенства $c^{-1}\|v\| \le \|Mv\| \le c\|v\|$. Поэтому оператор $M : L^2 \to L^2$ обратим, $c^{-1} \le \|M^{-1}\| \le c$ и такие же оценки справедливы для сопряженного к M^{-1} оператора. Следовательно,

$$c^{-1}\|v\| \le \|Q^{-1}Pv\| \le c\|v\| \quad \text{для всех } v \in \mathscr{S}.$$

Эквивалентность операторов Q^{-1} и P^{-1} получим, если положим $v = P^{-1}u$, где u — произвольная функция из $\mathscr{S}$. $\square$

Лемма 5.2. *Справедливы следующие утверждения: $K_\varepsilon \sim |\nabla|_\varepsilon$, $K_\varepsilon^{-1} \sim |\nabla|_\varepsilon^{-1}$ $(\varepsilon > 0)$ с постоянными эквивалентности, не зависящими от ε. В частности, $K \sim |\nabla|$, $K_1 = (1+K^2)^{1/2} \sim \Lambda$, $K_1^{-1} \sim \Lambda^{-1}$.*

Доказательство очевидно в силу (5.1). $\square$

Аналогичными свойствами обладает и квадратный корень из K_ε. Однако спектральная теория, определяющая функции от операторов, не дает способа их установить. Поэтому воспользуемся другим способом задания оператора K, связанным с решением краевой задачи. Для любого $\varepsilon \ge 0$ наряду с K_ε определим, как это делается в спектральной теории, операторную экспоненту $\exp\{-tK_\varepsilon\}$ $(t \ge 0)$. Пусть U — решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + A_\varepsilon U = 0, \quad U(0) = u, \quad U(\infty) = 0. \tag{5.3}$$

Теория полугрупп дает решение $U = e^{-tK_\varepsilon}u$ этой задачи, и мы можем определить оператор K_ε равенством $K_\varepsilon u = -\frac{\partial U}{\partial t}(0)$.

Лемма 5.3. *Справедливы утверждения $K_\varepsilon^{1/2} \sim |\nabla|_\varepsilon^{1/2}$, $K_\varepsilon^{-1/2} \sim |\nabla|_\varepsilon^{-1/2}$ с постоянными эквивалентности, не зависящими от ε. В частности, $K_1^{1/2} \sim \Lambda^{1/2}$, $K_1^{-1/2} \sim \Lambda^{-1/2}$, $K^{1/2} \sim |\nabla|^{1/2}$. Кроме того, $K^{-1/2} \sim |\nabla|^{-1/2}$ при $d \ge 2$.*

Доказательство. Продолжим функцию u в $\mathbb{R}_+^{d+1}$ решением краевой задачи (5.3). В соответствии с леммой 2.1 и условием эллиптичности

$$c_1 \big\| |\nabla|_\varepsilon^{1/2} u \big\|^2 \le \int_0^\infty \left(-(A_\varepsilon U, U) + \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|^2 \right) dt.$$

Производя в последнем выражении в правой части интегрирование по частям, получим

$$c_1 \big\| |\nabla|_\varepsilon^{1/2} u \big\|^2 \le -\left(U(0), \frac{\partial U}{\partial t}(0) \right) = (u, K_\varepsilon u) = \big\| K_\varepsilon^{1/2} u \big\|^2. \tag{5.4}$$

Продолжим u решением уравнения (2.1) в полупространство $\mathbb{R}_+^{d+1}$. Так как

$$\begin{aligned} \big\| K_\varepsilon^{1/2} u \big\|^2 &= -2 \int_0^\infty \left(K_\varepsilon U, \frac{\partial U}{\partial t} \right) dt \\ &\le \int_0^\infty \left(\|K_\varepsilon U\|^2 + \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|^2 \right) dt = \int_0^\infty \left(-(A_\varepsilon U, U) + \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|^2 \right) dt, \end{aligned}$$

после интегрирования по частям из условия эллиптичности и леммы 2.1 получим

$$\left\|K_\varepsilon^{1/2}u\right\|^2 \le c_2 \int_0^\infty \left(\||\nabla|_\varepsilon U\|^2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2 \right) dt = c_2 \left\||\nabla|_\varepsilon^{1/2} u\right\|^2.$$

Это неравенство вместе с (5.4) доказывает эквивалентность операторов $K_\varepsilon^{1/2}$ и $|\nabla|_\varepsilon^{1/2}$ и в соответствии с леммой 5.1 эквивалентность обратных к ним операторов при $\varepsilon > 0$.

Вторая часть леммы очевидна. Переходя к пределу при $\varepsilon > 0$, опираясь, например, на теорему Б. Леви, в неравенстве

$$c^{-1}\left\||\nabla|_\varepsilon^{-1/2}u\right\| \le \left\|K_\varepsilon^{-1/2}u\right\| \le c\left\||\nabla|_\varepsilon^{-1/2}u\right\| \quad (u \in \mathscr{S})$$

получим последнее утверждение леммы. □

Замечание 5.1. Отправляясь от эквивалентности операторов K_ε^{-1} и $|\nabla|_\varepsilon^{-1}$ при $\varepsilon > 0$, с помощью подобных рассуждений можно доказать эквивалентность операторов K^{-1} и $|\nabla|^{-1}$ при $d > 2$. Однако при $d = 2$ это утверждение уже неверно, поскольку функционал $\||\nabla|^{-1}u\|$ не ограничен для всех $u \in \mathscr{S}$.

Лемма 5.4. *Справедливы следующие отношения эквивалентности:*

$$KK_1^{-1/2} \sim |\nabla|\Lambda^{-1/2}, \quad K^{1/2}K_1^{-1/2} \sim |\nabla|^{1/2}\Lambda^{-1/2}.$$

Кроме того, $K^{-1/2}K_1^{1/2} \sim |\nabla|^{-1/2}\Lambda^{1/2}$ *при* $d \ge 2$.

Доказательство этих утверждений проводится одинаковым способом. Докажем первое. Положим $Q_\varepsilon = K_\varepsilon^{-1}\bigl(1 + K_\varepsilon^{1/2}\bigr)$, $P_\varepsilon = |\nabla|_\varepsilon^{-1}\bigl(1 + |\nabla|_\varepsilon^{1/2}\bigr)$, где $\varepsilon > 0$. Эти операторы эквивалентны с постоянной, не зависящей от ε. Действительно, так как операторы K_ε^{-1} и $K_\varepsilon^{-1/2}$ положительны и эквивалентны операторам $|\nabla|_\varepsilon^{-1}$ и $|\nabla|_\varepsilon^{-1/2}$ соответственно с постоянной, не зависящей от ε, имеем

$$\|Q_\varepsilon u\|^2 \le 2\left\|K_\varepsilon^{-1}u\right\|^2 + 2\left\|K_\varepsilon^{-1/2}u\right\|^2 \le c\left\||\nabla|_\varepsilon^{-1}u\right\|^2 + c\left\||\nabla|_\varepsilon^{-1/2}u\right\|^2 \le c\|P_\varepsilon u\|^2.$$

Аналогичные оценки снизу доказывают эквивалентность операторов Q_ε и P_ε. В соответствии с леммой 5.1 эквивалентны и обратные операторы. Переходя в неравенствах эквивалентности к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$c^{-1}\||\nabla|(1 + |\nabla|^{1/2})^{-1}u\| \le \|K(1 + K^{1/2})^{-1}u\| \le c\||\nabla|(1 + |\nabla|^{1/2})^{-1}u\|.$$

Поскольку $|\nabla|(1 + |\nabla|^{1/2})^{-1} \sim |\nabla|\Lambda^{-1/2}$ и $K(1 + K^{1/2})^{-1} \sim KK_1^{-1}$, лемма доказана. □

Лемма 5.5. *Пусть* $d \ge 2$ *и элементы матрицы* $a - I$ *принадлежат пространству* $H^r (r > d/2)$. *Тогда при достаточно малых* $\rho = \|I - a\|_r$ *операторы* $K^{-1/2}(1 + K)^{-1}$ *и* $|\nabla|^{-1/2}\Lambda^{-1}$ *эквивалентны с постоянной, зависящей от* ρ.

Доказательство. Установим сначала эквивалентность $K_\varepsilon^{1/2}(1 + K_\varepsilon)$ и $|\nabla|_\varepsilon^{1/2}(1 + |\nabla|_\varepsilon)$. С этой целью заметим, что $\bigl(A_\varepsilon + |\nabla|_\varepsilon^2\bigr)u = \operatorname{div}((a - I)\nabla u)$. В соответствии с (4.18)

$$\begin{aligned}\left\||\nabla|_\varepsilon^{-1/2}\operatorname{div}((a - I)\nabla u)\right\| &\le \||\nabla|^{-1/2}\operatorname{div}((a - I)\nabla u)\| \le c\|(a - I)\nabla u\|_{1/2} \\ &\le c\rho\|\nabla u\|_{1/2} \le c\rho(\||\nabla|^{3/2}u\| + \||\nabla|u\|) \le c\rho\bigl(\left\||\nabla|_\varepsilon^{3/2}u\right\| + \||\nabla|_\varepsilon u\|\bigr).\end{aligned}$$

Так как $K_\varepsilon^{3/2} = -K_\varepsilon^{-1/2}A_\varepsilon = -K_\varepsilon^{-1/2}\big(A_\varepsilon + |\nabla|_\varepsilon^2\big) + K_\varepsilon^{-1/2}|\nabla|_\varepsilon^2$, имеем

$$\big\|K_\varepsilon^{-1/2}|\nabla|_\varepsilon^2\big\| - c\rho\big(\big\||\nabla|_\varepsilon^{3/2}u\big\| + \||\nabla|_\varepsilon u\|\big) \le \big\|K_\varepsilon^{3/2}u\big\| \\ \le \big\|K_\varepsilon^{-1/2}|\nabla|_\varepsilon^2\big\| + c\rho\big(\big\||\nabla|_\varepsilon^{3/2}u\big\| + \||\nabla|_\varepsilon u\|\big).$$

Добавляя $(1+c\rho)\||\nabla|_\varepsilon u\|$ во все члены этих неравенств и учитывая эквивалентность операторов $K_\varepsilon^{-1/2}$ и $|\nabla|_\varepsilon^{-1/2}$, в результате несложных преобразований при малых ρ получим

$$c^{-1}\big\|(1+|\nabla|_\varepsilon)|\nabla|_\varepsilon^{1/2}u\big\| \le \big\|(1+K_\varepsilon)K_\varepsilon^{1/2}u\big\| \le c\big\|(1+|\nabla|_\varepsilon)|\nabla|_\varepsilon^{1/2}u\big\|$$

с постоянной, зависящей от ρ. Согласно лемме 5.1 эквивалентны и обратные операторы. Переходя в соответствующих неравенствах к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим утверждение леммы. $\square$

Оценки функций вида Ku в пространствах H^s получить значительно сложнее. Установим их в предположении малости элементов матрицы $I - a$. Положим

$$L_0U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + AU \tag{5.5}$$

и рассмотрим в полупространстве $\mathbb{R}_+^{d+1}$ краевую задачу

$$L_0U = g, \quad U(0) = u, \quad U(\infty) = 0. \tag{5.6}$$

С помощью теории полугрупп решение этой задачи выписывается в виде

$$U(t) = e^{-tK}u + \frac{1}{2}K^{-1}e^{-tK}\int_0^\infty e^{-tK}g(t)\,dt - \frac{1}{2}K^{-1}\int_0^\infty e^{-|t-\tau|K}g(\tau)\,d\tau.$$

Из этой формулы следует, что решение существует для «достаточно хороших» функций g и

$$\frac{\partial U}{\partial t}(0) = -Ku - \int_0^\infty e^{-tK}g(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Лемма 5.6. *Пусть U — решение задачи (5.6) и функция $s \to \sigma(s)$ определена равенством (4.14). Тогда для достаточно малых $\rho = \|I-a\|_{\sigma(s+1/2)}$ верны оценки*

$$\int_0^\infty\left(\||\nabla|U\|_{s+1/2}^2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|_{s+1/2}^2\right)dt = \varkappa(\rho)\left(\||\nabla|^{1/2}u\|_s^2 + \int_0^\infty \||\nabla|^{-1}g\|_{s+1/2}^2\,dt\right), \tag{5.8}$$

$$|U|_s^2 \le \varkappa(\rho)\left(\||\nabla|^{1/2}u\|_s^2 + \int_0^\infty \||\nabla|^{-1/2}g\|_s^2\,dt\right). \tag{5.9}$$

Доказательство. Запишем уравнение (5.6) в виде (2.9) с функцией $f = \operatorname{div}((I-a)\nabla U) + g$. Заметим, что

$$\||\nabla|^{-1}f\|_{s+1/2} \le c\rho\||\nabla|U\|_{s+1/2} + \||\nabla|^{-1}g\|_{s+1/2}$$

в соответствии с формулой (4.15). Если через γ обозначить левую часть (5.8), то из (2.10) вытекает неравенство

$$\gamma \leq c\rho^2\gamma + c\||\nabla|^{1/2}u\|^2_{s+1/2} + c\int\limits_0^\infty \||\nabla|^{-1}g\|^2_{s+1/2}\,dt,$$

решение которого при малых ρ приведет к (5.8).

Так как согласно (4.15) $\||\nabla|^{-1/2}f\|_s \leq c\rho\||\nabla|U\|_{s+1/2} + \||\nabla|^{-1/2}g\|_s$, формула (5.8) очевидным образом получается из (2.10) и (5.8). $\square$

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 5.6. *Тогда для всех* s

$$\|Ku\|_s \leq \varkappa(\rho)\||\nabla|^{1/2}u\|_{s+1/2}. \tag{5.10}$$

Действительно, это утверждение вытекает из определения оператора K через решение краевой задачи (5.6) с $g = 0$, леммы 2.2 и оценки (5.8).

Приведем свойства операторной экспоненты, которые будут существенно использоваться в дальнейшем. Отметим, что для любого числа $\alpha > 0$ из спектральной теории следует равенство

$$\alpha\int\limits_0^\infty Ke^{-\alpha tK}\,dt = I. \tag{5.11}$$

Здесь I — тождественный оператор.

Предложение 5.1. *Для любых чисел* α *и любых функций* φ, *не зависящих от* t, *верны равенства*

$$\int\limits_0^\infty \|e^{-\alpha tK}\varphi\|^2\,dt = \frac{1}{2\alpha}\|K^{-1/2}\varphi\|^2. \tag{5.12}$$

В самом деле, подынтегральное выражение можно записать в следующем виде: $(Ke^{-2\alpha tK}\varphi, K^{-1}\varphi)$, и формула (5.12) вытекает из (5.11).

Предложение 5.2. *Для любых чисел* $\alpha > 0$ *справедливы оценки*

$$\left\|\int\limits_0^\infty e^{-\alpha tK}f(t)\,dt\right\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty \|K^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\alpha tK}f(t)\|^2\,dt \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_0^\infty \|K^{-1/2}f(t)\|^2\,dt. \tag{5.13}$$

Действительно, обозначим через w функцию, стоящую под знаком нормы в левой части (5.13). Поскольку для любых функций φ, не зависящих от t,

$$(w,\varphi) = \int\limits_0^\infty (K^{1/2}e^{-\frac{1}{2}\alpha tK}\varphi, K^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\alpha tK}f(t))\,dt,$$

из неравенства Гёльдера и (5.11) имеем

$$(w,\varphi)^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|\varphi\|^2\int\limits_0^\infty \|K^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\alpha tK}f(t)\|^2\,dt.$$

Первая оценка в (5.13) следует из соотношения двойственности. Второе утверждение очевидно, поскольку операторная экспонента ограничена в L^2.

Следствие 5.2. *Для любых чисел $\alpha > 0$ при $d \geq 2$ верно соотношение*

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\alpha t K} f(t)\, dt \right\|^2 \leq \frac{c}{\alpha} \int_0^\infty \| |\nabla|^{-1/2} f(t)\|^2\, dt. \tag{5.14}$$

Действительно, это неравенство вытекает из (5.13) и леммы 5.3.

Докажем, опираясь на полученные выше результаты, что композиция оператора $|\nabla|^{-1/2}$ и коммутатора K с гладкой функцией имеет порядок $-1/2$.

Лемма 5.7. *Пусть отображение $(\varphi, u) \to B(\varphi, u)$ определено формулой $B(\varphi, u) = K(\varphi u) - \varphi K u - u K \varphi$. Предположим, что величина $\rho = \|I - a\|_{r+1/2}$ достаточно мала. Тогда справедливы неравенства*

$$\|B(\varphi, u)\|_{1/2} \leq \varkappa(\rho) \| |\nabla| \varphi \|_r \| |\nabla|^{1/2} u\|, \tag{5.15}$$

$$\| |\nabla|^{-1/2} B(\varphi, u)\| \leq \varkappa(\rho) \| |\nabla| \varphi\|_r \|u\|_{-1/2}. \tag{5.16}$$

Доказательство. Продолжим φ и u в полупространство $\mathbb{R}^{d+1}_+$ равенствами $\Phi = e^{-tK}\varphi$, $U = e^{-tK}u$. Положим $V = \Phi U$, так что $L_0 V = f$ с функцией $f = 2a\nabla\Phi \cdot \nabla U$. Поскольку $\frac{\partial V}{\partial t}(0) = -\varphi K u - u K \varphi$, из (5.7) имеем

$$B(\varphi, u) = \int_0^\infty e^{-tK} f(t)\, dt.$$

Оценим норму интеграла из правой части в пространстве $H^{1/2}$. Леммы 5.2, 5.3 и предложение 5.1 приводят к цепочке формул

$$\|B(\varphi, u)\|_{1/2}^2 = \|\Lambda^{1/2} B(\varphi, u)\|^2 \leq c \big\| K_1^{1/2} B(\varphi, u) \big\|^2$$
$$= c \left\| \int_0^\infty e^{-tK} K_1^{1/2} f(t)\, dt \right\|^2 \leq c \int_0^\infty \big\| K^{-1/2} K_1^{1/2} f(t) \big\|^2 dt \leq c \int_0^\infty \| |\nabla|^{-1/2} f(t)\|_{1/2}^2\, dt.$$

Заметим, что в соответствии с формулой (4.18)

$$\| |\nabla|^{-1/2} f\|_{1/2} \leq c \| |\nabla| \Phi\|_r \| |\nabla| U\| \leq \varkappa(\rho) \| |\nabla| \varphi\|_r \| |\nabla| U\|$$

согласно неравенствам (2.8) и (5.9) при $g = 0$. Если эти неравенства возвести в квадрат и проинтегрировать по t, то из (5.8) будем иметь

$$\int_0^\infty \| |\nabla|^{-1/2} f(t)\|^2\, dt \leq \varkappa(\rho) \| |\nabla| \varphi\|_r \| |\nabla|^{1/2} u\|.$$

Тем самым первая оценка леммы установлена. Для доказательства второй заметим, что $(|\nabla|^{-1/2} B(\varphi, u), v) = -(\Lambda^{-1/2} u, \Lambda^{1/2} B(\varphi, |\nabla|^{-1/2} v))$. Нужный результат вытекает из соотношения двойственности и (5.15).

Следствие 5.3. *Пусть выполнены условия леммы 5.7. Тогда*

$$\| |\nabla|^{-1/2} [K, \varphi] u\| \leq \varkappa(\rho) \| |\nabla| \varphi\|_r \|u\|_{-1/2}. \tag{5.17}$$

В самом деле, оценка (5.17) очевидным образом получается из равенства $[K, \varphi] u = B(\varphi, u) + u K \varphi$ и формул (5.16), (4.18) и (5.10).

§ 6. Специальная параметризация области Ω

Здесь и в § 6, 7 переменную x_{d+1}, поскольку она играет особую роль, будем обозначать через t. С другой стороны, все переменные, входящие в определение оператора L, равноправны. Поэтому там, где это удобно, сохраним обозначение x_{d+1}.

Пусть A — оператор, определенный формулой (3.12), с матрицей a из (3.11). Коэффициенты матрицы a можно рассматривать как композицию некоторых функций $\mathbb{R}^{d(d+1)} \ni z \to a_{ij}(z)$ с вектором, составленным из элементов матрицы η'. Легко показать, что эти функции от z определены и бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат. Поэтому композиция $a(\eta')$ определена, если величина $\|\eta'\|_r$ достаточно мала. Поскольку $a(0) = I$, при достаточно малых $\rho = \||\nabla|\eta\|_r$ верно неравенство$\|a(\eta') - I\|_r \leq \rho\varkappa(\rho)$ согласно оценке композиции (4.5). Отсюда видно, что оператор A будет эллиптическим (например, с $c_1 = 1/2$ и $c_2 = 2$ в (3.13)), если ρ достаточно мало. Этими свойствами матрицы $a(\eta')$ будем пользоваться постоянно без ссылок на приведенные выше рассуждения.

Пусть K — определенный формулой (3.14) оператор и s — произвольное число. Определим отображение $\mathbb{R}^{d+1}_+ \ni x \to y = x + Y(x,d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ равенством

$$Y = \Lambda^{-s}e^{-tK}\Lambda^s\eta + \Lambda^{-s}(1 - e^{-tK})e^{-tK}w, \tag{6.1}$$

где $w = \Lambda^s\eta - K^{-1}\Lambda^s\nu$ с функциями η и ν из (3.8). Так как $Y(0) = \eta$ и $\frac{\partial Y}{\partial t}(0) = -\nu$, отображение X удовлетворяет условиям (3.8) и действительно является параметрическим представлением Ω. Отметим, что в соответствии с формулой (4.31) при $s > (1+d)/2$

$$\||\nabla|^{1/2}w\|_{-1/2} \leq \rho_0\varkappa(\rho_0), \quad \text{где } \rho_0 = \||\nabla|^{1/2}\eta\|_{s-1/2}, \tag{6.2}$$

если величина ρ_0 достаточно мала.

Лемма 6.1. *Пусть $s > d/2$. Тогда для всех $i, j = 1, 2, \ldots, d+1$ при достаточно малых ρ_0 справедливы неравенства*

$$\left\|\frac{\partial Y}{\partial x_i}(t)\right\|_{s-1} + \left\|\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j}(t)\right\|_{s-2} \leq \rho_0\varkappa(\rho_0), \tag{6.3}$$

$$\int_0^\infty \left\|\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right\|^2_{s-1/2} dt + \int_0^\infty \left\|\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j}(t)\right\|^2_{s-3/2} dt \leq \rho_0^2\varkappa(\rho_0). \tag{6.4}$$

Доказательство. Обозначим через v либо вектор-функцию $\Lambda^s\eta$, либо вектор-функцию $\Lambda^s w$. Достаточно оценить нормы первых и вторых производных вектор-функции $V(t) = e^{-mtK}v$, где m принимает значения 1 или 2, в пространствах H^{-1} и H^{-2} соответственно.

Пусть сначала $i \leq d$. Тогда

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}V\right\|_{-1} \leq \|\Lambda^{-1/2}|\nabla|^{1/2}V\| \leq c\big\|K_1^{-1/2}K^{1/2}e^{-mtK}v\big\| \\ \leq c\||\nabla|^{1/2}v\|_{-1/2} \leq \rho_0\varkappa(\rho_0).$$

Здесь учли эквивалентность операторов $K_1^{-1/2}K^{1/2}$ и $\Lambda^{-1/2}|\nabla|^{1/2}$ (лемма 5.3), а также определение вектор-функции V и оценку (6.2).

Если $i = d+1$, то

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|_{s-1} = m\|\Lambda^{-1}KV\| \le c\big\|K_1^{-1}Ke^{-tK}v\big\| \le c\||\nabla|^{1/2}v\|_{s-1/2} \le \rho_0\varkappa(\rho_0)$$

на основании леммы 5.1 и (6.2). Тем самым оценка первых производных в (6.3) установлена.

Рассмотрим вторые производные от Y. Если i и j одновременно не равны $d+1$ (скажем, $i \ne d+1$), то $\big\|\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j}\big\|_{s-2} \le \big\|\frac{\partial Y}{\partial x_j}\big\|_{s-1}$ и нужный результат вытекает из уже доказанных оценок для первых производных.

Пусть теперь i и j равны $d+1$. Заметим, что для любой функции φ при $p = 3/2$ и $p = 2$ верны неравенства

$$\|K^2\varphi\|_{-p} = \|A\varphi\|_{-p} \le \|a\nabla\varphi\|_{1-p} \le \varkappa(\rho_0)\|\nabla\varphi\|_{1-p} \tag{6.5}$$

в соответствии с формулой (4.5). Следовательно,

$$\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right\|_{-2} = m^2\|K^2 V\|_{-2} \le \varkappa(\rho_0)\|\nabla V\|_{-1} \le \rho_0\varkappa(\rho_0)$$

по уже доказанному. Приведенные выше оценки производных от V завершают доказательство неравенств (6.3).

Установим неравенства (6.4). Нужно сначала оценить нормы первых и вторых производных вектор-функции V в пространствах $H^{-1/2}$ и $H^{-3/2}$ соответственно. Так как при $i \le d$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\|_{-1/2} \le \||\nabla|\Lambda^{-1/2}V\| \le c\big\|e^{-mt}KK_1^{-1/2}v\big\|$$

на основании леммы 5.3, из предложения 5.2 и леммы 5.3 следуют неравенства

$$\int\limits_0^\infty \left\|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\|_{-1/2}^2 dt \le c\big\|K^{1/2}K_1^{-1/2}v\big\|^2 \le c\||\nabla|^{-1/2}v\|_{-1/2}^2 \le \rho_0^2\varkappa(\rho_0).$$

При $i = d+1$ аналогично имеем

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|_{-1/2} \le m\|KV\|_{-1/2} \le c\|\Lambda^{-1/2}KV\| \le c\big\|K_1^{-1/2}KV\big\|,$$

поэтому

$$\int\limits_0^\infty \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|_{-1/2}^2 dt \le c\big\|K^{1/2}K_1^{-1/2}v\big\|^2 \le \||\nabla|^{1/2}v\|_{-1/2}^2 \le \rho_0^2\varkappa(\rho_0).$$

При выводе оценок вторых производных снова рассмотрим два случая. Если хотя бы одно из i, j не совпадает с $d+1$, то этот случай очевидным образом сводится к оценке первых производных от Y.

Если одновременно i и j равны $d+1$, то в соответствии с (6.5)

$$\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right\|_{-3/2} \le \varkappa(\rho)\sum_{j=1}^{d+1}\left\|\frac{\partial V}{\partial x_j}\right\|_{-1/2},$$

и мы снова пришли к оценкам первых производных V. $\square$

Рассмотрим далее оператор L, определенный равенством

$$LU = \sum_{i,j=1}^{d+1} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_{ij}\frac{\partial U}{\partial x_j}\Big). \tag{6.6}$$

Здесь b_{ij} — элементы матрицы (3.6). Они зависят только от производного отображения Y'. Поэтому для краткости положим

$$Z_i = \frac{\partial Y}{\partial x_i}, \quad Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{d+1}),$$

и будем использовать запись $b = b(Z)$. Из вида элементов обратной к X' матрицы следует, что их можно считать композициями функций, зависящих от $(d{+}1)^2$ переменных, с вектором, составленным из элементов матрицы Z. Поскольку матрица X' равна единичной при $Y = 0$, эти функции бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат. Точно так же элементы матрицы b можно считать композицией некоторых бесконечно дифференцируемых в окрестности начала координат функций $z \to b_{ij}(z)$ с вектором, составленным из элементов матрицы $Z : b_{ij}(Z) = b_{ij} \circ Z$. Это замечание позволит в дальнейшем использовать результаты, полученные для нелинейных отображений в пространствах H^s.

Замечание 6.1. В этом параграфе и в § 7, 8 будем иметь дело со сложными функциями вида $F(z)$, где функция $z \to F(z)$ определена и бесконечно дифференцируема в окрестности точки $z = 0$. Кроме того, всегда будем считать, что $s > 1 + d/2$. Поэтому композиция $F \circ Z$ определена, если $\|Z(t)\|_{s-1} \le \rho$, где ρ – достаточно малое число. Но лемма 6.1 утверждает, что $\|Z(t)\|_{s-1} \le \rho_0 \varkappa(\rho_0)$ и функция $F \circ Z$ определена, если ρ_0 достаточно мало. Этим фактом постоянно будем пользоваться в дальнейшем при оценках норм функций вида $F(z)U$, не упоминая лемму 6.1, чтобы не перегружать текст частыми ссылками на нее.

Лемма 6.2. *Пусть $s > 1 + d/2$ и величина $\rho_0 = \||\nabla|^{1/2}\eta\|_{s-1/2}$ достаточно мала. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_t \|LY(t)\|^2_{s-2} + \int_0^\infty \|LY(t)\|^2_{s-3/2}\,dt \le \rho_0^2 \varkappa(\rho_0). \tag{6.7}$$

Доказательство. Обозначим через p либо число 2, либо число 3/2. Положим $r = s - 1$. Так как $\sigma(s-p) < s-1$, из формул (4.15) и (4.5) вытекает оценка

$$\|LY\|_{s-p} \le \varkappa(\rho_0) \sum_{i,j=1}^{d+1} \bigg(\Big\|\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j}\Big\|_{s-p} + \Big\|\frac{\partial Z}{\partial x_i}\Big\|_{s-p} \Big\|\frac{\partial Y}{\partial x_j}\Big\|_{s-1}\bigg).$$

Утверждение (6.7) следует из леммы 6.1 и этой формулы. Лемма доказана. □

§ 7. Доказательство теоремы 3.1

Рассмотрим задачу (3.7) с отображением $X = x + Y$, заданным формулой (6.1).

Теорема 7.1. *Пусть $d \geq 2$, $s \geq 1$, $r > d/2$ и $\rho_0 = \|\||\nabla|^{1/2}\eta\|_{1/2+\max(r,s-1)}$ достаточно мало. Тогда для решения задачи (3.7) справедлива оценка*

$$|\Phi|_{s-1} \leq \varkappa(\rho_0)\|\||\nabla|\varphi\|_{s-1}. \tag{7.1}$$

Напомним, что полунорма в пространствах E^s определена равенством (2.7).

Доказательство проведем сначала для $s > 1 + d/2$. Разобьем его на три части.

(1) Запишем уравнение (3.7) в несколько другом виде. С этой целью введем обозначение

$$\beta = \beta_{d+1} = b_{d+1\,d+1} - 1, \quad \beta_i = b_{id+1}, \quad \beta_{ij} = b_{ij} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, d),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Здесь $\beta_i = \beta_i(Z)$ и аналогично $\beta_{ij} = \beta_{ij}(Z)$.

Будем использовать обозначение § 6, а также учитывать соглашение приведенного в нем замечания. Определим операторы H_1 и H_2 равенствами

$$\begin{gathered} H_1\Phi = -\frac{\beta}{1+\beta}\Delta\Phi - \frac{1}{1+\beta}\left(\sum_{i,j=1}^{d}\beta_{ij}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j} + 2\sum_{i=1}^{d}\beta_i\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial t}\right), \\ H_2\Phi = -\frac{1}{1+\beta}\sum_{i,j=1}^{d+1}\frac{\partial\beta_i}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Выполняя в уравнении (3.7) дифференцирование и выделяя вторую производную по t от Φ, запишем его в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \Delta\Phi = f, \quad \text{где } f = H_1\Phi + H_2\Phi. \tag{7.3}$$

Эта запись уравнения (3.7) в некотором смысле лучше исходной, так как f не содержит вторых производных по t от решения.

(2) Оценим норму функции $|\nabla|^{-1/2}f$ в пространстве H^{s-1}. Положим $r = s-1$, так что $\sigma(s-3/2) \leq s-1$. Отметим, что $b(0) = I$ и поэтому $\beta_i(0) = 0$ и $\beta_{ij}(0) = 0$. Это замечание позволяет применить формулу (4.18) для оценки функции $H_1\Phi$:

$$\|\||\nabla|^{-1/2}H_1\Phi\|_{s-1} \leq \rho_0\varkappa(\rho_0)\left(\left\||\nabla|^{3/2}\Phi\right\|_{s-1} + \left\||\nabla|^{1/2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\|_{s-1}\right), \tag{7.4}$$

Учитывая, что $\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right\|_{s-1} \leq |\Phi|_{s-1}$ согласно лемме 2.2, из (4.18) и (4.20) получим

$$\|\||\nabla|^{-1/2}H_2\Phi\|_{s-1} \leq \varkappa(\rho_0)|\Phi|_{s-1}\sum_{i,n,m=1}^{d+1}\left\|\frac{\partial^2 Y_m}{\partial x_i\partial x_n}\right\|_{s-3/2}. \tag{7.5}$$

(3) Завершим доказательство теоремы. Согласно определению функции f, определению полунормы, оценкам (7.4), (7.5) и лемме 6.1 имеем

$$\int_0^\infty \|\||\nabla|^{-1/2}f\|_{s-1}^2\,dt \leq \rho_0^2\varkappa(\rho_0)|\Phi|_{s-1}^2.$$

Применим оценку (2.11) к решению задачи (3.7) с уравнением (3.7), записанном в форме (7.3), и определенной там же функцией f. В результате получим неравенство $|\Phi|_{s-1}^2 \leq \rho_0^2\varkappa(\rho_0)|\Phi|_{s-1}^2 + 4\|\||\nabla|\varphi\|_{s-1}^2$, решение которого при малых ρ_0 завершает доказательство теоремы при $s > 1 + d/2$.

В случае $0 \leq s \leq d/2$ необходимо положить $s = r$ в параметрическом представлении (6.1), а затем повторить приведенные выше рассуждения (1)–(3) с учетом поправок, возникающих при оценке нормы произведения двух функций (4.15) для таких s.

Следствие 7.1. *Теорема* 3.1 *верна.*

Действительно, если в оценке (7.1) заменить $s-1$ на s, учесть лемму 2.2 и определение (3.9) оператора G, то в результате получим оценку (3.10).

Следствие 7.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \left(\left\| |\nabla| \Phi \right\|_{s-1}^2 + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|_{s-1}^2 \right) dt \le \varkappa(\rho) \| |\nabla|^{1/2} \varphi \|_{s-1}^2. \tag{7.6}$$

С целью доказательства (7.6) запишем уравнение для Φ в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \Delta \Phi = f, \quad \text{где } f = -\sum_{i,j=1}^{d+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((b_{ij}(Z) - b_{ij}(0)) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right). \tag{7.7}$$

Условимся временно для любой функции $t \to U(t)$ писать

$$E(U) = \int\limits_0^\infty \left(\| |\nabla| U \|_{s-1}^2 + \left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\|_{s-1}^2 \right) dt.$$

Считая функцию f в (7.7) заданной, будем искать решение Φ уравнения (7.7) в виде $\Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 удовлетворяет уравнению (7.7) с нулевой функцией f и краевым условием $\Phi(0) = \varphi$, а Φ_2 удовлетворяет уравнению (7.7) с нулевым краевым условием. Так как $\Phi_1 = e^{-t|\nabla|}\varphi$, согласно (5.12)

$$E(\Phi_1) \le 2 \| |\nabla|^{1/2} \varphi \|_{s-1}^2. \tag{7.8}$$

Уравнения на Φ_2 умножим скалярно в L^2 на $\Lambda^{2s-2}\Phi_2$ и проинтегрируем по частям. В результате получим интегральное тождество

$$E(\Phi_2) = \sum_{i,j=1}^{d+1} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i}, (b_{ij}(Z) - b_{ij}(0)) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)_s dt.$$

Оценивая подынтегральное выражение в правой части последовательно с помощью неравенства Шварца, неравенства (4.17) и неравенства Коши, будем иметь $E(\Phi_2) \le \rho^2 \varkappa(\rho)(E(\Phi_2) + E(\Phi))$. Отсюда

$$E(\Phi_2) \le \rho^2 \varkappa(\rho) E(\Phi). \tag{7.9}$$

Так как $E(\Phi) \le 2E(\Phi_1) + 2E(\Phi_2)$, складывая (7.8) и (7.9) и решая полученное неравенство, придем к (7.6).

Следствие 7.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *Тогда для всех i и j верны оценки*

$$\left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(t) \right\|_{s-2} \le \varkappa(\rho_0) \| |\nabla| \varphi \|_{s-1}. \tag{7.10}$$

В самом деле, эти неравенства очевидны, если i и j одновременно не равны $d+1$. Для оценки второй производной функции Φ воспользуемся уравнением (7.3). Достаточно, очевидно, оценить функции $H_i\Phi$ сверху через правую часть (7.10). Нужное неравенство для $H_1\Phi$ получим из (4.17) и леммы 6.1. Выполняя дифференцирование в определении функции $H_2\Phi$, из (4.3) и леммы 6.2 будем иметь для нее требуемую оценку.

§ 8. Доказательства теорем 3.2 и 3.3

Предварим доказательству несколько утверждений.

Лемма 8.1. *Пусть $d \geq 2$, $r > d/2$ и $\bar{g}(t) = g(t) - g(0)$. Предположим, что величина $\rho_0 = \||\nabla|\eta\|_r$ достаточно мала. Тогда для всех i верны оценки*

$$\left\| \int_0^\infty e^{-tK} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{g}U)\, dt \right\|^2 + \left\| \int_0^\infty e^{-tK} \left(\bar{g} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) dt \right\|^2 \leq \varkappa(\rho_0)\gamma^2 \int_0^\infty \|U\|^2_{-1/2}\, dt, \quad (8.1)$$

где $\gamma = \sup\limits_t \|\bar{g}(t)\|_{1+r} + \sup\limits_t \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|_r$.

Кроме того, для всех i

$$\left\| \int_0^\infty e^{-tK} \left(f \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{g}U) \right) dt \right\|^2 \leq \varkappa(\rho_0)\gamma^2\gamma_1^2 \int_0^\infty \|U\|^2_{-1/2}\, dt. \quad (8.2)$$

Здесь $\gamma_1 = \sup\limits_t \|f(t)\|_{1+r} + \sup\limits_t \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_r$.

Доказательство. Установим неравенство (8.1). Положим

$$V_1 = \int_0^\infty e^{-tK} \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{g}U)\, dt, \quad V_2 = \int_0^\infty e^{-tK} \left(\bar{g} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) dt.$$

Пусть сначала $i = d + 1$. В этом случае

$$V_1 = \int_0^\infty Kte^{-tK}(\psi U)\, dt, \quad V_2 = \int_0^\infty Kte^{-tK}(\psi U)\, dt - \int_0^\infty e^{-tK} \left(\frac{\partial g}{\partial t} U \right) dt,$$

где $\psi(t) = \bar{g}(t)/t$. Из (5.13) имеем

$$\|V_1\|^2 \leq \int_0^\infty \|K^{1/2}te^{-tK}(\psi U)\|^2\, dt \leq c \int_0^\infty \|K^{-1/2}(\psi U)\|^2\, dt,$$

поскольку оператор tKe^{-tK} ограничен в L^2. С учетом того, что операторы $K^{-1/2}$ и $|\nabla|^{-1/2}$ эквивалентны (лемма 5.2), из (4.8) вытекает неравенство

$$\|V_1\|^2 \leq c \int_0^\infty \|\psi\|_r^2 \|U\|^2_{-1/2}\, dt,$$

из которого (ибо $\|\psi(t)\|_r \leq \gamma$), в свою очередь, следует оценка (8.1) функции V_1.

Аналогично для функции V_2 имеем

$$\|V_2\| \leq c\gamma^2 \int_0^\infty \|U\|^2_{-1/2}\, dt + c \int_0^\infty \left\| K^{-1/2} \left(\frac{\partial g}{\partial t} U \right) \right\|^2 dt \leq c\gamma_1^2 \int_0^\infty \|U\|^2_{-1/2}\, dt.$$

Пусть теперь $i \leq d$. Используя разбиение единицы $1 = K(1+K)^{-1} + (1+K)^{-1}$, запишем функцию V_1 в виде

$$\int_0^\infty K(1+K)^{-1}te^{-tK} \frac{\partial}{\partial x_i}(\psi U)\, dt + \int_0^\infty (1+K)^{-1}e^{-tK} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{g}U)\, dt.$$

Применяя оценку (5.13) и снова учитывая, что оператор $tKe^{-1/2tK}$ ограничен в L^2, получим неравенство

$$\|V_1\|^2 \le c\int\limits_0^\infty \left\|K^{-1/2}(1+K)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi U)\right\|^2 dt + c\int\limits_0^\infty \left\|K^{-1/2}(1+K)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar g U)\right\|^2 dt.$$

Так как согласно оценке композиции (4.5) $\|I-a\|_r \le \rho_0\varkappa(\rho_0)$, лемма 5.4 позволяет заменить в написанной выше формуле оператор K оператором $|\nabla|$:

$$\|V_1\|^2 \le \varkappa(\rho_0)\int\limits_0^\infty (\||\nabla|^{-1/2}(\psi U)\|^2 + \||\nabla|^{-1/2}(\bar g U)\|^2)\,dt$$

и из неравенства (4.18) следует оценка (8.1) функции V_1.

Утверждение (8.1) для V_2 получим из равенства

$$V_2 = \int\limits_0^\infty e^{-tK}\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar g U)\,dt - \int\limits_0^\infty e^{-tK}\left(\frac{\partial \bar g}{\partial x_i}U\right)dt,$$

уже доказанного результата и оценки (5.14) для второго слагаемого в правой части.

Докажем формулу (8.2). Обозначим через V интеграл, стоящий под знаком нормы в левой части (8.2). Пусть $i = d+1$. Интегрирование по частям дает равенство

$$V = \int\limits_0^\infty Kte^{-tK}(f\psi U)\,dt - \int\limits_0^\infty e^{-tK}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\bar g U\right)dt,$$

Рассуждения, подобные предыдущим, приводят к формуле

$$\|V\|^2 \le \varkappa(\rho_0)\int\limits_0^\infty \left(\|\psi f\|_r^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\bar g\right\|^2\right)\|U\|_{-1/2}^2\,dt. \tag{8.3}$$

и из (4.14) следует в этом случае неравенство (8.2).

Если же $i \le d$, то при всех i верно равенство

$$V = \int\limits_0^\infty te^{-tK}\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi f U)\,dt - \int\limits_0^\infty e^{-tK}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bar g U\right)dt.$$

Снова проводя рассуждения, аналогичные соответствующим при доказательстве (8.1), придем к формуле (8.3), в которой вместо $\frac{\partial f}{\partial t}$ будет стоять $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Тем самым показано, что утверждение (8.2) истинно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Всегда будем предполагать, что условия теоремы выполнены. Другими словами, $d \ge 2$, $s > 2 + d/2$ и величина $\rho_0 = \||\nabla|^{1/2}\eta\|_{s-1/2}$ достаточно мала. Кроме того, положим $r = s-2$.

При изложении материала практически всегда будем пользоваться одной или несколькими оценками вида (4.3), (4.5), (4.15) и (4.17). Поэтому, чтобы не перегружать текст, постоянные ссылки на них упоминать не будем. Отметим, что требование на s обеспечит применимость этих формул.

Условимся для любой функции, вектор-функции или матрицы $t \to f(t)$ писать $f_0 = f(0)$. Отметим, что

$$LU = L_0 U + \sum_{i,j=1}^{d+1} \frac{\partial}{\partial x_i}\biggl((b_{ij}(Z) - b_{ij}(Z_0))\frac{\partial U}{\partial x_j}\biggr), \tag{8.4}$$

поскольку при $t = 0$ матрица b имеет блочный вид, указанный в § 3.

Разобьем доказательство на несколько частей.

(1) Пусть $y_i = X(x, x_{d+1})$ — произвольная замена переменных в уравнении Лапласа (3.2). В новых переменных его можно записать в виде (3.7). Соответствующий оператор L определен формулой (6.6). Положим

$$PU = \sum_{i,j=1}^{d+1} b_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$$

с функциями b_{ij}, являющимися элементами матрицы b из (3.6).

Справедливы равенства

$$LU = PU - LY \cdot U', \quad LY = (X')^{-1} PY, \tag{8.5}$$

где U' — вектор с координатами $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{d+1}}$. Это обозначение удобно, но не совсем корректно, поскольку символ «штрих» обычно используется для обозначения производного отображения. Напомним, что $Y = X - x$.

По сути дела формулы (8.5) являются центральным местом доказательства представления (3.15). Они будут доказаны в § 10.

(2) Справедливы представление

$$\Lambda^s G\varphi = K\Lambda^s \varphi + \int_0^\infty e^{-tK}(\Lambda^s LY \cdot \Phi')\, dt + M_1\varphi \tag{8.6}$$

и оценка

$$\|M_1\varphi\| \le \rho_0 \varkappa(\rho_0) \||\nabla|^{1/2}\varphi\|_{s-1/2}. \tag{8.7}$$

В самом деле, подействуем на обе части первого равенства в (8.5) оператором Λ^s. В результате получим формулу

$$\Lambda^s L\Phi = L_0 \Lambda^s \Phi - \Lambda^s LY \cdot \Phi' + \sum_{i=1}^{3} R_i \Phi,$$

в которой

$$R_1\Phi = -(L - L_0)\Lambda^s\Phi, \quad R_2\Phi = \Lambda^s(LY \cdot \Phi') - \Lambda^s LY \cdot \Phi' - LY \cdot \Lambda^s \Phi',$$

$$R_3\Phi = [\Lambda^s, P]\Phi = \sum_{i,j=1}^{d+1} [\Lambda^s, b_{ij}] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Из равенства смешанных производных при $t = 0$ и (5.7) следует представление (8.6) с оператором

$$M_1\Phi = \sum_{i=1}^{3} \int_0^\infty e^{-tK} R_i \Phi\, dt.$$

Для доказательства оценки (8.7) достаточно показать, что

$$\left\| \int_0^\infty e^{-tK} R_i \Phi \, dt \right\| \leq \rho_0 \varkappa(\rho_0) \| |\nabla|^{1/2} \varphi \|_{s-1/2}. \tag{8.8}$$

Заметим, что для всех j

$$\|b(Z) - b(Z_0)\|_{s-1} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (b(Z) - b(Z_0)) \right\|_{s-1} \leq \rho_0 \varkappa(\rho_0)$$

согласно лемме 6.1. Поскольку имеет место формула (8.4), можно применить неравенство (8.1) при оценке левой части (8.8) для функции $R_1\Phi$:

$$\left\| \int_0^\infty e^{-tK} R_1 \Phi \, dt \right\|^2 \leq \rho_0^2 \varkappa(\rho_0) \int_0^\infty \left(\| |\nabla| \Phi \|_{s-1/2}^2 + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|_{s-1/2}^2 \right) dt$$
$$\leq \rho_0^2 \varkappa(\rho_0) \| |\nabla|^{1/2} \varphi \|_{s-1/2}^2$$

согласно следствию 7.2 теоремы 7.1. Тем самым (8.8) при $i = 1$ установлено.

Рассмотрим случай $i = 2$. Применяя оценку (4.30) и учитывая результаты леммы 2.2 и теоремы 7.1, получим

$$\| |\nabla|^{-1/2} R_2 \Phi \| \leq c \|\Phi'\|_{s-3/2} \|LY\|_{s-3/2} \leq \varkappa(\rho_0) \| |\nabla| \varphi \|_{s-1} \|LY\|_{s-3/2}.$$

Отсюда, из (5.14) и (6.7) следует неравенство (8.7) при $i = 2$.

Пусть теперь $i = 3$. Из формулы (4.27) имеем

$$\| |\nabla|^{-1/2} R_3 \varphi \|^2 \leq \varkappa(\rho_0) \rho_0^2 \left(\sum_{i,j=1}^{d+1} \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{s-3/2}^2 + \|Z\|_{s-1/2}^2 \left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{s-2}^2 \right)$$
$$\leq \varkappa(\rho_0) \left(\rho_0^2 \sum_{i,j=1}^{d+1} \left\| |\nabla|^{-1/2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{s-1}^2 + \| |\nabla| \varphi \|_{s-1}^2 \|Z\|_{s-1/2}^2 \right).$$

Здесь учтено следствие 7.3 теоремы 7.1. Утверждение (8.7) для $i = 3$ вытекает из (5.14), (7.1) и (6.4). Представление для (8.6) и оценка (8.7) доказаны.

(3) Положим $QY = Q_1 Y + Q_2 Y$, где

$$Q_1 Y = \left[\Lambda_1^s, (X')^{-1} P \right] Y = \sum_{i,j=1}^{d+1} [\Lambda^s, b_{ij} (X')^{-1}] \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$Q_2 Y = \sum_{i=1}^{d+1} L Y_i (X')^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \Lambda^s Y.$$

Справедливы равенство

$$\Lambda^s L Y = (X')^{-1} L \Lambda^s Y + QY \tag{8.9}$$

и оценка

$$\|QY\|_{-1/2} \leq \rho_0 \varkappa(\rho_0) \left(\|Z\|_{s-1/2} + \sum_{i,j=1}^{d+1} \left\| \frac{\partial^2 Y}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{s-3/2} \right). \tag{8.10}$$

Действительно, формулу (8.9) получим, если подействуем на второе равенство в (8.5) оператором Λ^s.

Так как $\|u\|_{-1/2} \le \||\nabla|^{-1/2}u\|$ для любой функции u, оценка нормы функции Q_1Y в пространстве $H^{-1/2}$ через правую часть (8.10) следует из (4.27) и леммы 6.1, а соответствующее неравенство для Q_2Y — из (4.15) и леммы 6.2.

(4) Справедливы представление

$$\int_0^\infty e^{-tK}(\Lambda^s LY \cdot \Phi')\,dt = \int_0^\infty e^{-tK}((X')^{-1}L\Lambda^s Y \cdot \Phi')\,dt + M_2\varphi \tag{8.11}$$

и оценка

$$\|M_2\varphi\| \le \rho_0\varkappa(\rho_0)\||\nabla|\varphi\|_{s-1}. \tag{8.12}$$

В самом деле, равенство (8.11) вытекает из (8.9) с оператором

$$M_2\varphi = \int_0^\infty e^{-tK}(QY \cdot \Phi')\,dt.$$

Поскольку $\|QY \cdot \Phi'\|_{-1/2} \le c\|\Phi'\|_{s-1}\|QY\|_{-1/2}$ согласно (4.15), оценка (8.12) следует из (7.1), (5.14), (8.9) и леммы 6.1.

(5) Справедливы представление

$$\int_0^\infty e^{-tK}((X')^{-1}L\Lambda^s Y \cdot \Phi')\,dt = \int_0^\infty e^{-tK}\big(L_0\Lambda^s Y \cdot (X'^*)_0^{-1}\Phi_0'\big)\,dt + M_3\varphi \tag{8.13}$$

и оценка

$$\|M_3\varphi\| \le \rho_0\varkappa(\rho_0)\||\nabla|\varphi\|_{s-1}. \tag{8.14}$$

Докажем эти утверждения. Положим для краткости $V = (X'^*)^{-1}\Phi'$. Формула (8.13) имеет место с оператором

$$M_3\varphi = \int_0^\infty e^{-tK}((L - L_0)\Lambda^s Y \cdot V + L_0\Lambda^s Y(V - V_0))\,dt.$$

Нетрудно проверить, опираясь на (7.1) и лемму 6.1, что для всех i

$$\|V(t)\|_{s-1} + \left\|\frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\right\|_{s-2} \le \varkappa(\rho_0)\||\nabla|\varphi\|_{s-1}.$$

Поэтому можно применить лемму 8.1 для оценки функции $M_3\varphi$.

В результате получим (8.14):

$$\|M_3\varphi\|^2 \le \varkappa(\rho_0)\||\nabla\varphi|\|_{s-1}^2 \sum_{i=1}^{d+1}\int_0^\infty \left\|\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right\|_{s-1/2}^2 dt = \rho_0^2\varkappa(\rho_0)\||\nabla|\varphi\|_{s-1}^2$$

снова из леммы 6.1.

(6) С векторной функцией w, определенной в (6.1), верны равенство

$$\int_0^\infty e^{-tK}(L_0\Lambda^s Y \cdot (X_0'^*)^{-1}\Phi_0')\,dt = -Kw \cdot (X_0'^*)^{-1}\Phi_0' + M_4\varphi \tag{8.15}$$

и оценка
$$\|M_4\varphi\| \le \rho_0 \varkappa(\rho_0) \||\nabla|\varphi\|_{s-1}. \tag{8.16}$$
В самом деле, положим $v = (X_0'^*)^{-1}\Phi_0'$. Так как $L_0\Lambda^s Y = -3K^2 e^{-2tK} w$, левую часть в (8.15) можно записать в виде
$$-3\int_0^\infty K e^{-tK}(v \cdot K e^{-2tK} w)\,dt + 3M_4\varphi, \quad \text{где } M_4\varphi = \int_0^\infty e^{-tK}([k,v]K e^{-2tK} w)\,dt. \tag{8.17}$$
Интегрирование по частям в (8.17) приводит к равенству (8.15).

Для доказательства оценки (8.16) воспользуемся формулами (5.12), (5.14), (5.17), а также леммами 5.2 и 5.3. В итоге получим цепочку неравенств
$$\|M_4\varphi\|^2 \le \int_0^\infty \||\nabla|^{-1/2}[K,v]e^{-2tK}Kw\|^2\,dt \le \varkappa(\rho_0)\|v\|_{1+r}^2 \int_0^\infty \|Ke^{-2tK}w\|_{-1}^2\,dt$$
$$\le \varkappa(\rho_0)\|v\|_{1+r}^2 \int_0^\infty \|K(1+K)^{-1}e^{-2tK}w\|^2\,dt \le \varkappa(\rho_0)\|v\|_{1+r}^2\||\nabla|^{1/2}w\|_{-1/2}^2$$
$$\le \rho_0^2\varkappa(\rho_0)\|v\|_{1+r}^2.$$
Как отмечалось выше, $\|v\|_{1+r} \le \|v\|_{s-1} \le \varkappa(\rho_0)\||\nabla|\varphi\|_{s-1}$, и оценка (8.16) верна.

(7) Последовательно применяя установленные результаты, получим представление (3.15) с оператором $M = \sum\limits_{i=1}^{4} M_i$. Теорема 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.3. Продолжим функцию φ в $\mathbb{R}^{d+1}$ двумя способами. Пусть U — решение задачи
$$LU = 0, \quad U(0) = \varphi, \quad U(\infty) = 0,$$
а V — решение задачи
$$L_0V = 0, \quad V(0) = \varphi, \quad V(\infty) = 0.$$
Тогда, очевидно,
$$G\varphi - K\varphi = -\frac{\partial W}{\partial t}(0), \quad \text{где } W = U - V.$$

Нетрудно проверить равенство
$$L_0\Lambda^s W = -[\Lambda^s, L]U + [\Lambda^s, L_0]V - (L - L_0)\Lambda^s U.$$
Поскольку $W(0) = 0$, отсюда и из (5.7) следует формула
$$\Lambda^s(G\varphi - K\varphi) = -\int_0^\infty e^{-tK}[\Lambda^s, L]U\,dt + \int_0^\infty e^{-tK}[\Lambda^s, L_0]V\,dt + \int_0^\infty e^{-tK}(L - L_0)\Lambda^s U\,dt. \tag{8.18}$$

Нам необходимо оценить L^2-норму правой части (8.18). Покажем, как это можно сделать.

Для оценки первого слагаемого из правой части (8.18) нужно, интегрируя при необходимости по частям, сначала воспользоваться свойствами коммутатора (4.24), затем леммой 6.1 и следствием 7.2. В результате получим требуемое неравенство для первого слагаемого из правой части (8.18). Второе слагаемое оценивается точно так же, только вместо следствия 7.2 нужно воспользоваться леммой 5.6. Наконец, оценку последнего слагаемого из правой части (8.18) получим, если воспользуемся леммами 8.1, 6.1 и следствием 7.2. Объединяя эти три утверждения, придем к оценке (3.16). □

§ 9. Свойства функции $\boldsymbol{\lambda}$

Доказательство предложения 4.1. При $|\xi| \le 2|\eta|$ оценка очевидным образом получается из (4.6). Если же $|\xi| \ge 2|\eta|$, то $|\xi - \eta| \ge |\xi| - |\eta| \ge |\eta|$ и поэтому $\lambda(\eta) \le \lambda(\xi - \eta)$. Так как $\lambda^{s-p}(\xi - \eta) \le \lambda^{s-p}(\eta)$, то (4.7) следует из (4.6). Пусть функция $\xi \to \mu(\xi)$ определена либо равенством $\mu(\xi) = \lambda(\xi)$, либо равенством $\mu(\xi) = |\xi|$. Положим

$$f(\xi, \eta) = \lambda^p(\xi)(\mu^s(\xi) - \mu^s(\eta)). \tag{9.1}$$

Доказательство предложения 4.2. Пусть сначала $s \ge 1$. Тогда из формулы конечных приращений вытекает, что

$$|\mu^s(\xi) - \mu^s(\eta)| \le c|\xi - \eta|(\lambda^{s-1}(\xi) + \lambda^{s-1}(\eta)),$$

и доказательство формулы (4.10) сводится к двукратному применению неравенства (4.6). Если $s < 1$, то оценка (4.10) очевидна при $|\eta| \le 1$. Если $|\eta| > 1$, то рассмотрим два случая. Пусть сначала $|\xi| \le |\eta|$. Тогда

$$|\mu^s(\xi) - \mu^s(\eta)| \le \mu^s(\eta)\left(1 - \frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)}\right) \le c|\xi - \eta|\mu^{s-1}(\eta) \le c\lambda(\xi - \eta)\mu^{s-1}(\eta).$$

Поэтому

$$|f(\xi, \eta)| \le c\lambda(\xi - \eta)\lambda^p(\xi)\lambda^{s-1}(\eta) \le c\lambda(\xi - \eta)\lambda^{s+p-1}(\eta).$$

Если же $|\xi| \ge |\eta|$, то аналогично $|\mu^s(\xi) - \mu^s(\eta)| \le c\lambda(\xi - \eta)\lambda^{s+p-1}(\eta)$ и нужное соотношение следует из (4.6).

Следствие 9.1. *Пусть $r > 0$ и $0 \le s + p - 1 \le r$. Тогда для всех ξ и η верна формула*

$$|f(\xi, \eta)| \le c\lambda(\xi - \eta)\lambda^{s+p-1}(\eta) + c\lambda^{1+r}(\xi - \eta)\lambda^{s+p-1-r}(\eta). \tag{9.2}$$

Действительно, эта оценка получается из (4.10), если рассмотреть два случая. Пусть $|\xi| \le 2|\eta|$. Тогда $\lambda(\xi - \eta) \le 2\lambda(\eta)$ и соотношение (9.4) следует из (4.10). Если $|\xi| \ge 2|\eta|$, то $\lambda(\eta) \le 2\lambda(\xi - \eta)$ и снова из (4.10) получаем (9.4).

Пусть далее символом g обозначается функция

$$g(\xi, \eta) = \lambda^p(\xi)(\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta) - \lambda^s(\xi - \eta)). \tag{9.3}$$

Доказательство предложения 4.3. Пусть сначала $|\xi| \le 2|\eta|$. Тогда $\lambda(\xi) \le 2\lambda(\eta)$, $\lambda(\xi - \eta) \le 3\lambda(\eta)$ и поэтому

$$\lambda^p(\xi)|\lambda^s(\xi - \eta)| \le c\lambda^p(\xi - \eta)\lambda^{s+p-1}(\eta), \tag{9.4}$$

Кроме того, из формулы конечных приращений вытекает неравенство

$$\lambda^p(\xi)|\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta)| \le c\lambda(\xi - \eta)\lambda^{s+p-1}(\eta),$$

из которого и из (9.7) следует (4.11).

Если $|\xi| > 2|\eta|$, то $|\xi - \eta| > |\eta|$ и верна формула $\lambda(\eta) \le \lambda(\xi - \eta)$. Отсюда и из (4.6) имеем

$$\lambda^p(\xi)\lambda^s(\eta) \le c\lambda^p(\xi)\lambda^s(\xi - \eta) \le c\lambda(\eta)\lambda^{s+p-1}(\xi - \eta). \tag{9.5}$$

Снова пользуясь формулой конечных операций и формулой (4.6), получим

$$\begin{aligned}\lambda^p(\xi)|\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\xi - \eta)| &\le c\lambda(\eta)\lambda^{s+p-1}(\xi) + c\lambda(\eta)\lambda^p(\xi)\lambda^{s-1}(\eta) \\ &\le c\lambda^{s+p}(\eta) + c\lambda(\eta)\lambda^{s+p-1}(\xi - \eta) \le c\lambda(\eta)\lambda^{s+p-1}(\eta).\end{aligned}$$

Последнее выражение вместе с (9.5) завершает доказательство (4.11).

§ 10. Замена переменных

Пусть $y = X(x)$ — произвольное невырожденное отображение открытого множества Q из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$ класса C^2 и u — функция класса C^2 в Q. Введем обозначения $U = u \circ X$ и $\gamma = \det X'$. Известно, что верно равенство

$$LU = \gamma\Delta_y u \circ X = \operatorname{div}(b\nabla U) \quad \text{с матрицей } b = \gamma(X'^* X')^{-1}.$$

Пусть $PU = \sum\limits_{i,j=1}^{d} b_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$. Покажем, что справедливы формулы (8.5). В самом деле, поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial y_k} \circ X = \sum_{i=1}^{d} (X')^{-1}_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} \circ X = \sum_{i,j=1}^{d}(X')^{-1}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left((X')^{-1}_{ik}\frac{\partial U}{\partial x_i}\right),$$

прямыми вычислениями проверяется равенство

$$LU = PU - \sum_{i,j=1}^{d}\left((X')^{-1}\frac{\partial X'}{\partial x_j}b\right)_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{10.1}$$

Здесь учтены правило дифференцирования обратной матрицы

$$\frac{\partial (X')^{-1}}{\partial x_j} = -(X')^{-1}\frac{\partial X'}{\partial x_j}(X')^{-1}$$

и определение матрицы b.

Пусть $q_1, q_2, \dots, q_d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$. Поскольку $c_{ij} = q_i \cdot Cq_j$ для любой матрицы C, имеем

$$\sum_{j=1}^{d}\left((X')^{-1}\frac{\partial X'}{\partial x_j}b\right)_{ij} = (X'^*)^{-1}q_i \cdot \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial X'}{\partial x_j}bq_j = (X'^*)^{-1}q_i \cdot PY.$$

Подставляя это выражение в (10.1), получим

$$LU = PU - \sum_{i=1}^{d}(X'^*)^{-1}q_i \cdot PY\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{10.2}$$

В частности,

$$LY_m = PY_m - \sum_{i=1}^{d} q_i \cdot (X')^{-1}PY\frac{\partial Y_m}{\partial x_i}.$$

Учитывая равенства $\frac{\partial Y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial X_m}{\partial x_i} - \delta_{im}$ и

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial X_m}{\partial x_i}q_i \cdot (X')^{-1}PY = \sum_{i,j=1}^{d}(X')_{mi}(X')^{-1}_{ij}PY_j = PY_m,$$

в результате будем иметь

$$LY_m = q_m \cdot X^{-1}PY \text{ или } LY = (X')^{-1}PY.$$

Тем самым вторая формула в (8.5) доказана. Первое равенство следует из (10.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Лагранжевы приближения в теории волн // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1988. С. 10–77.
2. *Zakharov V. E.* Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1968. V. 9, N 2. P. 190–194.
3. *Крейг В., Вейн К. Е.* Математические аспекты поверхностных волн на воде // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 3. С. 96–116.
4. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
5. *Craig W., Schanz V., Sulem C.* The modulational regime of three-dimensional water waves and the Davey–Stewartson system // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 1997. V. 14, N 5. P. 615–667.
6. *Iooss G., Plotnikov P. I.* Small divisor problem in the theory of three-dimensional water gravity waves. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 200, N 940).
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. *Wu S.* Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3D // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12, N 2. P. 445–498.
9. *Lannes D.* Well-posedness of the water-waves equations // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18, N 3. P. 605–654.
10. *Leray J., Ohya Y.* Équations et systémes non-linéaires, hyperboliques not-stricts // Math. Anal. 1967. V. 170, N 3. P. 167–205.

Статья поступила 7 октября 2010 г.

Налимов Виктор Иванович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090