Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 517.53

О ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Ю. Г. Решетняк

Аннотация. В элементарных курсах математического анализа обычно приводится прием, применяемый для построения остаточного члена формулы Тейлора в интегральной форме. Этот прием основан на том, что если разность $f(x) - f(t) - f'(t)\frac{(x-t)}{1!} - \dots - f^{(r-1)}(t)\frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}$ между данной функцией и ее полиномом Тейлора порядка $r-1$ в точке t продифференцировать по t, то в результате получим выражение $-f^{(r)}(t)\frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}$, так что все производные порядка, меньшего r, исчезают. Как было замечено автором [1], аналогичный эффект имеет место и для функций многих переменных. При дифференцировании разности между функцией и ее полиномом Тейлора порядка $r-1$ в точке t относительно компонент этой точки остаются члены, в которые входят только производные порядка r. Этот факт применяется здесь для получения оценок остаточного члена формулы Тейлора функции многих переменных вдоль спрямляемой кривой.

Ключевые слова: формула Тейлора, спрямляемая кривая, остаточный член, функции класса $\mathscr{C}^r$.

Будем использовать обычные мультииндексные обозначения для производных и степеней. Символ δ^i означает n-мерный мультииндекс, у которого компонента с номером i равна единице, а остальные — нулю, $\delta^i = \left(\delta^i_1, \delta^i_2, \dots, \delta^i_n\right)$ (δ^i_j — символ Кронекера). Далее Ω означает область, т. е. связное открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$.

Следующее простое утверждение впервые установлено, по-видимому, в работе автора [1]. (В [1] оно не выделено в виде отдельного предложения.)

Лемма. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $\mathscr{C}^{r+1}$. Пусть x и ξ — две произвольные точки области Ω. Пусть*

$$\varphi_r(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(\xi). \tag{1}$$

Тогда для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \varphi_r(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = r} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^{\alpha+\delta^i} f(\xi), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \varphi_r(x, \xi) = - \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} (x-\xi)^\alpha. \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 11–01–00819) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (проект НШ–921.2012.1).

Замечание. Функция $\varphi_r(x,\xi)$ является полиномом Тейлора функции f в точке ξ. Для случая $n = 1$ известно, что если продифференцировать этот полином по ξ, то в результате получим выражение, не содержащее производных порядка, не превосходящего r. Лемма показывает, что аналогичная ситуация имеет место и в случае функций многих переменных. Для удобства читателя приведем здесь рассуждения, содержащиеся в [1].

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\varphi_r(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le r}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}\right\}D^\alpha f(\xi) + \sum_{|\alpha|\le r}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_i}D^\alpha f(\xi)\right\}. \quad (4)$$

Если мультииндекс α таков, что $\alpha_i = 0$, то $\frac{\partial}{\partial\xi_i}(x-\xi)^\alpha = 0$. Если $\alpha_i \ne 0$, то $\alpha = \beta + \delta^1$, где β — n-мерный мультииндекс такой, что $|\beta| \le r-1$. В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} = -\frac{\alpha_i(x-\xi)^{\alpha-\delta^i}}{\alpha!} = -\frac{(x-\xi)^\beta}{\beta!}.$$

В результате получаем, что первая сумма в правой части (4) равна выражению

$$-\sum_{|\beta|\le r-1}\frac{(x-\xi)^\beta}{\beta!}D^{\beta+\delta^i}f(\xi) = -\sum_{|\alpha|\le r-1}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^{\alpha+\delta^i}f(\xi).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\varphi_r(x,\xi) &= -\sum_{|\alpha|\le r-1}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^{\alpha+\delta^i}f(\xi) + \sum_{|\alpha|\le r}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^{\alpha+\delta^i}f(\xi)\\ &= \sum_{|\alpha|= r}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^{\alpha+\delta^i}f(\xi),\end{aligned}$$

и равенство (2) доказано.

Чтобы доказать (3), рассмотрим сумму

$$\sum_{|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_i}(x-\xi)^\alpha.$$

Если для некоторого α будет $\alpha_i = 0$, то соответствующее слагаемое суммы обращается в нуль, так что имеют место равенства

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_i}(x-\xi)^\alpha &= \sum_{\alpha_i>0,|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_i}(x-\xi)^\alpha\\ &= \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{(\alpha+\delta_i)!}D^{\alpha+\delta^i}f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_i}(x-\xi)^{\alpha+\delta^i}.\end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\frac{1}{(\alpha+\delta^i)!}\frac{\partial}{\partial\xi_i}(x-\xi)^{\alpha+\delta^i} = -\frac{1}{\alpha!}(x-\xi)^\alpha.$$

Таким образом, правая часть равенства (3) совпадает с правой частью равенства (2), и тем самым справедливость равенства (3) также установлена, поскольку левые части этих равенств представляют собой одну и ту же функцию. $\square$

Теорема 1. *Пусть дана область Ω пространства $\mathbb{R}^n$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $\mathscr{C}^r$, где $r > 1$ целое. Предположим, что задана спрямляемая кривая $\eta : [0,1] \to \Omega$, соединяющая точки $\xi = \eta(0)$ и $x = \eta(1)$. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$f(x) = \varphi_{r-1}(x,\xi) + \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{|\alpha|=r-1} D^{\alpha+\delta^i} f(\eta(t)) \frac{[x-\eta(t)]^\alpha}{\alpha!} \right\} d\eta_i(t), \tag{5}$$

$$f(x) = \varphi_{r-1}(x,\xi) - \int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=r} D^\alpha f(\eta(t)) \frac{1}{\alpha!}\, d[x-\eta(t)]^\alpha. \tag{6}$$

Интегралы в равенствах (5), (6) *понимаются в смысле Стилтьеса.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда параметризованная кривая $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: функция η абсолютно непрерывна, причем для почти всех $t \in [0,1]$ выполняется равенство $|\eta'(t)| = L$, где $L = L(\eta)$ — длина кривой η. Параметризованную кривую η, удовлетворяющую этому условию, будем называть *нормальной*. Для произвольной спрямляемой кривой $\zeta : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ существует нормальная параметризованная кривая $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\zeta(t) = \eta[\psi(t)]$, где $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая функция такая, что $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 1$.

Интеграл Стилтьеса обладает следующим свойством инвариантности. Пусть функция $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет всем указанным выше условиям. Предположим, что даны функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ такие, что интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^1 f(u)\, dg(u)$ определен. Положим $F(t) = F[\psi(t)]$, $G(t) = g[\psi(t)]$. Тогда определен также и интеграл $\int\limits_a^b F(t)\, dG(t)$ и значения этих интегралов совпадают.

В силу высказанных замечаний достаточно доказать теорему для случая, когда параметризованная кривая η нормальна.

Заметим, что если параметризованная кривая $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ нормальна, то для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ имеет место неравенство $|\eta(t_1) - \eta(t_2)| \le L(\eta)|t_1 - t_2|$. Здесь и далее $L(\eta)$ означает длину кривой η.

Если кривая η нормальна, то функция $D^\alpha f(\eta(t))(y - \eta(t))^\alpha$ переменной t (в предположении, что $|\alpha| < r$) абсолютно непрерывна и ее производная вычисляется по обычным правилам. Имеем

$$f(x) - \varphi_{r-1}(x,\xi) = \varphi_{r-1}(x,x) - \varphi_{r-1}(x,\xi) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\varphi_{r-1}(x,\eta(t))\, dt. \tag{7}$$

Воспользуемся формулой (2), заменяя в ней r на $r-1$. Получим

$$\frac{d}{dt}\varphi_{r-1}(x,\eta(t)) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i} \varphi_{r-1}(x,\eta(t)) \right] \eta_i'(t)$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=r-1} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^{\alpha+\delta^i} f(\eta(t)) \eta_i'(t).$$

Отсюда в силу равенства (7)

$$f(x) = \varphi_{r-1}(x,\xi) + \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=r-1} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^{\alpha+\delta^i} f(\eta(t))\eta_i'(t)\,dt$$

$$= \varphi_{r-1}(x,\xi) + \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=r-1} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^{\alpha+\delta^i} f(\eta(t))\,d\eta_i(t). \quad (8)$$

Равенство (5) доказано. Чтобы доказать равенство (6), воспользуемся представлением для производной, которое дается равенством (3):

$$\frac{d}{dt}\{\varphi_{r-1}(x,\eta(t))\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i}\varphi_{r-1}(x,\eta(t))\eta'(t)$$

$$= -\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\eta(t)) \frac{\partial}{\partial \xi_i}(x-\eta(t))^\alpha \eta_i'(t).$$

Отсюда

$$f(x) = \varphi_{r-1}(x,\xi) - \sum_{|\alpha|=r} \int\limits_0^1 \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\eta(t)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i}(x-\eta(t))^\alpha \eta_i'(t)\,dt,$$

следовательно,

$$f(x) - \varphi_{r-1}(x,\xi) = -\sum_{|\alpha|=r} \int\limits_0^1 \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\eta(t))\,d(x-\eta(t))^\alpha,$$

и равенство (6) доказано. □

Замечание. Требование спрямляемости кривой $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, по-видимому, может быть ослаблено. Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая функция такая, что $\omega(t) > 0$ при $t > 0$, $\omega(t) \to 0$ при $t \to 0$. Представляется правдоподобным, что теорема будет верна, если вектор-функция $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha > 1/2$. При этом условии в силу известных результатов анализа все интегралы Стилтьеса, указанные в формулировке теоремы, существуют (см., например, [2], а также работы автора [3, 4]).

Приведем некоторые следствия теоремы.

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда имеют место равенства*

$$f(x) = \varphi_r(x,\xi) + \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=r-1} [D^{\alpha+\delta^i} f(\eta(t)) - D^{\alpha+\delta^i} f(\xi)] \frac{[x-\eta(t)]^\alpha}{\alpha!}\,d\eta_i(t), \quad (9)$$

$$f(x) = \varphi_r(x,\xi) + \int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=r} [D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\eta(t))] \frac{1}{\alpha!}\,d[x-\eta(t)]^\alpha. \quad (10)$$

Доказательство. Равенства (5) и (6) теоремы 1 могут быть записаны в виде $f(x) = \varphi_{r-1}(x,\xi) + R(x,\xi)$. Положим $\rho(x,\xi) = \varphi_r(x,\xi) - \varphi_{r-1}(x,\xi)]$. Тогда

$$f(x) = \varphi_r(x,\xi) + R(x,\xi) - \rho(x,\xi). \quad (11)$$

Здесь

$$\rho(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=r}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^\alpha f(\xi).$$

Подставляя в равенство (11) представление $R(x,\xi)$, которое следует из (6), и данное представление для $\rho(x,\xi)$, получим равенство (10).

Чтобы получить равенство (9), потребуется другое представление для $\rho(x,\xi)$. Имеем

$$(x-\xi)^\alpha=-(x-\eta(t))^\alpha|_{t=0}^{t=1}=-\int\limits_0^1 d(x-\eta(t))^\alpha=\sum_{i=1,\alpha_i\neq 0}^n\int\limits_0^1\alpha_i(x-\eta(t))^{\alpha-\delta^i}d\eta_i.$$

Отсюда

$$\rho(x,\xi)=\int\limits_0^1\sum_{i=1}^n\sum_{|\alpha|=r,\alpha_i\neq 0}\frac{1}{(\alpha-\delta^i)!}D^\alpha f(\xi)(x-\eta(t))^{\alpha-\delta^i}d\eta_i$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{|\alpha|=r-1}D^{\alpha+\delta^i}f(\xi)\frac{(x-\eta(t))^\alpha}{\alpha!}\,d\eta_i. \quad (12)$$

Подставляя в (11) значение $R(x,\xi)$ формулы, которое дается равенством (5), и представление (12) для $\rho(x,\xi)$, приходим к (9). □

Пусть, как и выше, Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ — функция класса $\mathscr{C}^r$, $\xi:[0,1]\to\Omega$ — спрямляемая кривая в области Ω, $\xi(0)=\xi$, $\xi(1)=x$. Далее L означает длину этой кривой. Положим

$$W_\alpha=\sup_{t\in[0,1]}|D^\alpha f(\eta(t))|, \quad (13)$$

$$U_\alpha=\sup_{t\in[0,1]}|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(\eta(t))|, \quad (14)$$

$$V_\alpha=\bigvee_0^1(x-\eta(t))^\alpha. \quad (15)$$

Следствие 2. *Пусть функция f и спрямляемая кривая $\xi:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяют всем указанным выше условиям. Тогда имеют место неравенства*

$$\left|f(x)-\sum_{|\alpha|\le r-1}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)\right|\le\sum_{|\alpha|=r}\frac{W_\alpha V_\alpha}{\alpha!}, \quad (16)$$

$$\left|f(x)-\sum_{|\alpha|\le r}\frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^\alpha f(x)\right|\le\sum_{|\alpha|=r}\frac{U_\alpha V_\alpha}{\alpha!}. \quad (17)$$

Доказательство. Для интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b g(t)\,dh(t)=I$ справедлива оценка $|I|\le\sup\limits_{t\in[a,b]}|g(t)|\bigvee\limits_a^b h$. Применяя данное неравенство к каждому из отдельных слагаемых каждой из сумм

$$\sum_{|\alpha|=r}\int\limits_0^1\frac{1}{\alpha!}\{D^\alpha f(\eta(t))\}\,d(x-\eta(t))^\alpha,\ \sum_{|\alpha|=r}\int\limits_0^1\frac{1}{\alpha!}\{D^\alpha f(x)-D^\alpha f(\eta(t))\}\,d(x-\eta(t))^\alpha,$$

получим требуемые неравенства. □

Следствие 3. *Пусть функция f и спрямляемая кривая $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют всем указанным выше условиям. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\left| f(x) - \sum_{|\alpha| \le r-1} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) \right| \le L^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{W_\alpha}{\alpha!}, \tag{18}$$

$$\left| f(x) - \sum_{|\alpha| \le r} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x) \right| \le L^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{U_\alpha}{\alpha!}. \tag{19}$$

Доказательство. В силу свойства инвариантности интеграла Стилтьеса относительно монотонной замены переменной будем предполагать, что вектор-функция $\eta : [0,1]$ абсолютно непрерывна, причем $|\eta'(t)| = L$ для почти всех $t \in [0,1]$.

Ввиду соотношений (10) и (11) дело сводится к установлению неравенства

$$V_\alpha \le L^r. \tag{20}$$

По определению V_α — вариация функции $z_\alpha(t) = (x - \eta(t))^\alpha$ на отрезке $[0,1]$. Функция z_α абсолютно непрерывна относительно t, и, значит, ее вариация на этом отрезке равна интегралу $\int\limits_0^1 \left|\frac{dz(t)^\alpha}{dt}\right| dt$. Имеем

$$\frac{d}{dt} z(t)^\alpha = \frac{d}{dt}(x - \eta(t))^\alpha = \sum_{i=1}^n Z_i(t),$$

где $Z_i(t) = \left[\frac{\partial}{\partial \xi_i}(x - \eta(t))^\alpha\right]\eta_i'(t)$.

Если $\alpha_i = 0$, то частная производная $\frac{\partial}{\partial \xi_i}(x-\xi)^\alpha$ тождественно равна нулю, так как в этом случае функция $(x-\xi)^\alpha$ не зависит от ξ_i. Пусть $\alpha_i \ne 0$. Тогда $z_\alpha'(t) = \alpha_i (x - \eta(t))^{\alpha - \delta^i}$. Имеем

$$x = \xi(1), \quad |x_j - \xi_j(t)| \le |x - \eta(t)| = |\xi(1) - \eta(t)| \le L(1-t).$$

Отсюда следует, что если $\alpha_i \ne 0$, то имеет место оценка $|Z_i(t)| \le L\alpha_i(1-t)$. Данная оценка тривиальным образом верна и в случае $\alpha_i = 0$. Заметим еще, что $|\xi_j'(t)| \le |\xi'(t)| \le L$. В результате получаем

$$V_\alpha = \int\limits_0^1 |z_\alpha'(t)|\, dt \le \sum_{i=1}^n \alpha_i L^r \int\limits_0^1 (1-t)^{r-1}\, dt = L^r \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{r} = L^r. \qquad \square$$

Следствие 4. *Если отрезок, соединяющий точки x и ξ, содержится в области Ω, то справедливы оценки*

$$|f(x) - \varphi_{r-1}(x,\xi)| \le \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} |W_\alpha (x-\xi)^\alpha (x-\xi)^\alpha| \le |x-\xi|^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{W_\alpha}{\alpha!}, \tag{21}$$

$$|f(x) - \varphi_r(x,\xi)| \le \sum_{|\alpha|=r} \frac{U_\alpha}{\alpha!} |(x-\xi)^\alpha| \le |x-\xi|^r \sum_{|\alpha|=r} \frac{W_\alpha}{\alpha!}. \tag{22}$$

Доказательство. Предположим, что отрезок $[x,\xi]$ содержится в области Ω. Функция $\eta(t) = \xi + t(x-\xi)$ есть параметризация этого отрезка, удовлетворяющая всем требованиям теоремы. Положим $z(t) = (x - \eta(t))^\alpha$. Имеем $x - \eta(t) = (x-\xi)(1-t)$. Отсюда $z(t) = (x-\xi)^\alpha (1-t)^r$. Функция $z(t)$ монотонна на промежутке $[0,1]$, и, значит, ее вариация на этом отрезке равна $|z(1) - z(0)| = |x-\xi|^r$. $\square$

Теорема 2. *Пусть функция f и спрямляемая кривая $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют всем указанным выше условиям. Тогда имеют место неравенства*

$$\left| f(x) - \sum_{|\alpha|\le r-1} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) \right| \le CL^r \left\{ \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{[D^\alpha f(\eta(t))]^2}{\alpha!}\, dt \right\}^{1/2}, \tag{23}$$

где L — длина кривой, C — постоянная, $C = \sqrt{\frac{r-1+n}{(2r-1)(r-1)!}}$.

Доказательство. Для краткости введем обозначение $z(t) = x - \eta(t)$. Если $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть n-мерный мультииндекс, то символом S_α будем обозначать функцию, определенную условием: $S_\alpha(u) = u^\alpha = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n}$ для $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Имеем равенство (см. (5))

$$f(x) - \sum_{|\alpha|\le r-1} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) = -\int_0^1 \sum_{|\alpha|=r} D^\alpha f(\eta(t)) \frac{1}{\alpha!}\, d[x-\eta(t)]^\alpha.$$

Правая часть последнего равенства может быть записана следующим образом:

$$I = -\int_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{D^\alpha f(\eta(t)) H_\alpha(t)}{\alpha!}\, dt, \tag{24}$$

где

$$H_\alpha(t) = \frac{d}{dt}\{[z(t)^\alpha]\} = \langle (\nabla S_\alpha)[z(t)], z'(t) \rangle.$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|I| \le \left\{ \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{[D^\alpha f(\eta(t))]^2}{\alpha!}\, dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{[H_\alpha(t)]^2}{\alpha!}\, dt \right\}^{1/2}. \tag{25}$$

Имеем $|H_\alpha(t)| \le |(\nabla S_\alpha)[z(t)]||z'(t)|$. В силу выбора параметризации $|z'(t)| = L$ для почти всех t. Отсюда следует, что

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{[H_\alpha(t)]^2}{\alpha!} \le L^2 \sum_{|\alpha|=r} \frac{|(\nabla S_\alpha)[z(t)]|^2}{\alpha!} = L^2 \sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{\partial}{\partial z_i} z^\alpha \right]^2.$$

Напомним, что $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_i^{\alpha_i} \dots z_n^{\alpha_n}$ и если $\alpha_i = 0$ для некоторого i, то производная от z^α по z_i равна нулю и все слагаемые в сумме $\sum\limits_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{\partial}{\partial z_i} z^\alpha \right]^2$, для которых $\alpha_i = 0$, обращаются в нуль. Если $\alpha_i \ne 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial z_i} z^\alpha = \alpha_i z_1^{\alpha_1} \dots z_i^{\alpha_i - 1} \dots z_n^{\alpha_n}.$$

Пусть $\beta = \alpha - \delta^i$. Для мультииндекса β при $j \ne i$ имеем $\beta_j = \alpha_j$ и $\beta_i = \alpha_i - 1$, $|\beta| = r - 1$. Наконец, заметим еще, что $\alpha_i/\alpha_i! = 1/\beta_i!$. Принимая во внимание сказанное, получаем, что

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{\partial}{\partial z_i} z^\alpha \right]^2 = \sum_{|\beta|=r-1} (\beta_i + 1) \prod_{j=1}^n \frac{|z_j|^{2\beta_j}}{\beta!}$$
$$= \frac{\beta_i + 1}{(r-1)!} \left(\sum_{j=1}^n z_j^2 \right)^{r-1} = \frac{\beta_i + 1}{(r-1)!} |z(t)|^{2(r-1)}.$$

Суммируя по i, получим

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{[H_\alpha(t)]^2}{\alpha!} \le \frac{r-1+n}{(r-1)!}|z(t)|^{2(r-1)}.$$

Стало быть,

$$\left\{\int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{[H_\alpha(t)]^2}{\alpha!}\,dt\right\}^{1/2} \le L\left\{\frac{r-1+n}{(r-1)!}\int\limits_0^1 |z(t)|^{2r-2)}\,dt\right\}^{1/2}.$$

Заметим, что $|z(t)| = |x-\eta(t)| = |\eta(1)-\eta(t)| \le L(1-t)$. Отсюда получаем неравенство

$$\int\limits_0^1 |z(t)|^{2r-2}\,dt \le \int\limits_0^1 L^{2r-2}(1-t)^{2r-2}\,dt = \frac{1}{2r-1}L^{2r-2}.$$

Окончательно приходим к оценке

$$\left\{\int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{[H_\alpha(t)]^2}{\alpha!}\,dt\right\}^{1/2} \le L^r\sqrt{\frac{r-1+n}{(2r-1)(r-1)!}}. \tag{26}$$

Подставляя эту оценку в (25), получаем требуемый результат.

Следствие. *Пусть функция f и спрямляемая кривая $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют всем указанным выше условиям. Тогда имеют место неравенства*

$$\left|f(x) - \sum_{|\alpha|\le r} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^\alpha f(\xi)\right| \le CL^r\left\{\int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{[D^\alpha f(\eta(t)) - D^\alpha f(\xi)]^2}{\alpha!}\,dt\right\}^{1/2}, \tag{27}$$

где L — длина кривой, C — постоянная, $C = \sqrt{\frac{r-1+n}{(2r-1)(r-1)!}}$.

Доказательство. Применяя равенство (6), получим

$$f(x) - \sum_{|\alpha|\le r} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!}D^\alpha f(\xi) = \int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=r} [D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\eta(t))]\frac{1}{\alpha!}\,d[x-\eta(t)]^\alpha.$$

Правая часть последнего равенства может быть записана следующим образом:

$$I = \int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=r} \frac{[D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(\eta(t))]H_\alpha(t)}{\alpha!}\,dt, \tag{28}$$

где $H_\alpha(t)$ имеет тот же смысл, что и в доказательстве теоремы. Требуемый результат выводится отсюда путем применения неравенства Буняковского и оценки для функции $H_\alpha(t)$, полученной в доказательстве теоремы. $\square$

Теорема 1 дает интегральное представление остаточного члена формулы Тейлора в виде интеграла вдоль спрямляемой прямой. Ее следствия и теорема 2 могут рассматриваться как аналог теоремы о среднем значении в классической формуле Тейлора.

В [5] используется некоторый вспомогательный результат, содержащий, в частности, другое интегральное представление остаточного члена в формуле Тейлора для функций многих переменных, а именно, там устанавливается следующее равенство (привожу в обозначениях, более привычных для меня). Для произвольной функции f класса $\mathscr{C}^m$ и пути $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ класса $\mathscr{C}^1$ согласно [2] имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{|\alpha \leq m-1} \frac{(x-\xi)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(\xi)$$
$$+ \int_0^1 \dots \left(\int_0^{t_{m-2}} \left(\int_0^{t_{m-1}} \partial_{i_1 i_2 \dots 1_m} f[\eta(t_m)] \eta'_{i_m}(t_m)\, dt_m \right) \eta'_{i_{m-1}}(t_{m-1})\, dt_{m-1} \right) \dots dt_1. \tag{29}$$

Остаточный член в этом равенстве представлен, таким образом, как результат некоторого повторного интегрирования.

В заключение автор выражает свою благодарность Д. В. Исангуловой, тщательно прочитавшей текст и указавшей на ошибку, содержащуюся в первоначальном варианте статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Замечание об интегральном представлении дифференцируемых функций многих переменных // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 198–200.
2. *Kondurar V.* Sur l'intégrale de Stieltjes // Мат. сб. 1937. V. 44, N 2. P. 361–366.
3. *Решетняк Ю. Г.* О параллельном переносе вдоль нерегулярной кривой в главном расслоении // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 5. С. 1067–1090.
4. *Решетняк Ю. Г.* О понятии подъема нерегулярного пути в расслоенном многообразии и его приложениях // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 588–598.
5. *Ciarlet Ph., Mardare C.* Recovery of a manifold with boundary and its continuity as a function of its metric tensor // J. Math. Pure Appl. 2004. V. 83, N 7. P. 811–843.

Статья поступила 14 февраля 2013 г.

Решетняк Юрий Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
reshetnyak@math.nsc.ru