Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 515.12

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ВЫСОТЕ F–КОМПАКТОВ

М. А. Баранова, А. В. Иванов

Аннотация. Доказано, что для любого ординала α такого, что $0 < \alpha \leq \omega_1$ и $\alpha \neq \beta + 1$, где β — предельный ординал, существует F-компакт спектральной высоты α.

Ключевые слова: вполне замкнутое отображение, резольвента, F-компакт, спектральная высота.

Определение класса F-компактов дано в [1]. Рассмотрение этого класса мотивировано исключительной продуктивностью созданного В. В. Федорчуком метода вполне замкнутых отображений, который используется для построения контрпримеров в теории компактных пространств. В западной литературе метод В. В. Федорчука получил название метода резольвент (см. обзорную работу [2]), впоследствии это название стало использоваться и в русскоязычных статьях. Полный обзор результатов и идей метода дан в работе В. В. Федорчука [3]. Среди недавних публикаций, в которых построены примеры компактов методом резольвент, можно отметить [4–6].

Компакт X называется *F-компактом*, если X представим в виде предела вполне упорядоченного спектра с вполне замкнутыми соседними проекциями, при которых прообразы всех точек метризуемы. Этот спектр начинается с точки и является непрерывным. Наименьшая длина такого спектра называется *спектральной высотой* $sh(X)$ F-компакта X. По сути, F-компакты — это пространства, которые могут быть построены методом резольвент. Частным случаем F-компактов являются C-пространства, введенные В. В. Федорчуком [7]. Отметим, что спектральная высота всех построенных до сих пор F-компактов не превосходит ω_1. Это объясняется спецификой возможностей метода резольвент. Интерес к изучению класса F-компактов связан с определением границ применимости метода. Известно, например, что для F-компактов счетной спектральной высоты совпадают наследственное число Линделефа, наследственная плотность и наследственное число Суслина:

$$hl(X) = hd(X) = hs(X). \tag{1}$$

В то же время для F-компактов спектральной высоты ω_1 ни одно из равенств (1) не доказуемо и не опровержимо в ZFC (см. [1]). Отметим также, что в предположении $2^{\omega_0} < 2^{\omega_1}$ всякий сепарабельный наследственно нормальный F-компакт счетной спектральной высоты совершенно нормален [8].

Отмеченные выше результаты показывают, что спектральная высота $sh(X)$ является важной характеристикой F-компактов, от которой зависят их топологические свойства. В настоящей работе рассматривается вопрос о возможных значениях $sh(X)$: верно ли, что для любого ординала α существует F-компакт спектральной высоты α? Из определения F-компакта легко следует, что для

© 2013 **Баранова М. А., Иванов А. В.**

любого предельного β не существует F-компактов спектральной высоты $\beta+1$. Основным результатом работы является положительный ответ на сформулированный выше вопрос для всех α таких, что $0<\alpha\leq\omega_1$ и $\alpha\neq\beta+1$, где β — предельный ординал.

Все рассматриваемые в работе пространства предполагаются компактными и хаусдорфовыми, все отображения непрерывны. Через $f^{\#}(A)$ обозначается малый образ множества $A\subset X$ при отображении $f:X\to Y$.

Определение 1 [9]. Сюръективное отображение $f:X\to Y$ называется *вполне замкнутым*, если для любой точки $y\in Y$ и любого конечного покрытия $U_1,\dots,U_n$ слоя $f^{-1}y$ открытыми в X множествами множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n} f^{\#}U_i\cup\{y\}$ открыто в Y.

Предложение 1. *Пусть $f:X\to Y$ — вполне замкнутое отображение. Тогда открытые подмножества $U\subset X$, для которых выполняется неравенство $|f(U)\setminus f^{\#}(U)|\leq 1$, образуют базу топологии в X.*

Доказательство. Пусть $x\in X$ и O — произвольная окрестность точки x. Возьмем такую окрестность $O_1\ni x$, что $[O_1]\subset O$. Множества O и $X\setminus[O_1]$ образуют открытое покрытие X. Пусть $A=Y\setminus(f^{\#}O\cup f^{\#}(X\setminus[O_1]))$. Множество A замкнуто. Докажем, что A дискретно. Пусть $y\in A$. Множества O и $X\setminus[O_1]$ образуют открытое покрытие $f^{-1}y$. Следовательно, в силу вполне замкнутости f множество $\{y\}\cup f^{\#}O\cup f^{\#}(X\setminus[O_1])$ является окрестностью точки y, которая не содержит других точек множества A. Итак, для любой точки $y\in A$ разность $A\setminus\{y\}$ замкнута. Рассмотрим множество $U=(O_1\cup f^{-1}f^{\#}O)\setminus f^{-1}(A\setminus\{f(x)\})$. Оно открыто, содержит x и содержится в O. Кроме того, поскольку $f(O_1)\setminus A\subset f^{\#}(O)$, имеем

$$f(U)=((f(O_1)\cup f^{\#}(O))\setminus A)\cup\{f(x)\}\subset f^{\#}(O)\cup\{f(x)\}\subset f^{\#}(U)\cup\{f(x)\}.$$

С другой стороны, $\{f(x)\}\cup f^{\#}(U)\subset f(U)$. Значит, $f(U)=f^{\#}(U)\cup\{f(x)\}$, т. е. U является искомым базисным множеством. Предложение доказано.

Следующее предложение доказано в [3].

Предложение 2. *Пусть $f:X\to Y$ — вполне замкнутое отображение и F — замкнутое подмножество X. Тогда отображение $f|_F:F\to f(F)$ вполне замкнуто.*

Пусть $S=\{X_\alpha,p^\alpha_\beta:\alpha,\beta<\tau\}$ — вполне упорядоченный спектр. Для каждого предельного ординала $\gamma<\tau$ рассмотрим спектр

$$S|_\gamma=\{X_\alpha,p^\alpha_\beta:\alpha,\beta<\gamma\}$$

и положим $\overline{X}_\gamma=\lim(S|_\gamma)$. Имеется естественное отображение $\bar p_\gamma:X_\gamma\to\overline{X}_\gamma$, которое каждой точке $x\in X_\gamma$ ставит в соответствие нить $\{p^\gamma_\alpha(x):\alpha<\gamma\}$ спектра $S|_\gamma$. Вполне упорядоченный спектр $S=\{X_\alpha,p^\alpha_\beta:\alpha,\beta<\tau\}$ называется *непрерывным*, если для любого предельного $\gamma<\tau$ отображение $\bar p_\gamma$ является гомеоморфизмом.

Определение 2. Компакт X называется *F-компактом*, если существует непрерывный вполне упорядоченный обратный спектр $S=\{X_\alpha,\ p^\alpha_\beta:\alpha,\beta<\tau\}$ такой, что

(1) X_0 есть точка;

(2) все проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ вполне замкнуты, $\alpha+1<\tau$;

(3) прообразы $\left(\pi_\alpha^{\alpha+1}\right)^{-1}x$ метризуемы для всех точек $x \in X_\alpha$, $\alpha+1<\tau$;

(4) $\lim S = X$.

Наименьшая длина τ непрерывных спектров S, удовлетворяющих условиям (1)–(4), называется *спектральной высотой* $sh(X)$ F-компакта X.

Из определения 2 следует, что все пространства X_α спектра $S = \{X_\alpha,\ p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \tau\}$ сами являются F-компактами. Единственным F-компактом спектральной высоты 1 будет одноточечное пространство. F-компакты спектральной высоты 2 — это в точности неодноточечные метризуемые компакты. Классические пространства «две стрелки» и «две окружности» П. С. Александрова являются примерами F-компактов спектральной высоты 3. Соответствующее спектральное разложение длины 3 строится очевидным образом, поскольку естественные проекции этих пространств на отрезок и окружность соответственно вполне замкнуты и имеют метризуемые прообразы точек (см. [10]).

Предложение 3. *Замкнутое подмножество A F-компакта X является F-компактом, причем $sh(A) \le sh(X)$.*

Доказательство. Пусть $sh(X) = \tau$, $S = \{X_\alpha,\ p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \tau\}$ — соответствующее разложение F-компакта X в непрерывный спектр и $A \subset X$. Рассмотрим спектр

$$S_A = \left\{A_\alpha = p_\alpha(A),\ (p_A)^\alpha_\beta = \left(p^\alpha_\beta\right)\Big|_{A_\alpha} : \alpha, \beta < \tau\right\}.$$

В силу предложения 2 все проекции спектра S_A вида $(p_A)^{\alpha+1}_\alpha$ вполне замкнуты. Спектр S_A непрерывен, предел спектра S_A гомеоморфен A (см. [10, прибавление к гл. 1]). Следовательно, S_A удовлетворяет условиям (1)–(4) для компакта A. Предложение доказано.

Из известного утверждения о совпадении характера и псевдохарактера в классе компактов легко следует, что для любого F-компакта X

$$\chi(X) \le \max(|sh(X)|, \omega_0).$$

В частности, F-компакты счетной спектральной высоты имеют счетный характер.

В дальнейшем нам понадобится конструкция свободного произведения компактов, которая является частным случаем конструкции резольвенты, введенной В. В. Федорчуком (см. [3, 11]). Пусть X и Y — компакты и $y_0 \in Y$. На произведении $X \times Y$ рассмотрим топологию, открытую базу которой образуют множества вида $((U \setminus \{x\}) \times Y) \cup (\{x\} \times V)$, где U открыто в X, $x \in U$, V открыто в Y, $y_0 \in V$, и $\{x\} \times V$, где $x \in X, V$ открыто в Y и $y_0 \notin V$.

Произведение $X \times Y$ с указанной топологией называется *свободным произведением X на Y* над точкой y_0 и обозначается через $X \diamondsuit (Y, y_0)$. Отображение проектирования $p : X \diamondsuit (Y, y_0) \to X$ всегда вполне замкнуто (см. [3]). «Слой» $X \times \{y_0\}$ свободного произведения $X \diamondsuit (Y, y_0)$ гомеоморфен X. На остальных «горизонтальных слоях» $X \times \{y\}$ индуцированная топология дискретна. Все «вертикальные слои» $\{x\} \times Y$ гомеоморфны Y.

Пусть $I = [0, 1]$ — отрезок, в котором выделена точка $0 \in I$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ построим по рекурсии компакты X_α. Пусть X_0 — точка. Предположим, что для всех $\beta < \alpha$ уже построены компакты X_β и для любых β, β', связанных неравенствами $\beta' < \beta < \alpha$, определено отображение $q^\beta_{\beta'} : X_\beta \to X_{\beta'}$ так, что система пространств и отображений $T_\alpha = \{X_\beta, q^\beta_{\beta'} : \beta, \beta' < \alpha\}$ образует непрерывный обратный спектр, удовлетворяющий условиям определения 2.

Если α — предельный ординал, то положим $X_\alpha = \lim T_\alpha$, а отображения $q^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ определим как предельные проекции спектра T_α. Если $\alpha = \gamma + 1$, то $X_\alpha = X_\gamma \diamondsuit (I, 0)$, а каждое отображение $q^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ есть композиция проектирования свободного произведения X_α на сомножитель X_γ и проекции $q^\gamma_\beta : X_\gamma \to X_\beta$.

Продолжая рекурсию, получим компакты X_α и отображения q^α_β для всех $\alpha, \beta < \omega_1$. Поскольку $X_\alpha = \lim T_{\alpha+1}$ для любого α и спектр $T_{\alpha+1}$ удовлетворяет условиям определения 2, все X_α являются F-компактами и $sh(X_\alpha) \le \alpha + 1$

Теорема. *Для любого непредельного ординала $\alpha < \omega_1$ имеет место равенство $sh(X_\alpha) = \alpha + 1$.*

Доказательство. При $\alpha > 0$ компакт X_α как множество представляет собой произведение отрезков: $X_\alpha = \prod\limits_{\beta<\alpha} [0,1]_\beta$. Следовательно, всякая точка $a \in X$ является числовым набором: $a = (t_\beta : \beta < \alpha)$. Пусть $a = (t_\beta : \beta < \gamma)$ и $b = (t'_\beta : \beta < \gamma')$ — два числовых набора. Будем писать $a < b$, если $\gamma < \gamma'$ и $t_\beta = t'_\beta$ при $\beta < \gamma$.

Пусть $a = (t_\beta : \beta < \gamma)$, $\gamma < \alpha$. Положим

$$\begin{aligned} U^\gamma_a &= \{a\} \times (0,1]_\gamma \times \prod_{\gamma<\beta<\alpha} [0,1]_\beta \subset X_\alpha, \\ B^\gamma_a &= \{a\} \times (0,1]_\gamma \times \prod_{\gamma<\beta<\alpha} \{0\}_\beta \subset U^\gamma_a \subset X_\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Из определения компактов X_α следует, что множества U^γ_a открыты в X_α, а B^γ_a гомеоморфны полуинтервалу $(0,1]$. Отметим также, что базу окрестностей любой точки $x \in B^\gamma_a$ в X_α образуют открытые множества W, для которых существует открытое подмножество $V \subset (0,1]$ такое, что

$$\{a\} \times (V \setminus \{x_\gamma\})_\gamma \times \prod_{\gamma<\beta<\alpha} [0,1]_\beta \subset W \subset \{a\} \times V_\gamma \times \prod_{\gamma<\beta<\alpha} [0,1]_\beta, \tag{3}$$

где x_γ — γ-координата точки $x, x_\gamma \in V$.

Предположим теперь, что $X_\alpha = \lim S$, где $S = \{Y_\beta,\ p^\beta_{\beta'} : \beta, \beta' < \tau\}$ — обратный спектр, удовлетворяющий условиям определения 2. Через $p_\beta : X_\alpha \to Y_\beta$ будем обозначать предельные проекции спектра S. Докажем, что $\tau \ge \alpha + 1$. Предположим противное.

Лемма. *Пусть $y \in Y_\beta (\beta < \tau)$ и $\left|p^{-1}_\beta(y) \cap B^\gamma_a\right| > \omega_0$, где $a = (t_\delta : \delta < \gamma)$, $\gamma < \alpha$. Тогда существует $a' = (t_\delta : \delta < \gamma + 1) > a$ такое, что $U^{\gamma+1}_{a'} \subset p^{-1}_\beta(y)$ и $p^{\#}_{\beta+1} U^{\gamma+1}_{a'} = \varnothing$.*

Доказательство леммы. По предположению $\tau < \alpha + 1$, следовательно, $sh(Y_\beta) < \alpha + 1 < \omega_1$, и, значит, характер Y_β счетен. Стало быть, $p^{-1}_\beta(y) = \bigcap E_n$, где E_n открыты в X_α. Пусть $x = (x_\delta : \delta < \alpha) \in p^{-1}_\beta(y) \cap B^\gamma_a$. Фиксируем n. Возьмем окрестность W_x точки x, которая удовлетворяет включениям (3) для некоторого открытого $V_x \subset (0,1]$ и содержится в E_n. Из покрытия $\{W_x\}$ множества $p^{-1}_\beta(y) \cap B^\gamma_a$ выделим счетное подпокрытие $\{W_{x_i}\}$. Объединение $O_n = \bigcup\limits_i W_{x_i}$ элементов этого подпокрытия содержится в E_n. Пусть a' удовлетворяет включению

$$\{a'\} \times \prod_{\gamma<\beta<\alpha} \{0\}_\beta \subset p^{-1}_\beta(y) \cap B^\gamma_a. \tag{4}$$

Это означает, что $a' = (t_\delta : \delta < \gamma + 1)$, где $(t_\delta : \delta < \gamma) = a$ и $t_\gamma = x_\gamma$ для некоторого $x = (x_\delta : \delta < \alpha) \in p_\beta^{-1}(y) \cap B_\alpha^\gamma$. В силу включений (3), которым удовлетворяют множества W_{x_i}, получаем, что при $t_\gamma \neq (x_i)_\gamma$, $i \in N$, имеет место включение $U_{a'}^{\gamma+1} \subset O_n$. Таким образом, почти все множества $U_{a'}^{\gamma+1}$, где a' удовлетворяет (4), содержатся в O_n («почти все» означает все, кроме, быть может, счетного множества). Проделав описанную выше процедуру для каждого n, получим, что почти все множества $U_{a'}^{\gamma+1}$, где a' удовлетворяет включению (4), содержатся в $p_\beta^{-1}(y)$. Обозначим множество индексов a', удовлетворяющих (4), для которых $U_{a'}^{\gamma+1} \subset p_\beta^{-1}(y)$, через A. Множество A несчетно. Семейство $\bigl\{p_{\beta+1}^{\#}\bigl(U_{a'}^{\gamma+1}\bigr) : a' \in A\bigr\}$ является несчетным семейством попарно не пересекающихся открытых подмножеств метризуемого компакта $\bigl(p_\beta^{\beta+1}\bigr)^{-1}(y)$. Следовательно, в этом семействе найдется пустое множество $p_{\beta+1}^{\#}\bigl(U_{a'}^{\gamma+1}\bigr)$. Соответствующее $U_{a'}^{\gamma+1}$ является искомым. Лемма доказана.

Построим по рекурсии сохраняющее порядок отображение $f : \{\delta : 0 < \delta < \alpha + 1\} \to \{\beta : 0 < \beta < \tau\}$. Отсюда будет следовать, что $\tau \geq \alpha + 1$. Пусть y_0 — единственная точка пространства Y_0. Для точки $y_0 \in Y_0$ и множества B^1 (см. (2), при $\gamma = 1$ нижний индекс у множества B отсутствует) выполнены условия леммы. Следовательно, существует $U_{a_1}^2$ такое, что $p_1^{\#}\bigl(U_{a_1}^2\bigr) = \varnothing$. Положим $f(1) = \gamma_1 = 1$.

Предположим, что для всех $\beta : 1 \leq \beta < \xi \leq \alpha$ определены значения $f(\beta) = \gamma_\beta$, где γ_β — непредельный ординал, выбраны точки $y_{\gamma_\beta - 1} \in Y_{\gamma_\beta - 1}$ и множества $U_{a_\beta}^{\beta+1}$ так, что

1) $\gamma_\beta < \gamma_{\beta'}$, $a_\beta < a_{\beta'}$, $p_{\gamma_\beta - 1}^{\gamma_{\beta'} - 1}(y_{\gamma_{\beta'} - 1}) = y_{\gamma_\beta - 1}$ при $\beta < \beta' < \xi$;
2) $U_{a_\beta}^{\beta+1} \subset p_{\gamma_\beta - 1}^{-1}(y_{\gamma_\beta - 1})$;
3) $p_{\gamma_\beta}^{\#}\bigl(U_{a_\beta}^{\beta+1}\bigr) = \varnothing$.

Пусть ординал ξ изолированный, т. е. $\xi = \delta + 1$. Положим

$$A_\xi = \bigl\{\beta : p_\beta^{\#}\bigl(U_{a_\delta}^\xi\bigr) \cap p_\beta\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr) \neq \varnothing\bigr\}.$$

Поскольку $B_{a_\delta}^\xi \subset U_{a_\delta}^\xi$, для любой точки $x \in B_{a_\delta}^\xi$ существует $\beta < \tau$ такое, что $p_\beta(x) \in p_\beta^{\#}\bigl(U_{a_\delta}^\xi\bigr)$. Следовательно, множество A_ξ непусто.

Пусть γ_ξ — наименьший элемент A_ξ. В силу условия 3 (для $\beta = \delta$) $\gamma_\xi > \gamma_\delta$. Ввиду непрерывности спектра S γ_ξ является непредельным ординалом. Положим $f(\xi) = \gamma_\xi$. Если $\xi = \alpha$, то построение на этом заканчивается. Если $\xi < \alpha$, то проведем построение точки $y_{\gamma_\xi - 1} \in Y_{\gamma_\xi - 1}$ и множества $U_{a_\xi}^{\xi+1}$.

Если $\bigl|p_{\gamma_\xi}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)\bigr| = 1$, то обозначим через $y_{\gamma_\xi - 1}$ единственную точку множества $p_{\gamma_\xi - 1}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)$. Если $\bigl|p_{\gamma_\xi}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)\bigr| > 1$, то $\bigl|p_{\gamma_\xi}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)\bigr| = c$. В силу свойств спектра S и предложения 1 для любой точки $y \in p_{\gamma_\xi}^{\#}\bigl(U_{a_\delta}^\xi\bigr) \cap p_{\gamma_\xi}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)$ существует окрестность $Oy \subset p_{\gamma_\xi}^{\#}\bigl(U_{a_\delta}^\xi\bigr)$ такая, что $\bigl|p_{\gamma_\xi - 1}^{\gamma_\xi}(Oy) \setminus \bigl(p_{\gamma_\xi - 1}^{\gamma_\xi}\bigr)^{\#}(Oy)\bigr| \leq 1$. Стало быть, $\bigl|p_{\gamma_\xi - 1}^{\gamma_\xi}\bigl(Oy \cap p_{\gamma_\xi}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)\bigr)\bigr| = 1$. Пусть $y_{\gamma_\xi - 1}$ — единственная точка множества $p_{\gamma_\xi - 1}^{\gamma_\xi}\bigl(Oy \cap p_{\gamma_\xi}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)\bigr)$. Поскольку $Oy \cap p_{\gamma_\xi}\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)$ несчетно, для точки $y_{\gamma_\xi - 1}$ и множества $\bigl(B_{a_\delta}^\xi\bigr)$ выполняются условия леммы. Следовательно, существует $a_\xi > a_\delta$ такое, что $U_{a_\xi}^{\xi+1} \subset (p_{\gamma_\xi - 1})^{-1}(y_{\gamma_\xi - 1})$ и $p_{\gamma_\xi}^{\#}\bigl(U_{a_\xi}^{\xi+1}\bigr) = \varnothing$.

Пусть ξ — предельный ординал. Положим

$$a = \bigcup_{0 < \beta < \xi} a_\beta = (t_\beta : \beta < \xi)$$

и рассмотрим множество U_a^ξ. Мощность этого множества равна c. В силу условия 2

$$U_a^\xi \subset \bigcap_{0<\beta<\xi} p_{\gamma_\beta-1}^{-1}(y_{\gamma_\beta-1}). \tag{5}$$

Следовательно, $\sup(\gamma_\beta : \beta < \xi) = \gamma < \tau$. Множество $\bigcap\limits_{0<\beta<\xi} \left(p_{\gamma_\beta-1}^{\gamma}\right)^{-1}(y_{\gamma_\beta-1})$ состоит из одной точки, которую обозначим через y_γ. В силу (5) имеем $p_\gamma^{-1}(y_\gamma) \supset U_a^\xi \supset B_a^\xi$. Тем самым $\gamma+1 < \tau$. Положим $f(\xi) = \gamma_\xi = \gamma+1$. Для точки $y_{\gamma_\xi-1} = y_\gamma$ и множества B_a^ξ выполнены условия леммы. Значит, существует $a_\xi > a$ такое, что $p_{\gamma_\xi}^{\#}\big(U_{a_\xi}^{\xi+1}\big) = \varnothing$.

Рекурсия идет дальше. Теорема доказана.

Следствие. *Для любого ординала α такого, что $0 < \alpha \le \omega_1$ и $\alpha \ne \beta+1$, где β — предельный ординал, существует F-компакт спектральной высоты α.*

Доказательство. Для непредельных α утверждение следствия содержится в теореме. Если α — предельный ординал, то рассмотрим спектр $X_\alpha = \lim\left\{X_\beta,\ q_\beta^{\beta'} : \beta, \beta' < \alpha\right\}$. Тогда $sh(X_\alpha) \le \alpha$. В то же время для каждого непредельного $\beta < \alpha$ компакт X_α содержит в качестве замкнутого подмножества X_β. В силу предложения 3 и теоремы получаем $sh(X_\beta) = \beta+1 \le sh(X_\alpha) \le \alpha$ для всех $\beta < \alpha$ таких, что $\beta \ne \gamma+1$, где γ предельное. Значит, $sh(X_\alpha) = \alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов А. В.* О бикомпактах Федорчука // Отображения и функторы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 31–40.
2. *Watson S.* The construction of topological spaces: Planks and resolutions // Recent progress in general topology. Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 673–757.
3. *Федорчук В. В.* Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фунд. прикл. математика. 2003. Т. 9, № 4. С. 105–236.
4. *Иванов А. В., Кашуба Е. В.* О наследственной нормальности пространств вида $\mathscr{F}(X)$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 813–824.
5. *Иванов А. В., Осипов Е. В.* Степень дискретной порожденности компактов // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 3. С. 396–402.
6. *Ivanov A. V.* A Generalization of Gruenhage's example // Topol. Appl. 2010. V. 157, N 3. P. 517–525.
7. *Fedorchuk V. V.* Fully closed maps, scannable spectra and cardinality of hereditarily separable spaces // Gen. Topol. Appl. 1979. V. 10, N 3. P. 247–274.
8. *Иванов А. В.* О наследственной нормальности F-бикомпактов // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 4. С. 606–611.
9. *Федорчук В. В.* О бикомпактах с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 2. С. 275–277.
10. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
11. *Федорчук В. В.* Бикомпакт, все бесконечные замкнутые подмножества которого n-мерны // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 1. С. 41–62.

Статья поступила 19 марта 2012 г.

Баранова Мария Александровна
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Воробьевы горы, 119899 Москва В-234,
mashanyshka@inbox.ru

Иванов Александр Владимирович
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
ivanov@petrsu.ru