Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 517.54

СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ И В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ n–ГО ПОРЯДКА

Э. Г. Кирьяцкий, Е. Э. Кирьяцкий

Аннотация. Изучаются различные свойства аналитических в полуплоскости и в круге функций с отличной от нуля разделенной разностью n-го порядка. Особое внимание уделяется оценкам тейлоровских коэффициентов разложения.

Ключевые слова: аналитическая функция, единичный круг, полуплоскость, родственные функции, разделенная разность, коэффициенты Тейлора.

Пусть $A(D)$ — класс аналитических в односвязной области D функций. Разделенную разность n-го порядка функции $f(z)$ из класса $A(D)$ определим следующей рекуррентной формулой [1]:

$$[f(\zeta);\zeta_0,\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1},\zeta_n] = \frac{[f(\zeta);\zeta_0,\dots,\zeta_{n-1}] - [f(\zeta);\zeta_1,\dots,\zeta_n]}{\zeta_0-\zeta_n},$$

$$[f(\zeta);\zeta_0] = f(\zeta_0), \quad [f(\zeta);\zeta_0,\zeta_1] = \frac{f(\zeta_0)-f(\zeta_1)}{\zeta_0-\zeta_1},$$

где $\zeta_0,\dots,\zeta_n$ — попарно различные точки области D. Разделенную разность n-го порядка функции $f(z)$ из класса $A(D)$ для попарно различных $\zeta_0,\dots,\zeta_n$ можно определить также формулой [2]

$$[f(\zeta);\zeta_0,\dots,\zeta_n] = \sum_{m=0}^{n}\frac{f(\zeta_m)}{\eta_n'(\zeta_m)}, \quad \eta_n(\zeta) = \prod_{p=0}^{n}(\zeta-\zeta_m). \tag{1}$$

Замечание 1. Разделенная разность n-го порядка функции $f(\zeta)$ из класса $A(D)$ является аналитической в области D по любому из своих аргументов при фиксированных остальных. Это позволяет доопределить разделенную разность тогда, когда среди точек $\zeta_0,\dots,\zeta_n$ есть совпадающие между собой. Например, если $\zeta_0=\zeta_1$, то полагаем $[f(\zeta);\zeta_0,\zeta_0]=f'(\zeta_0)$. Вообще, если точки $\zeta_0,\dots,\zeta_s\in D$ попарно различны, то положим [3]

$$[f(\zeta);\underbrace{\zeta_0,\dots,\zeta_0}_{p_0},\dots,\underbrace{\zeta_s,\dots,\zeta_s}_{p_s}] = \frac{1}{(p_0-1)!\dots(p_s-1)!}\,\frac{\partial^{n-s}[f(\zeta);\zeta_0,\dots,\zeta_s]}{\partial\zeta_0^{p_0-1}\dots\partial\zeta_s^{p_s-1}}, \tag{2}$$

где $p_0+\dots+p_s=n+1$.

В связи с этим замечанием для разделенной разности условимся сохранять прежнее обозначение $[f(\zeta);\zeta_0,\dots,\zeta_n]$, не исключая случая, когда среди точек $\zeta_0,\dots,\zeta_n$ могут быть совпадающие между собой точки.

Следующие элементарные свойства разделенных разностей хорошо известны [2].

Свойство 1. *Если* $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ *— аналитические в области* D *функции и* c_1, c_2 *— комплексные числа, то для любых* $\zeta_0, \dots, \zeta_n \in D$ *справедливо равенство*

$$[c_1 f(\zeta) + c_2 f_2(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n] = c_1[f_1(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n] + c_2[f_2(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n].$$

Свойство 2. *Если* $P_{n-1}(\zeta)$ *— полином степени не выше* $n-1$, *то*

$$[P_{n-1}(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n] \equiv 0.$$

Свойство 3. *Если* $\zeta_0 = \dots = \zeta_n = \zeta$, *то*

$$[f(\zeta); \underbrace{\zeta, \dots, \zeta}_{n+1}] = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.$$

Отметим еще одно свойство разделенной разности n-го порядка, установленное в [4].

Свойство 4. *Если* $[f(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n] \neq 0$ *для любых попарно различных* $\zeta_0, \dots, \zeta_n \in D$, *то* $[f(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n] \neq 0$ *для любых* $\zeta_0, \dots, \zeta_n \in D$.

Обозначим через $K_n(D)$ класс аналитических в области D функций $f(\zeta)$, у которых $[f(\zeta); \zeta_0, \dots, \zeta_n] \neq 0$ для любых попарно различных $\zeta_0, \dots, \zeta_n \in D$. Функции из класса $K_n(D)$ обладают многими замечательными свойствами, которые подробно изучены в [5]. Заметим, что класс $K_1(D)$ полностью совпадает с классом однолистных в области D функций. Естественно, что многие результаты, полученные в классе $K_n(D), n > 1$, аналогичны результатам, полученным в классе однолистных в области D функций. Например, нам понадобится

Свойство 5. *Если* $f(\zeta) \in K_n(D)$, *то* $f^{(n)}(\zeta) \neq 0$ *для любого* $\zeta \in D$.

Это свойство обобщает тот известный факт, что производная однолистной в области D функции отлична от нуля в этой области. Пусть E — единичный круг $|\omega| < 1$ и Π — полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > 0$. Дробно-линейные функции

$$z = \frac{1+\omega}{1-\omega}, \quad \omega = \frac{z-1}{1+z} \tag{3}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между единичным кругом E и полуплоскостью Π. Следующие две леммы показывают, как меняется разделенная разность в случае дробно-линейного преобразования ее аргументов.

Лемма 1. *Пусть* $F(z) \in A(\Pi)$ *и функция*

$$z = \frac{\omega+1}{1-\omega}$$

отображает единичный круг E *на полуплоскость* Π. *Пусть также*

$$z_k = \frac{\omega_k+1}{1-\omega_k}, \quad \omega_k \in E, \ z_k \in \Pi, \ k = 0, \dots, p,$$

где $p \geq 0$. *Тогда*

$$[F(z); z_0, \dots, z_p] = \frac{1}{2^p} \prod_{k=0}^{p} (1-\omega_k) \cdot \left[(1-\omega)^{p-1} F\left(\frac{\omega+1}{1-\omega}\right); \omega_0, \dots, \omega_p \right]. \tag{4}$$

Доказательство. Сначала предполагаем, что точки ω_m, $m = 0, 1, \ldots, p$, попарно различны. Тогда точки z_m, $m = 0, 1, \ldots, p$, также попарно различные. Заметим, что

$$z_m - z_k = \frac{(\omega_m - \omega_k)}{(1-\omega_m)(1-\omega_k)}.$$

Для первых производных функций

$$\eta_p(\omega) = \prod_{k=0}^{p} (\omega - \omega_k), \quad \eta_p^*(z) = \prod_{k=0}^{p} (z - z_k)$$

имеем

$$\eta_p'(\omega_m) = \prod_{k=0,\, k\neq m}^{p} (\omega_m - \omega_k), \quad \eta_p^{*\prime}(z_m) = \prod_{k=0,\, k\neq m}^{p} (z_m - z_k).$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^p}(1-\omega_m)^{p-1}\eta_p^{*\prime}(z_m)\prod_{k=0}^{p}(1-\omega_k)& \\
= \frac{1}{2^p}(1-\omega_m)^{p-1}\prod_{k=0,\, k\neq m}^{p}(z_m - z_k)\prod_{k=0}^{p}(1-\omega_k)& \\
= \frac{1}{2^p}\prod_{k=0}^{p}(1-\omega_k)(1-\omega_m)^{p-1}\frac{2^p}{(1-\omega_m)^p}\prod_{k=0,\, k\neq m}^{p}\frac{\omega_m-\omega_k}{1-\omega_k}& \\
= \prod_{k=0,\, k\neq m}^{p}(\omega_m - \omega_k) = {\eta_p}'(\omega_m).&
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\eta_p^{*\prime}(z_m)} = \frac{\frac{1}{2^p}\prod\limits_{k=0}^{p}(1-\omega_k)(1-\omega_m)^{p-1}}{\eta_p'(\omega_m)}. \tag{5}$$

Пользуясь формулой (1) для попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in \Pi$ и равенством (5), получим

$$\begin{aligned}
[F(z); z_0, \ldots, z_p] &= \sum_{m=0}^{p}\frac{F(z_m)}{\eta_p^{*\prime}(z_m)} \\
&= \frac{1}{2^p}\prod_{k=0}^{p}(1-\omega_k)\sum_{m=0}^{p}\frac{(1-\omega_m)^{p-1}F\left(\frac{\omega_m+1}{1-\omega_m}\right)}{\eta_p'(z_m)} \\
&= \frac{1}{2^p}\prod_{k=0}^{p}(1-\omega_k)\left[(1-\omega)^{p-1}F\left(\frac{\omega+1}{1-\omega}\right); \omega_0, \ldots, \omega_p\right].
\end{aligned}$$

Пусть теперь среди $z_0, \ldots, z_n \in \Pi$ имеются совпадающие между собой точки. Тогда соответствующие им точки $\omega_0, \ldots, \omega_n$ также совпадают между собой. Воспользовавшись замечанием 1, убедимся в том, что лемма 1 справедлива и тогда, когда среди $z_0, \ldots, z_n \in \Pi$ есть совпадающие между собой точки.

Лемма 2. *Пусть* $G(\omega) \in A(E)$ *и функция* $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ *отображает полуплоскость* Π *на единичный круг* E. *Пусть также*

$$\omega_k = \frac{z_k - 1}{z_k + 1}, \quad z_k \in \Pi,\ \omega_k \in E,\ k = 0, \ldots, p,\ p \geq 0.$$

Тогда

$$[G(\omega); \omega_0, \ldots, \omega_p] = \frac{1}{2^n} \prod_{k=0}^{p} (z_k + 1) \cdot \left[(z+1)^{p-1} G\left(\frac{z-1}{z+1} \right); z_0, \ldots, z_p \right]. \quad (6)$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Замечание 2. В случае совпадения точек в леммах 1, 2 можно записать равенства (4) и (6) в более общей форме, если применить формулу (2).

Пусть $K_n(E)$ — класс аналитических в единичном круге E функций, у которых $[G(\omega); \omega_0, \ldots, \omega_n] \neq 0$ для любых попарно различных $\omega_0, \ldots, \omega_n \in E$.

Пусть $K_n(\Pi)$ — класс аналитических в полуплоскости Π функций, у которых $[F(z); z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ для любых попарно различных $z_0, \ldots, z_n \in \Pi$. Опираясь на свойства 1–5, в классах $K_n(E)$, $K_n(\Pi)$ можно выделить подклассы $\widetilde{K}_n(E)$, $\widetilde{K}_n(\Pi)$ функций, представимых соответственно в виде

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,n} \omega^{n+k},\ b_{1,n} = 1, \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n} (z-1)^{n+k},\ a_{1,n} = 1.$$

Функции $G(\omega)$, $F(z)$ будем называть *n-нормированными* соответственно в круге E и полуплоскости Π. Связь между введенными классами $\widetilde{K}_n(E)$ и $\widetilde{K}_n(\Pi)$ устанавливается с помощью следующей леммы.

Лемма 3. *Если* $G(\omega) \in \widetilde{K}_n(E)$, *то*

$$F(z) = 2(z+1)^{n-1} G\left(\frac{z-1}{z+1} \right) \in \widetilde{K}_n(\Pi). \quad (7)$$

Если $F(z) \in \widetilde{K}_n(\Pi)$, *то*

$$G(\omega) = \frac{1}{2^n} (1-\omega)^{n-1} F\left(\frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \in \widetilde{K}_n(E). \quad (8)$$

Доказательство. Согласно леммам 1, 2 если функция $G(\omega)$ принадлежит классу $\widetilde{K}_n(E)$, то $F(z)$ принадлежит классу $K_n(\Pi)$, и если функция $F(z)$ принадлежит классу $\widetilde{K}_n(\Pi)$, то $G(\omega)$ принадлежит классу $K_n(E)$. Нетрудно убедиться в том, что из n-нормированности одной функции вытекает n-нормированность другой функции. Функции $F(z)$, $G(\omega)$, связанные между собой дробно-линейными преобразованиями (3) и определенные формулами (7), (8), назовем *родственными*. Легко понять, что между родственными функциями можно установить взаимно однозначное соответствие. В дальнейшем предстоит изучать свойства этих функций. Основное внимание будем уделять коэффициентам родственных функций. На первый взгляд может показаться, что, зная достаточно хорошо поведение коэффициентов функций из класса $\widetilde{K}_n(E)$, можно также получить достаточно полную информацию о поведении коэффициентов функций из класса $\widetilde{K}_n(\Pi)$. В некоторых случаях это действительно так, но в общем случае простой перенос результатов из одного класса в другой приводит к значительным трудностям. На этот счет имеется много примеров. Приведем один частный пример, когда $n = 1$. Областью значений функционала $b_{k+1,1}(G)$ на классе $\widetilde{K}_n(E)$ является круг $|\omega| \leq k+1$. Этот результат получен совсем недавно американским математиком Бранжем (см. [6]). Тем самым была решена знаменитая гипотеза Бибербаха о коэффициентах однолистных функций. Однако нахождение, например, области значений соответствующего функционала

$$a_{p+1,1} = \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+k} C_p^k b_{k+1,1}(G)$$

является более трудной задачей.

В следующей теореме устанавливается зависимость между тейлоровскими коэффициентами родственных функций.

Теорема 1. *Пусть $F(z) \in \widetilde{K}_n(\Pi)$ и $G(\omega) \in \widetilde{K}_n(E)$. Тогда*

$$\frac{F^{(n+k)}(z)}{(n+k)!} = \frac{1}{2^k}(1-\omega)^{n+k+1} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k+m} C_k^m (1-\omega)^m \frac{G^{(n+m)}(\omega)}{(n+m)!}. \tag{9}$$

В частности,

$$\frac{F^{(n)}(z)}{n!} = (1-\omega)^{n+1} \frac{G^{(n)}(\omega)}{n!}.$$

Доказательство. Заменяя в лемме 1 n на $n+k$, где $k \geq 0$, получим

$$[F(z); z_0, \ldots, z_{n+k}] = \frac{1}{2^{n+k}} \prod_{m=0}^{n+k} (1-\omega_m) \left[(1-\omega)^{n+k-1} F\left(\frac{\omega+1}{1-\omega} \right); \omega_0, \ldots, \omega_{n+k} \right]. \tag{10}$$

Пользуясь (7), перепишем равенство (10) следующим образом:

$$[F(z); z_0, \ldots, z_{n+k}] = \frac{1}{2^k} \prod_{m=0}^{n+k} (1-\omega_m) [(1-\omega)^k G(\omega); \omega_0, \ldots, \omega_{n+k}]. \tag{11}$$

Если в (11) взять аргументы $z_0, \ldots, z_{n+k}$ равными между собой, например положить $z_0 = \cdots = z_{n+k} = z$, то $\omega_0 = \cdots = \omega_{n+k} = \omega$. Тогда (11) записывается в виде

$$\frac{F^{(n+k)}(z)}{(n+k)!} = \frac{1}{2^k} (1-\omega)^{n+k+1} \frac{((1-\omega)^k G(\omega))^{(n+k)}}{(n+k)!}. \tag{12}$$

Но легко убедиться в том, что

$$\frac{((1-\omega)^k G(\omega))^{(n+k)}}{(n+k)!} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k+m} C_k^m (1-\omega)^m \frac{G^{(n+m)}(\omega)}{(n+m)!}.$$

Учитывая (12) и последнее равенство, получим (9).

Следствие 1. *Пусть $F(z) \in \widetilde{K}_n(\Pi)$, $G(\omega) \in \widetilde{K}_n(E)$ и*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n} (z-1)^{n+k}, \ a_{1,n} = 1, \quad G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,p} \omega^{n+k}, \ b_{1,n} = 1.$$

Тогда

$$a_{k+1,n} = \frac{1}{2^k} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k+m} C_k^m b_{m+1,n}. \tag{13}$$

В самом деле, полагая в (9) $z_0 = \cdots = z_{n+k} = 1$ и $\omega_0 = \cdots = \omega_{n+k} = 0$, убедимся в справедливости формулы (13).

Теорема 2. *Пусть* $F(z) \in \widetilde{K}_n(\Pi)$ *и* $G(\omega) \in \widetilde{K}_n(E)$. *Тогда*

$$\frac{G^{(n+k)}(\omega)}{(n+k)!} = \frac{1}{2^{n+k+1}}(z+1)^{n+k+1}\sum_{m=0}^{k} C_k^m (z+1)^m \frac{F^{(n+m)}(z)}{(n+m)!}. \tag{14}$$

В частности,

$$\frac{G^{(n)}(\omega)}{n!} = \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^{n+1}\frac{F^{(n)}(z)}{n!}.$$

Доказательство. Заменяя в лемме 2 n на $n+k$, где $k \geq 0$, получим

$$[G(\omega); \omega_0, \dots, \omega_{n+k}] = \frac{1}{2^{n+k}}\prod_{m=0}^{n+k}(z_m+1) \cdot \left[(z+1)^{n+k-1} G\left(\frac{z-1}{z+1}\right); z_0, \dots, z_{n+k}\right]. \tag{15}$$

Пользуясь (7), перепишем равенство (15) следующим образом:

$$[G(\omega); \omega_0, \dots, \omega_{n+k}] = \frac{1}{2^{n+k+1}}\prod_{m=0}^{n+k}(z_m+1) \cdot [(z+1)^k F(z); z_0, \dots, z_{n+k}]. \tag{16}$$

Если в (16) взять аргументы $z_0, \dots, z_{n+k}$ равными между собой, например положить $z_0 = \dots = z_{n+k} = z$, то $\omega_0 = \dots = \omega_{n+k} = \omega$. Тогда (16) записывается в виде

$$\frac{G^{(n+k)}(\omega)}{(n+k)!} = \frac{1}{2^{n+k+1}}(z+1)^{n+k+1}\frac{((z+1)^k F(z))^{(n+k)}}{(n+k)!}. \tag{17}$$

Но легко убедиться в том, что

$$\frac{((z+1)^k F(z))^{(n+k)}}{(n+k)!} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m (z+1)^m \frac{G^{(n+m)}(\omega)}{(n+m)!}.$$

Учитывая (17) и последнее равенство, получим (14).

Следствие 2. *Пусть* $F(z) \in \widetilde{K}_n(\Pi)$, $G(\omega) \in \widetilde{K}_n(E)$ *и*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n}(z-1)^{n+k},\ a_{1,n} = 1, \quad G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,p}\omega^{n+k},\ b_{1,n} = 1.$$

Тогда

$$b_{k+1,n} = \sum_{m=0}^{k} 2^m C_k^m a_{m+1,n}. \tag{18}$$

В самом деле, полагая в (14) $F(z) \in \widetilde{K}_n(\Pi)$ и $G(\omega) \in \widetilde{K}_n(E)$, убедимся в справедливости следствия 2. Оценим коэффициенты функции $F(z)$, опираясь на оценки коэффициентов родственной функции $G(\omega)$. Нам понадобятся комбинаторные равенства, доказательства которых не представляют особого труда.

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k k = p2^{p-1},\ p = 1, 2, 3, \dots, \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k 2^k C_p^k k = (-1)^p 2p,\ p = 1, 2, 3, \dots. \tag{19}$$

Лемма 5. *Для того чтобы функция* [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+bk)\omega^{n+k}$$

принадлежала классу $\widetilde{K}_n(E)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $\left|b-\frac{1}{n+1}\right|\le\frac{1}{n+1}$.

Теорема 3. *Пусть*

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1,n}(z-1)^{n+k}\in\widetilde{K}_n(\Pi)\quad \text{и}\quad G(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+1,n}\omega^{n+k}\in\widetilde{K}_n(E)$$

и для коэффициентов функции $G(\omega)$ *выполняются неравенства*

$$|b_{k+1,n}|\le 1+|b|k,\quad k=1,2,\dots,(p-1). \tag{20}$$

Тогда

$$\left|a_{p,n}-\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^{k}\sum_{j=0}^{k}2^{j}C_{k}^{j}a_{j+1,n}\right| \le\frac{|b|(p-1)+2}{2}-\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}C_{p-1}^{k}(1+|b|k), \tag{21}$$

где $a_{1,n}=1$, $0\le m\le p-2$, $p=2,3,\dots$.

Для того чтобы при некоторых m_0 *и* p_0, $0\le m_0\le p_0-2$, *в* (21) *имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы*

$$b_{k+1,n}=(-1)^{k}(1+|b|k)e^{i\varphi},\quad 0\le\varphi\le2\pi,\ k=(m_0+1),\dots,(p_0-1). \tag{22}$$

Доказательство. Согласно следствию 1 коэффициенты функций $G(\omega)$ и $F(z)$ связаны формулой

$$a_{p,n}=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^{k}b_{k+1,n},\quad p=2,3,\dots. \tag{23}$$

Отсюда для любого $p\ge2$ и любого m с условием $0\le m\le p-2$ получаем

$$a_{p,n}-\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^{k}b_{k+1,n}=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=m+1}^{p-1}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^{k}b_{k+1,n}. \tag{24}$$

Учитывая формулу (18) из следствия 2 и условие (20), из (24) имеем

$$\left|a_{p,n}-\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^{k}\sum_{j=0}^{k}2^{j}C_{k}^{j}a_{j+1,n}\right|\le\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=m+1}^{p-1}C_{p-1}^{k}(1+|b|k).$$

Используя комбинаторное равенство (19), приходим к неравенству (21).

Обсудим возможности достижения равенства в (21). Установим необходимость. Пусть для некоторых m_0 и p_0, $0\le m_0\le p_0-2$, в (21) имеет место равенство, т. е.

$$\left|a_{p_0,n}-\frac{1}{2^{p_0-1}}\sum_{k=0}^{m_0}(-1)^{p_0-1+k}C_{p_0-1}^{k}\sum_{j=0}^{k}2^{j}C_{k}^{j}a_{j+1,n}\right| =\frac{|b|(p_0-1)+2}{2}-\frac{1}{2^{p_0-1}}\sum_{k=0}^{m_0}C_{p_0-1}^{k}(1+|b|k).$$

Учитывая формулы (18), (23) и (24), можно записать

$$\left|\sum_{k=m_0+1}^{p_0-1}(-1)^{p_0-1+k}C_{p_0-1}^k b_{k+1,n}\right| = \sum_{k=m_0+1}^{p_0-1}C_{p_0-1}^k(1+|b|k). \tag{25}$$

Изучая равенство (25), с учетом (20) легко заключить, что $b_{k+1,n}$ имеет вид (22). Чтобы установить достаточность, надо записать $b_{k+1,n}$ в виде (22) и подставить в (21). Тогда убедимся в том, что равенство в (21) действительно имеет место.

Из теоремы 3 можно получить несколько следствий.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $m = 0$. *Тогда*

$$\left|a_{p,n} - \frac{(-1)^{p-1}}{2^{p-1}}\right| \le \frac{|b|(p-1)+2}{2} - \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Для того чтобы при некотором p_0, $p_0 \ge 2$, *в* (21) *имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы*

$$b_{k+1,n} = (-1)^k(1+|b|k)e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ k = 1,\dots,p_0-1.$$

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $m = p-2$. *Тогда*

$$\left|a_{p,n} - \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^k\sum_{j=0}^{k}2^jC_k^ja_{j+1,n}\right| \le \frac{|b|(p-1)+1}{2^{p-1}}.$$

Для того чтобы при некотором p_0, $p_0 \ge 2$, *в* (21) *имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы*

$$b_{k+1,n} = (-1)^k(1+|b|k)e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ k = 1,\dots,p_0-2.$$

Следствие 5. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1,n}(z-1)^{n+k} \in \widetilde{K}_n(\Pi) \quad \text{и} \quad G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}b_{k+1,n}\omega^{n+k} \in \widetilde{K}_n(E).$$

Если для коэффициентов функции $G(\omega)$ *имеют место неравенства*

$$|b_{k+1,n}| \le 1 + \frac{2}{n+1}k, \quad k = 1,2,\dots,p-1,$$

то

$$\left|a_{p,n} - \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^k\sum_{j=0}^{k}2^jC_k^ja_{j+1,n}\right| \le \frac{p+n}{n+1} - \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}C_{p-1}^k\left(1+\frac{2k}{n+1}\right), \tag{26}$$

где $a_{1,n} = 1$, $0 \le m \le p-2$, $p = 2,3,\dots$. *Для того чтобы при некоторых* m_0 *и* p_0, $0 \le m_0 \le p_0-2$, *в* (26) *имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы*

$$b_{k+1,n} = (-1)^k\left(1+\frac{2k}{n+1}\right)e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ k = m_0+1,\dots,p_0-1.$$

Следствие 6. *Пусть*

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1,n}(z-1)^{n+k}\in\widetilde{K}_n(\Pi)\quad \text{и}\quad G(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+1,n}\omega^{n+k}\in\widetilde{K}_n(E).$$

Если для коэффициентов функции $G(\omega)$ имеют место неравенства

$$|b_{k+1,n}|\le 1,\quad k=1,2,3,\dots,$$

то

$$\left|a_{p,n}-\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{p-1+k}C_{p-1}^{k}\sum_{j=0}^{k}2^jC_k^ja_{j+1,n}\right|\le 1-\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{m}C_{p-1}^{k}. \tag{27}$$

Для того чтобы при некоторых m и p, $0\le m\le p-2$, в (27) имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{k+1,n}=(-1)^ke^{i\varphi},\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ k=m+1,\dots,p-1.$$

В частности, если $m=0$, то

$$\left|a_{p,n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right|\le 1-\frac{1}{2^{p-1}},\quad k=1,\dots,p-1.$$

В теореме 3 оценивали коэффициент $a_{p,n}$ функции $F(z)$ вместе с некоторой линейной комбинацией предыдущих коэффициентов. В следующей теореме оценим лишь сами коэффициенты $a_{p,n}$, $p=2,3,\dots$.

Теорема 4. *Пусть*

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1,n}(z-1)^{n+k}\in\widetilde{K}_n(\Pi)\quad \text{и}\quad G(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+1,n}\omega^{n+k}\in\widetilde{K}_n(E).$$

Если для коэффициентов функции $G(\omega)$ имеют место неравенства

$$|b_{k+1,n}|\le 1+\frac{2k}{n+1},\quad k=1,2,3,\dots, \tag{28}$$

то справедливы неравенства

$$|a_{p,n}|\le\frac{p+n}{n+1},\quad p=2,3,\dots. \tag{29}$$

Для того чтобы в (29) имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{k+1,n}=(-1)^k\left(1+\frac{2k}{n+1}\right),\quad k=1,2,\dots,p, \tag{30}$$

$$a_{p,n}=(-1)^{p-1}\frac{p+n}{n+1}. \tag{31}$$

Доказательство. Опираясь на формулу (23) и лемму 4, имеем

$$|a_{p.n}|=\left|\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1}C_{p-1}^{k}b_{k+1,n}\right|\le\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=1}^{p-1}C_{p-1}^{k}\left(1+\frac{2k}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{p-1}^{k}+\frac{1}{2^{p-2}(n+1)}\sum_{k=0}^{p-1}C_{p-1}^{k}k=1+\frac{p-1}{n+1}=\frac{p+n}{n+1}. \tag{32}$$

Неравенство (29) доказано. Обсудим возможности достижения равенства в (29).

Необходимость. Пусть в (29) имеет место равенство. Тогда в (32) также будет равенство, т. е.

$$|a_{p,n}| = \left|\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-1}C_{p-1}^k b_{k+1,n}\right| \\ = \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{k=1}^{p-1}C_{p-1}^k\left(1+\frac{2k}{n+1}\right). \quad (33)$$

Рассматривая равенство (33), убеждаемся в справедливости (30). Опираясь на (30), приходим к (31).

Достаточность получим, если воспользуемся формулой (31) и подставим в (29).

Следствие 7. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n}(z-1)^{n+k} \in \widetilde{K}_n(\Pi) \quad \text{и} \quad G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,n}\omega^{n+k} \in \widetilde{K}_n(E).$$

Если для коэффициентов функции $G(\omega)$ имеют место неравенства

$$|b_{k+1,n}| \le 1 + \frac{2k}{n+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

то

$$|a_{p,n}| \le \frac{p+n}{n+1}, \quad p = 2, 3, \ldots, n_0, \quad (34)$$

и если для некоторого $n = n_0$ в (34) имеет место равенство, то

$$a_{p,n} = (-1)^{p-1}\frac{p+n}{n+1}, \quad p = 2, 3, \ldots.$$

Следствие 8. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n}(z-1)^{n+k} \in \widetilde{K}_n(\Pi) \quad \text{и} \quad G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,n}\omega^{n+k} \in \widetilde{K}_n(E).$$

Если для коэффициентов функции $G(\omega)$ имеют место неравенства

$$|b_{k+1,n}| \le r, \quad k = 1, 2, 3\ldots,$$

то

$$|a_{p,n}| \le r - \frac{r-1}{2^{p-1}}, \quad p = 2, 3, \ldots. \quad (35)$$

Для того чтобы в (35) имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{k+1,n} = (-1)^k r,\ k = 2, 3, \ldots, p, \quad a_{p,n} = (-1)^{p-1}\left(r - \frac{r-1}{2^{p-1}}\right).$$

Теорема 5. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1,n}(z-1)^{n+k} \in \widetilde{K}_n(\Pi) \quad \text{и} \quad G(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1,n}\omega^{n+k} \in \widetilde{K}_n(E).$$

Тогда для коэффициентов функции $F(z)$ имеют место следующие утверждения.

(A) *Справедливы неравенства*

$$\left| a_{p,1} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{p-1+k} C_{p-1}^{k} \sum_{j=0}^{k} 2^j C_k^j a_{j+1,1} \right| \le \frac{p+1}{2} - \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=0}^{m} C_{p-1}^{k}(k+1), \tag{36}$$

где $a_{1,1}$, $0 \le m \le p-2$, $p = 2, 3, \dots$.

Если для некоторых m и p, $0 \le m = p-2$, в (36) имеет место равенство, то

$$F(z) = \frac{2(z^2-1)}{(1-e^{i\alpha} + (1+e^{i\alpha})z)^2}. \tag{37}$$

Если для некоторых m и p, $0 \le m < p-2$, в (36) имеет место равенство, то

$$F(z) = \frac{z^2-1}{2z^2}. \tag{38}$$

(B) *Справедливы неравенства*

$$|a_{p,1}| \le \frac{p+1}{2}, \quad p = 2, 3, \dots. \tag{39}$$

Если для некоторого $p \ge 2$ в (39) имеет место равенство, то функция $F(z)$ имеет вид (38).

(C) *Справедливы неравенства*

$$\left| a_p - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1} \right| \le \frac{p+1}{2} - \frac{1}{2^{p-1}}, \quad p = 2, 3, \dots. \tag{40}$$

Если для $p = 2$ в (40) имеет место равенство, то $F(z)$ имеет вид (37). Если равенство в (40) имеет место для некоторого целого $p > 2$, то $F(z)$ имеет вид (38).

Докажем утверждение (A). Функция $G(\omega)$ по условию принадлежит классу $\widetilde{K}_1(E)$, который полностью совпадает с классом S однолистных и нормированных в единичном круге E функций. Тогда, как известно [6], справедливы неравенства $|b_{k+1,1}| \le k+1$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Применим теорему 3 для случая, когда $n = 1$, $b = 1$. Тогда получим оценки (36). Пусть в (36) для некоторого $m = p-2$ имеет место равенство. По теореме 3 имеем $b_{m+2,1} = (-1)^{m+1}(m+2)e^{i\varphi}$, $0 \le \alpha < 2\pi$. Но тогда функция $G(\omega)$ может быть только лучевой функцией Кебе, т. е.

$$G(\omega) = \frac{\omega}{(1+e^{i\alpha}\omega)^2} = \omega - 2e^{i\frac{1}{m+1}\varphi}\omega^2 + \dots + (-1)^{m+1}(m+2)e^{i\varphi}\omega^{m+2} + (-1)^{m+2}(m+3)e^{i\frac{m+2}{m+1}}\omega^{m+3} + \dots, \tag{41}$$

где $\alpha = \varphi/(m+1)$. Отсюда с помощью формулы (7) получим выражение для функции $F(z)$ в виде (37). Пусть в (36) имеет место равенство для некоторых m и p, $0 \le m < p-2$. Тогда по теореме 3 получим хотя бы два равенства

$$b_{m+2,1} = (-1)^{m+1}(m+2)e^{i\varphi}, \tag{42}$$

$$b_{m+3,1} = (-1)^{m+2}(m+3)e^{i\varphi}, \tag{43}$$

где $\varphi \in [0; 2\pi)$. Благодаря (42) и теореме Бранжа [6] получим представление лучевой функции Кебе в виде (41), из которого следует, что

$$b_{m+3,1} = (-1)^{m+2}(m+3)e^{i\frac{m+2}{m+1}\varphi}.$$

Сравнивая последнее равенство с (43), получим, что $\varphi = 0$. Тогда $\alpha = 0$ и функция $G(\omega)$ записывается в виде

$$G(\omega) = \frac{\omega}{(1+\omega)^2}. \tag{44}$$

Поэтому, как легко видеть, функция $F(z)$ приобретает вид (38).

Докажем утверждение (B). Неравенство (39) сразу следует из теоремы 4, если положить в (28) $n = 1$. Пусть при $p = 2$ в (39) имеет место равенство, т. е. $a_{2,1} = 3/2$. Тогда для родственной функции $G(\omega)$ по теореме 3 получим $b_{2,1} = -2$. Так как функция $G(\omega)$ принадлежит классу $\widetilde{K}_1(E)$, т. е. классу S, она является функцией вида (44). Но тогда функция $F(z)$ имеет вид (38). Если равенство имеет место для некоторого $p > 2$, то по теореме 3 равенство будет иметь место также при $p = 2$, и мы снова придем к функции (38).

Докажем утверждение (C). Неравенство (40) следует из неравенства (36) при $m = 0$, которое уже доказано. Случаи равенства в (40), когда $m = 0$, $p = 2$ или $m = 0$, $p > 2$, также рассмотрены во время доказательства утверждения (A).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
2. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1952.
3. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. Киев: Наук. думка, 1975.
4. *Кирьяцкий Э. Г.* Некоторые свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью // Литовск. мат. сб. 1972. Т. 12, № 2. С. 43–55.
5. *Кирьяцкий Э. Г.* Многолистные функции и разделенные разности. Вильнюс: Техника, 1995.
6. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Томск. гос. ун-т, 2001.

Статья поступила 13 июля 2012 г.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич, Кирьяцкий Евгений Эдуардович
Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса,
ул. Саулетекио, 11, Вильнюс 10223, Литва
eduard.kiriyatzkii@takas.lt