Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 514.744, 514.764.214

ПСЕВДОРИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С РЕКУРРЕНТНЫМИ СПИНОРНЫМИ ПОЛЯМИ

А. С. Галаев

Аннотация. Существование рекуррентного спинорного поля на псевдоримановом многообразии тесно связано с существованием параллельного одномерного комплексного подрасслоения спинорного расслоения этого многообразия. Дана классификация следующих односвязных псевдоримановых многообразий, допускающих такие подрасслоения, в терминах их алгебр голономии: римановы многообразия; лоренцевы многообразия; псевдоримановы многообразия с неприводимыми алгебрами голономии; псевдоримановы многообразия нейтральной сигнатуры, допускающие два взаимно дополнительных параллельных изотропных распределения.

Ключевые слова: псевдориманово многообразие, рекуррентное спинорное поле, алгебра голономии.

1. Введение

Пусть (M, g) — спинорное псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s), а S — соответствующее комплексное спинорное расслоение с индуцированной связностью ∇^S. Спинорное поле $s \in \Gamma(S)$ называется *рекуррентным*, если

$$\nabla^S_X s = \theta(X)s \tag{1}$$

для всех векторных полей $X \in \Gamma(TM)$, здесь θ — комплекснозначная 1-форма. Если $\theta = 0$, то s — *параллельное* спинорное поле. Для рекуррентного спинорного поля s существует локально определенная, не обращающаяся в нуль функция f такая, что поле fs параллельно тогда и только тогда, когда $d\theta = 0$. Если многообразие M односвязно, то такая функция определена глобально.

Изучение спинорных многообразий, допускающих параллельные спинорные поля, было начато Хитчиным [1], а позднее продолжено Фридрихом [2]. Ванг охарактеризовал односвязные спинорные римановы многообразия, допускающие параллельные спинорные поля, в терминах групп голономии этих многообразий [3]. Аналогичный результат получили Лайстнер для лоренцевых многообразий [4, 5], Баум и Кас для псевдоримановых многообразий с неприводимыми группами голономии [6] и Икемакхен в случае псевдоримановых многообразий нейтральной сигнатуры (n, n), допускающих два взаимно дополнительных параллельных изотропных распределения [7].

Фридрих [2] рассмотрел уравнение (1) на римановом многообразии в предположении, что θ — вещественнозначная 1-форма. Он доказал, что это уравнение влечет равенство тензора Риччи нулю и равенство $d\theta = 0$. Ниже увидим, что это утверждение не имеет места в случае лоренцевых многообразий. Пример 1 из [2] дает решение s уравнения (1) с $\theta = \mathrm{i}\omega$, $d\omega \neq 0$ для некоторой вещественнозначной 1-формы ω на компактном римановом многообразии

(M, g), представляющем собой произведение неплоского тора T^2 и окружности S^1. В действительности рекуррентное спинорное поле s возникает из локально определенного рекуррентного спинорного поля на кэлеровом многообразии T^2, не являющемся Риччи-плоским, существование последнего спинорного поля показывает приводимая ниже теорема 1.

Спинорное расслоение S псевдориманова многообразия (M, g) допускает параллельное комплексное подрасслоение размерности 1 тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки многообразия (M, g) существует не обращающееся в нуль рекуррентное спинорное поле; эти поля должны быть пропорциональны в пересечениях областей их определения. В данной статье мы изучаем некоторые классы спинорных псевдоримановых многообразий (M, g), спинорные расслоения которых допускают одномерные комплексные подрасслоения.

В разд. 3 доказываем, что если спинорное расслоение локально неразложимого риманова спинорного многообразия (M, g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение, то многообразие (M, g) либо является кэлеровым и не является Риччи-плоским, либо допускает ненулевое параллельное спинорное поле. Более того, спинорное расслоение всякого односвязного локально неразложимого спинорного кэлерова многообразия, не являющегося Риччи-плоским, допускает в точности два параллельных одномерных комплексных подрасслоения. Далее, произвольное односвязное полное спинорное риманово многообразие, спинорное расслоение S которого допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение, а алгебра голономии не является неприводимой, представляет собой произведение спинорного кэлерова многообразия, не являющегося Риччи-плоским, и спинорного риманова многообразия, допускающего параллельное спинорное поле.

В разд. 4 доказываем, что спинорное расслоение $(n+2)$-мерного односвязного неразложимого спинорного лоренцева многообразия (M, g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M, g) допускает параллельное распределение изотропных прямых, т. е. его алгебра голономии $\mathfrak{g}$ содержится в параболической подалгебре

$$\mathfrak{sim}(n) = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{so}(1, n+1),$$

и подалгебра $\mathfrak{h} = \operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(n)$ сохраняет одномерное комплексное подпространство спинорного модуля Δ_n.

В разд. 5 для псевдоримановых спинорных многообразий с неприводимыми алгебрами голономии получаем те же результаты, что и для неразложимых римановых многообразий в разд. 3.

В разд. 6 доказываем, что спинорное расслоение каждого односвязного псевдориманова спинорного многообразия нейтральной сигнатуры (n, n), допускающего два взаимно дополнительных параллельных изотропных распределения, допускает параллельное комплексное подрасслоение.

В разд. 7 обсуждаем связь рекуррентных спинорных полей и параллельных спинорных полей spin^C-расслоений, которые изучали Мороиану [8] и Икемакхен [9, 10].

Автор выражает глубокую благодарность Хельге Баум за постановку задачи и полезные обсуждения.

2. Предварительные сведения

Спинорные представления. Напомним некоторые стандартные обозначения. Пусть $\mathbb{R}^{r,s}$ — псевдоевклидово пространство с метрикой g сигнатуры

(r, s) (r обозначает число минусов). Пусть $(\mathscr{C}l_{r,s}, \cdot)$ — соответствующая алгебра Клиффорда, а $\mathbb{C}l_{r,s} = \mathscr{C}l_{r,s} \otimes \mathbb{C}$ — ее комплексификация. Последняя алгебра может быть реализована в виде матричной алгебры следующим образом. Рассмотрим базис

$$\left(u(\epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon\, \mathrm{i} \end{pmatrix}, \epsilon = \pm 1 \right)$$

пространства $\mathbb{C}^2$. Определим следующие изоморфизмы пространства $\mathbb{C}^2$:

$$E = \mathrm{id}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$T^2 = -V^2 = -U^2 = E, \quad UT = -\mathrm{i}V, \quad VT = iU, \quad UV = -\mathrm{i}T,$$

$$Tu(\epsilon) = -\epsilon u(\epsilon), \quad Uu(\epsilon) = \mathrm{i}u(-\epsilon), \quad Tu(\epsilon) = \epsilon u(-\epsilon).$$

Пусть $n = r + s$. Базис $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^{r,s}$ называется *ортонормированным*, если $g(e_i, e_j) = k_i \delta_{ij}$, где $k_i = -1$ для $1 \le i \le r$ и $k_i = 1$ для $r + 1 \le i \le n$. Зафиксируем такой базис. Для целого m обозначим через $\mathbb{C}(m)$ алгебру комплексных квадратных матриц порядка m. Определим следующие изоморфизмы:

1) если n четное, то определим $\Phi_{r,s} : \mathbb{C}l_{r,s} \to \mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}})$, полагая

$$\Phi_{r,s}(e_{2k-1}) = \tau_{2k-1} E \otimes \dots \otimes E \otimes U \otimes \underbrace{T \otimes \dots \otimes T}_{k-1 \text{ раз}}, \tag{2}$$

$$\Phi_{r,s}(e_{2k}) = \tau_{2k} E \otimes \dots \otimes E \otimes V \otimes \underbrace{T \otimes \dots \otimes T}_{k-1 \text{ раз}}, \tag{3}$$

где $1 \le k \le \frac{n}{2}$, $\tau_i = \mathrm{i}$ для $1 \le i \le r$ и $\tau_i = 1$ для $r + 1 \le i \le n$;

2) если n нечетное, то определим $\Phi_{r,s} : \mathbb{C}l_{r,s} \to \mathbb{C}(2^{\frac{n-1}{2}}) \oplus \mathbb{C}(2^{\frac{n-1}{2}})$, полагая

$$\Phi_{r,s}(e_k) = (\Phi_{r,s-1}(e_k), \Phi_{r,s-1}(e_k)), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$\Phi_{r,s}(e_n) = (T \otimes \dots \otimes T, -\mathrm{i}T \otimes \dots \otimes T).$$

Полученное пространство $\Delta_{r,s} = \mathbb{C}^{2^{[\frac{n}{2}]}}$ называется *спинорным модулем*. Будем писать $A \cdot s = \Phi_{r,s}(A)s$ для $A \in \mathbb{C}l_{r,s}$, $s \in \Delta_{r,s}$. Будем рассматривать следующий базис модуля $\Delta_{r,s}$:

$$(u(\epsilon_k, \dots, \epsilon_1) = u(\epsilon_k) \otimes \dots \otimes u(\epsilon_1) \mid \epsilon_i = \pm 1).$$

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{spin}(r, s)$ группы Ли $\mathrm{Spin}(r, s)$ может быть вложена в $\mathbb{C}l_{r,s}$ следующим образом:

$$\mathfrak{spin}(r, s) = \mathrm{span}\{e_i \cdot e_j \mid 1 \le i < j \le n\}.$$

Алгебру Ли $\mathfrak{so}(r, s)$ можно отождествить с пространством бивекторов $\Lambda^2 \mathbb{R}^{r,s}$ таким образом, что

$$(x \wedge y)z = g(x, z)y - g(y, z)x, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^{r,s}.$$

Имеет место изоморфизм

$$\lambda_* : \mathfrak{so}(r, s) \to \mathfrak{spin}(r, s), \quad \lambda_*(x \wedge y) = x \cdot y.$$

Полученное представление алгебры Ли $\mathfrak{so}(r,s)$ в $\Delta_{r,s}$ неприводимо, если n нечетно, и это представление представимо в виде прямой суммы двух неприводимых подмодулей

$$\Delta^{\pm}_{r,s} = \operatorname{span}\{u(\epsilon_k,\dots,\epsilon_1) \mid \epsilon_1 = \dots = \epsilon_k = \pm 1\},$$

если n четно.

Алгебры голономии. Пусть (M,g) — псевдориманово многообразие сигнатуры (r,s), а ∇ — связность Леви-Чивита на (M,g). Зафиксируем точку $x \in M$. Касательное пространство T_xM может быть отождествлено с псевдоевклидовым пространством $\mathbb{R}^{r,s}$. Тогда алгебра голономии $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{so}(T_xM, g_x)$ (т. е. алгебра Ли группы голономии) многообразия (M,g) в точке x отождествляется с подалгеброй $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r,s)$. Если M односвязно, то алгебра голономии и группа голономии однозначно определяют друг друга. Будем рассматривать алгебры голономии. Если (M,g) — спинорное многообразие, то оно допускает спинорное расслоение S. Слой S_x этого расслоения можно отождествить со спинорным модулем $\Delta_{r,s}$. Связность Леви-Чивита ∇ определяет связность ∇^S на спинорном расслоении S. Алгебра голономии этой связности совпадает с $\lambda_*(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{spin}(r,s)$. Имеет место фундаментальное свойство алгебры голономии, утверждающее, что если (M,g) односвязно, то (M,g) допускает параллельное векторное поле (спинорное поле, распределение и т. д.) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ обнуляет некоторый вектор в $\mathbb{R}^{r,s}$ (обнуляет спинор в $\Delta_{r,s}$, сохраняет векторное подпространство в $\mathbb{R}^{r,s}$ и т. д.).

3. Римановы многообразия

Теорема 1. *Пусть (M,g) — локально неразложимое n-мерное односвязное спинорное риманово многообразие. Тогда спинорное расслоение S этого многообразия допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ многообразия (M,g) — одна из алгебр $\mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathfrak{su}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{n}{4}\right)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$ или (M,g) — локально симметрическое кэлерово многообразие.*

Доказательство. Напомним, что S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ сохраняет одномерное комплексное подпространство l спинорного модуля Δ_n. Если $\mathfrak{h}$ аннулирует l, то (M,g) допускает параллельное спинорное поле и $\mathfrak{h}$ — одна из алгебр $\mathfrak{su}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{n}{4}\right)$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$ [3]. Предположим, что $\mathfrak{h}$ не обнуляет l. Заметим, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — компактная алгебра Ли. Единственной компактной алгеброй Ли, допускающей нетривиальное точное 2-мерное вещественное представление, является $\mathfrak{so}(2)$. Это показывает, что $\mathfrak{h}$ содержит одномерный центр, следовательно, $\mathfrak{h}$ содержится в $\mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$, т. е. многообразие (M,g) кэлерово. Так как $\mathfrak{su}\left(\frac{n}{2}\right)$ обнуляет два комплексных одномерных подпространства в Δ_n, то $\mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$ сохраняет эти два подпространства и не обнуляет их. Мы показали, что спинорное расслоение S кэлерова многообразия допускает по крайней мере два параллельных одномерных комплексных подрасслоения. В случае $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}\left(\frac{n}{2}\right)$ этих подрасслоений в точности два.

Следствие 1. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное риманово многообразие с неприводимой алгеброй голономии и без ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M,g) — кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским.*

Доказательство. Это утверждение следует из того факта, что односвязные римановы многообразия с алгебрами голономии $\mathfrak{su}\left(\frac{n}{2}\right)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{n}{4}\right)$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$ допускают ненулевые параллельные спинорные поля.

Следствие 2. *Пусть (M, g) — односвязное полное спинорное риманово многообразие без ненулевых параллельных спинорных полей, алгебра голономии которого не является неприводимой. Тогда его спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда многообразие (M, g) — прямое произведение спинорного кэлерова многообразия, не являющегося Риччи-плоским, и спинорного риманова многообразия, спинорное расслоение которого допускает одномерное параллельное комплексное подрасслоение.*

Доказательство. По теореме де Рама многообразие (M, g) можно разложить в прямое произведение односвязных неразложимых полных римановых многообразий и, возможно, плоского многообразия (см., например, [11]). Римановы многообразия в этом расслоении автоматически спинорные, а спинорное расслоение S многообразия (M, g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждое многообразие из разложения.

Теорема 2. *Пусть (M, g) — локально неразложимое n-мерное односвязное спинорное кэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским. Тогда его спинорное расслоение S допускает в точности два параллельных одномерных комплексных подрасслоения.*

Утверждение теоремы следует из более общей теоремы 7, которая будет доказана ниже.

4. Лоренцевы многообразия

В этом разделе рассмотрим лоренцевы многообразия (M, g), т. е. псевдоримановы многообразия сигнатуры $(1, n+1)$, $n \geq 0$. Алгебры голономии лоренцевых спинорных многообразий, допускающих параллельные спинорные поля, классифицированы в [4, 5]. Предположим, что спинорное расслоение многообразия (M, g) допускает одномерное параллельное комплексное подрасслоение и на нем нет ненулевых параллельных спинорных полей.

Теорема 3. *Пусть (M, g) — односвязное полное спинорное лоренцево многообразие. Предположим, что на (M, g) нет ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих утверждений:*

1) *(M, g) представляет собой прямое произведение многообразия $(\mathbb{R}, -(dt)^2)$ и спинорного риманова многообразия (N, h) такого, что спинорное расслоение многообразия (N, h) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение и на нем нет параллельных спинорных полей;*

2) *(M, g) — прямое произведение неразложимого спинорного лоренцева многообразия и спинорного риманова многообразия (N, h) таких, что спинорные расслоения обоих многообразий допускают параллельные одномерные комплексные подрасслоения и по крайней мере на одном из этих многообразий нет параллельных спинорных полей.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы Ву, подобное утверждение доказано в [4, 5].

Заметим, что если многообразие (M,g) допускает параллельное спинорное поле, то имеет место аналог теоремы 3, в которой (N,h) допускает параллельное спинорное поле [4, 5].

Рассмотрим неразложимое лоренцево многообразие (M,g). Предположим, что спинорное расслоение многообразия (M,g) допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение l. Пусть $s\in\Gamma(l)$ — произвольное локальное сечение расслоения l, не обращающееся в нуль. Пусть $p\in\Gamma(TM)$ — соответствующий поток Дирака. Векторное поле p определяется равенством

$$g(p,X)=-\langle X\cdot s,s\rangle,$$

где $\langle,\rangle$ — эрмитово произведение на S. Утверждаем, что p — рекуррентное векторное поле. В самом деле, следуя вычислениям из [5], для произвольных векторных полей X и Y имеем

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y p,X)&=Y(g(p,X))-g(p,\nabla_Y X)=-(Y(\langle X\cdot s,s\rangle)-\langle\nabla_Y X\cdot s,s\rangle)\\ &=-\big(\langle\nabla_Y X\cdot s,s\rangle+\big\langle X\cdot\nabla^S_Y s,s\big\rangle+\big\langle X\cdot s,\nabla^S_Y s\big\rangle-\big\langle\nabla_Y X\cdot s,s\big\rangle\big)\\ &=-(\theta(Y)+\overline{\theta(Y)})\langle X\cdot s,s\rangle=(\theta(Y)+\overline{\theta(Y)})g(p,X).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nabla_Y p=2\,\mathrm{Re}(\theta)(Y)p. \tag{4}$$

В случае лоренцевых многообразий поток Дирака удовлетворяет $g(p,p)\le 0$, а нулевые точки поля p совпадают с нулевыми точками поля s. Так как s не обращается в нуль, а p — рекуррентное поле, то либо $g(p,p)<0$, либо $g(p,p)=0$. В первом случае многообразие разложимо. Таким образом, p — изотропное рекуррентное векторное поле, а многообразие (M,g) допускает параллельное распределение изотропных прямых. Алгебры голономии таких многообразий классифицированы в [11–14]. Напомним эту классификацию.

Пусть (M,g) — локально неразложимое лоренцево многообразие размерности $n+2$. Предположим, что (M,g) допускает параллельное распределение изотропных прямых. Касательное пространство к многообразию (M,g) можно отождествить с пространством Минковского $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Зафиксируем базис $p,e_1,\dots,e_n,q$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$ такой, что ненулевыми значениями метрики являются $g(p,q)=g(q,p)=1$ и $g(e_i,e_i)=1$. Пусть $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{1,n+1}$ — евклидово подпространство, натянутое на векторы $e_1,\dots,e_n$. Предположим, что прямая $\mathbb{R}p$ соответствует параллельному распределению изотропных прямых. Пусть $\mathfrak{sim}(n)$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{so}(1,n+1)$, сохраняющая изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Алгебру Ли $\mathfrak{sim}(n)$ можно отождествить со следующей матричной алгеброй:

$$\mathfrak{sim}(n)=\left\{\begin{pmatrix} a & X^t & 0\\ 0 & A & -X\\ 0 & 0 & -a\end{pmatrix}\;\middle|\; a\in\mathbb{R},\ A\in\mathfrak{so}(n),\ X\in\mathbb{R}^n\right\}.$$

Будем обозначать элементы алгебры Ли $\mathfrak{sim}(n)$ тройками (a,A,X). Получаем разложение

$$\mathfrak{sim}(n)=(\mathbb{R}\oplus\mathfrak{so}(n))\ltimes\mathbb{R}^n,$$

означающее, что $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{so}(n)\subset\mathfrak{sim}(n)$ — подалгебра, а $\mathbb{R}^n\subset\mathfrak{sim}(n)$ — идеал, и скобки Ли элементов из $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{so}(n)$ и $\mathbb{R}^n$ даны стандартным представлением алгебры Ли $\mathbb{R}\oplus\mathfrak{so}(n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Алгебра голономии $\mathfrak{g}$ многообразия (M,g) содержится в $\mathfrak{sim}(n)$. Каждая подалгебра $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{so}(n)$ допускает разложение $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'\oplus\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h}'=[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$, а $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{h}$.

Теорема 4. *Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ является алгеброй голономии локально неразложимого лоренцева многообразия тогда и только тогда, когда она сопряжена одной из следующих подалгебр.*

Тип 1. $\mathfrak{g}^{1,\mathfrak{h}} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — *алгебра голономии некоторого риманова многообразия.*

Тип 2. $\mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — *алгебра голономии некоторого риманова многообразия.*

Тип 3. $\mathfrak{g}^{3,\mathfrak{h},\varphi} = \{(\varphi(A), A, 0) \mid A \in \mathfrak{h}\} \ltimes \mathbb{R}^n$, *где* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — *алгебра голономии некоторого риманова многообразия,* $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}$, *а* $\varphi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}$ — *ненулевое линейное отображение со свойством* $\varphi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Тип 4. $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi} = \{(0, A, X + \psi(A)) \mid A \in \mathfrak{h}, X \in \mathbb{R}^m\}$, *где* $0 < m < n$ *целое,* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(m)$ — *алгебра голономии некоторого риманова многообразия,* $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \geq n - m$, *а* $\psi : \mathfrak{h} \to \mathbb{R}^{n-m}$ — *сюръективное линейное отображение со свойством* $\psi|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

Для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ имеют место ортогональное разложение

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{n_s} \oplus \mathbb{R}^{n_{s+1}}$$

и соответствующее разложение в прямую сумму идеалов

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{h}_s \oplus \{0\}, \tag{5}$$

при этом $\mathfrak{h}$ обнуляет $\mathbb{R}^{n_{s+1}}$, $\mathfrak{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ для $i \neq j$ и $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ — неприводимая подалгебра для $1 \leq i \leq s$. Более того, подалгебры $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ являются алгебрами голономии римановых многообразий.

В [4, 5] показано, что (M, g) допускает параллельное спинорное поле тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{2,\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \ltimes \mathbb{R}^n$, и в разложении (5) для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ каждая из подалгебр $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ совпадает с одной из алгебр Ли $\mathfrak{su}\big(\frac{n_i}{2}\big)$, $\mathfrak{sp}\big(\frac{n_i}{4}\big)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$.

Теорема 5. *Пусть* (M, g) — *односвязное локально неразложимое* $(n+2)$*-мерное спинорное лоренцево многообразие. Тогда спинорное расслоение* S *допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда* (M, g) *допускает параллельное распределение изотропных прямых (т. е. его алгебра голономии* $\mathfrak{g}$ *содержится в* $\mathfrak{sim}(n)$*), а в разложении* (5) *для подалгебры* $\mathfrak{h} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)}\mathfrak{g}$ *каждая из подалгебр* $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{so}(n_i)$ *совпадает с одной из алгебр Ли* $\mathfrak{u}\big(\frac{n_i}{2}\big)$, $\mathfrak{su}\big(\frac{n_i}{2}\big)$, $\mathfrak{sp}\big(\frac{n_i}{4}\big)$, G_2, $\mathfrak{spin}(7)$ *или с алгеброй голономии неразложимого симметрического кэлерова пространства. Число параллельных одномерных комплексных подрасслоений расслоения* S *равно числу одномерных комплексных подпространств модуля* Δ_n*, сохраняемых алгеброй* $\mathfrak{h}$.

Доказательство. Достаточно для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ из теоремы 4 найти все одномерные комплексные инвариантные подпространства в $\Delta_{1,n+1}$.

При отождествлении $\mathfrak{so}(1, n+1) \simeq \Lambda^2\mathbb{R}^{1,n+1}$ элемент $(a, A, X) \in \mathfrak{sim}(n)$ соответствует бивектору $-ap \wedge q + A - p \wedge X$. Напомним, что

$$\Delta_{1,n+1} \simeq \Delta_n \otimes \Delta_{1,1}, \quad \Delta_{1,1} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Рассмотрим векторы $e_- = \frac{\sqrt{2}}{2}(p - q)$, $e_+ = \frac{\sqrt{2}}{2}(p + q)$ и ортонормированный базис $e_-, e_+, e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^{1,n+1}$. Заметим, что $p = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_- + e_+)$ и $q = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_- - e_+)$.

Найдем все комплексные одномерные $p \wedge \mathbb{R}^n$-инвариантные подмодули в $\Delta_{1,n+1}$. Предположим, что $w \in \Delta_{1,n+1}$ — спинор такой, что $(p \wedge e_i) \cdot w = c_i w$,

$c_i \in \mathbb{C}$, для всех $i = 1, \dots, n$. Пусть $w = w_+ \otimes u(1) + w_- \otimes u(-1)$, где $w_\pm \in \Delta_n$. Используя (2), (3) и вычисления из [4, 5], легко установить, что

$$(e_i \wedge p) \cdot w = \frac{\sqrt{2}}{2} e_i \cdot (e_- + e_+) \cdot w = \sqrt{2}(e_i \cdot w_-) \otimes u(1).$$

Следовательно, равенства $(p \wedge e_i) \cdot w = c_i w$ влекут $c_i = 0$, $e_i \cdot w_- = 0$. Так как векторы e_i действуют в Δ_n как изоморфизмы, имеем $w_- = 0$. Таким образом, $w = w_+ \otimes u(1)$, и все комплексные одномерные $p \wedge \mathbb{R}^n$-инвариантные подмодули в $\Delta_{1,n+1}$ содержатся в $\Delta_n \otimes u(1)$. Более того, представление алгебры $p \wedge \mathbb{R}^n$ в этом модуле тривиально. То же самое утверждение имеет место для $p \wedge \mathbb{R}^m$ в случае алгебры Ли $\mathfrak{g}^{4,\mathfrak{h},m,\psi}$. Далее,

$$(p \wedge q) \cdot (w_+ \otimes u(1)) = 2w_+ \otimes u(1), \quad A(w_+ \otimes u(1)) = A(w_+) \otimes u(1)$$

для всех $w_+ \in \Delta_n$ и $A \in \mathfrak{so}(n)$. Это показывает, что все $\mathfrak{g}$-инвариантные одномерные подпространства модуля $\Delta_{1,n+1}$ имеют вид $l \otimes u(1)$, где $l \subset \Delta_n$ — $\mathfrak{h}$-инвариантное одномерное подпространство. Теорема верна.

Примеры аналитических лоренцевых многообразий с каждой возможной алгеброй голономии, в частности с алгебрами голономии из теоремы 5, можно получить, используя конструкцию из [11].

Рассмотрим пример. Пусть (M, g) — односвязное спинорное лоренцево многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{g} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{h}) \ltimes \mathbb{R}^n$, где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(n)$ — алгебра голономии риманова многообразия, допускающего ненулевое параллельное спинорное поле. Согласно теореме 5 на (M, g) локально существует рекуррентное спинорное поле s (рассматривая достаточно малое подмножество многообразия (M, g), можем предполагать, что s определено глобально). Предположение об алгебре $\mathfrak{h}$ и доказательство теоремы 5 показывают, что соответствующая 1-форма θ вещественнозначная. Тот факт, что многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{g}$ не допускает никакого ненулевого параллельного векторного поля, и равенство (4) показывают, что $d\theta \neq 0$. Таким образом, утверждение теоремы 1 из [2], упомянутое во введении, не имеет места для лоренцевых многообразий.

5. Псевдоримановы многообразия с неприводимыми алгебрами голономии

Теорема 6. *Пусть (M, g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s) с неприводимой алгеброй голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r, s)$. Тогда спинорное расслоение S этого многообразия допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда алгебра голономии $\mathfrak{h}$ — одна из алгебр $\mathfrak{u}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$, $\mathfrak{su}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{r}{4}, \frac{s}{2}\right)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $G^*_{2(2)} \subset \mathfrak{so}(3, 4)$, $G_2^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{so}(7, 7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, $\mathfrak{spin}(3, 4) \subset \mathfrak{so}(4, 4)$, $\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(8, 8)$ или (M, g) — локально симметрическое псевдокэлерово многообразие.*

Доказательство. Напомним, что неприводимые алгебры голономии односвязных псевдоримановых многообразий (M, g), допускающих ненулевые параллельные спинорные поля, исчерпываются алгебрами $\mathfrak{su}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$, $\mathfrak{sp}\left(\frac{r}{4}, \frac{s}{2}\right)$, $G_2 \subset \mathfrak{so}(7)$, $G^*_{2(2)} \subset \mathfrak{so}(3, 4)$, $G_2^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{so}(7, 7)$, $\mathfrak{spin}(7) \subset \mathfrak{so}(8)$, $\mathfrak{spin}(3, 4) \subset \mathfrak{so}(4, 4)$, $\mathfrak{spin}(7, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{so}(8, 8)$ [6]. Из результатов работы [15] следует, что многообразия с каждой из этих алгебр голономии являются Риччи-плоскими.

Предположим, что многообразие (M, g) не Риччи-плоское, а его спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение l.

Пусть s — локальное сечение расслоения l, определенное в окрестности некоторой точки $y \in M$. Уравнение (1) влечет

$$R_y^S(X,Y)s_y = (d\theta)_y(X,Y)s_y \tag{6}$$

для всех $X, Y \in T_yM$. Здесь R^S — тензор кривизны связности ∇^S. Это уравнение показывает, что $R_y^S(X,Y)$ действует на l_y как умножение на комплексные числа. Из теоремы Амброза — Зингера следует, что алгебра голономии $\mathfrak{h}_x$, $x \in M$, многообразия (M,g) действует на l_x как умножение на комплексные числа, и это действие нетривиально. Поскольку подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(r,s)$ неприводима, она является редуктивной алгеброй Ли. Поэтому $\mathfrak{h}$ содержит некоторый коммутативный идеал. Согласно лемме Шура этот идеал порожден комплексной структурой $J \in \mathfrak{u}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$, следовательно, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{u}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$. Так как $\mathfrak{su}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$ обнуляет два комплексных одномерных подпространства в $\Delta_{r,s}$ [6], $\mathfrak{u}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$ сохраняет эти два подпространства. Следовательно, спинорное расслоение каждого псевдокэлерова многообразия допускает по крайней мере два параллельных одномерных комплексных подрасслоения.

Следствие 3. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие с неприводимой алгеброй голономии и без ненулевых параллельных спинорных полей. Тогда спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение тогда и только тогда, когда (M,g) — псевдокэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским.*

Теорема 7. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное псевдокэлерово многообразие, не являющееся Риччи-плоским, с неприводимой алгеброй голономии. Тогда его спинорное расслоение S допускает в точности два параллельных одномерных комплексных подрасслоения.*

Доказательство. Пусть (M,g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие, не являющееся Риччи-плоским, с неприводимой алгеброй голономии. Предположим, что спинорное расслоение S допускает параллельное одномерное комплексное подрасслоение l. Пусть s — локальное сечение расслоения l, т. е. s — рекуррентное спинорное поле. В доказательстве теоремы 6 видели, что $\mathfrak{h}$ содержит одномерный коммутативный идеал, порожденный комплексной структурой $J \in \mathfrak{u}\left(\frac{r}{2}, \frac{s}{2}\right)$, а в уравнении (6) действие эндоморфизма $R_x(X,Y)$ на s_x совпадает с действием его проекции $\mathbb{R}J \subset \mathfrak{h}_x$. Следовательно, уравнение (6) влечет равенство $(d\theta(X,Y))^2 = -a(X,Y)^2$, $a(X,y) \in \mathbb{R}$, т. е. $d\theta = \mathrm{i}\omega$ для некоторой вещественнозначной 2-формы ω на многообразии M.

Будем следовать идеям из [8, 9]. Вычисления, аналогичные вычислениям из леммы 3.1 в [8] и теоремы 2 из [2], влекут уравнение

$$\mathrm{Ric}(X) \cdot s = \mathrm{i}(X \lrcorner \omega) \cdot s \tag{7}$$

для всех векторных полей X. Здесь Ric — оператор Риччи. Рассмотрим распределения T и E, определяемые следующим образом:

$$T_x = \{X \in T_xM \mid X \cdot s_x = 0\},$$

$$E_x = \{X \in T_xM \mid \exists Y \in T_xM,\ X \cdot s_x = \mathrm{i}Y \cdot s_x\}.$$

Поскольку мы выбрали s в некоторой окрестности произвольной точки многообразия и любые два таких спинорных поля пропорциональны в пересечении областей их определения, распределения T и E определены глобально на M.

Мы утверждаем, что оба распределения параллельны. Пусть $X \in \Gamma(T)$, тогда для каждого локального векторного поля Z имеем

$$(\nabla_Z X) \cdot s = \nabla^S_Z (X \cdot s) - X \cdot \left(\nabla^S_Z s\right) = 0 - X \cdot (\theta(Z)s) = -\theta(Z)(X \cdot s) = 0,$$

т. е. T параллельно. Пусть $X \in \Gamma(E)$, тогда существует локальное векторное поле Y такое, что $X \cdot s = \mathrm{i} Y \cdot s$. Для произвольного локального векторного поля Z имеем

$$\begin{aligned}(\nabla_Z X) \cdot s = \nabla^S_Z (X \cdot s) - X \cdot \left(\nabla^S_Z s\right) &= \nabla^S_Z (\mathrm{i} Y \cdot s) - X \cdot (\theta(Z)s) \\ &= \mathrm{i}(\nabla_Z Y + \theta(Z)Y - \theta(Z)Y) \cdot s = \mathrm{i}(\nabla_Z Y) \cdot s,\end{aligned}$$

т. е. E параллельно. Так как $\mathrm{Ric} \neq 0$ и $w = \mathrm{id}\,\theta \neq 0$, равенство (7) показывает, что $T \neq TM$ и $E \neq 0$. Поскольку алгебра голономии многообразия (M, g) неприводима, имеем $T = 0$ и $E = TM$. Таким образом, для каждого локального векторного поля X существует единственное локальное векторное поле Y такое, что $X \cdot s = \mathrm{i} Y \cdot s$. Это определяет эндоморфизм касательного расслоения I такой, что

$$X \cdot s = \mathrm{i} I(X) \cdot s. \tag{8}$$

Следовательно,

$$X \cdot s = \mathrm{i} I(X) \cdot s = -I^2(X) \cdot s, \quad (X + I^2(X)) \cdot s = 0.$$

Так как $T = 0$, то $I^2(X) = -X$, т. е. I — почти комплексная структура на M. Покажем, что I — g-ортогональная структура. Имеем

$$\begin{aligned}2g(I(X), I(Y))s &= I(X) \cdot I(Y) \cdot s + I(Y) \cdot I(X) \cdot s = -\mathrm{i}(I(X) \cdot Y \cdot s + I(Y) \cdot X \cdot s) \\ &= -\mathrm{i}(2g(I(X), Y)s - Y \cdot I(X) \cdot s + 2g(X, I(Y))s - X \cdot I(Y) \cdot s) \\ &= X \cdot Y \cdot s + Y \cdot X \cdot s - 2\,\mathrm{i}(g(I(X), Y) + g(X, I(Y)))s \\ &= 2g(X, Y)s - 2\,\mathrm{i}(g(I(X), Y) + g(X, I(Y)))s.\end{aligned}$$

Это влечет $g(I(X), I(Y)) = g(X, Y)$. Далее, утверждаем, что структура I параллельная. В самом деле, (8) влечет следующее равенство для всех векторных полей X и Y:

$$\nabla_Y X \cdot s + X \cdot \theta(Y) \cdot s = \mathrm{i}\nabla_Y (IX) \cdot s + \mathrm{i} I(X) \cdot \theta(Y) \cdot s.$$

Следовательно, $\theta(Y)X \cdot s = \mathrm{i}\nabla_Y (IX) \cdot s$. Используя это и равенство (8), примененное к $\nabla_Y X$, получим $0 = \mathrm{i}(\nabla_Y (IX) - I(\nabla_Y X)) \cdot s$. Это показывает, что $\nabla_Y (IX) - I(\nabla_Y X) \in \Gamma(T)$. Следовательно, $\nabla_Y (IX) - I(\nabla_Y X) = 0$, т. е. $\nabla I = 0$. Таким образом, s определяет кэлерову структуру I. Отметим, что это дает другое доказательство теоремы 6.

Предположим, что имеется два рекуррентных спинорных поля s и s_1. Эти поля определяют кэлеровы структуры I и I_1, удовлетворяющие (8) для s и s_1 соответственно. Так как I и I_1 параллельны, их значения I_x и I_{1x} в произвольной точке $x \in M$ коммутируют с алгеброй голономии $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{so}(T_x M, g_x) \simeq \mathfrak{so}(r, s)$. Поскольку $\mathfrak{h}_x \subset \mathfrak{so}(T_x M, g_x)$ неприводима, согласно лемме Шура централизатор алгебры Ли $\mathfrak{h}_x$ в $\mathfrak{so}(T_x M, g_x)$ изоморфен либо $\mathrm{i}\mathbb{R}$, либо $\mathfrak{sp}(1)$. В последнем случае $\mathfrak{h}_x$ должна содержаться в $\mathfrak{sp}\left(\frac{r}{4}, \frac{s}{4}\right)$. Это дает противоречие, поскольку многообразия с такими алгебрами голономии Риччи-плоские. Заключаем, что $I_x = \alpha I_{1x}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Так как $I_x^2 = I_{1x}^2 = -\mathrm{id}$, то $\alpha = \pm 1$. Поскольку оба тензорных поля I и I_1 параллельны, $I = \alpha I_1$.

Предположим, что $I = I_1$. Пусть Ω — псевдокэлерова форма, соответствующая структуре I. Пусть $e_1, \dots, e_m, Ie_1, \dots, Ie_m$ $(r+s=n=2m)$ — локальный ортонормированный базис пространства $\Gamma(TM)$, т. е. $g(e_i,e_i) = g(Ie_i,Ie_i) = k_i$, где $k_i = -1$ для $i = 1,\dots,\frac{r}{2}$ и $k_i = 1$ для $i = \frac{r}{2}+1,\dots,m$. Пусть $e^1,\dots,e^m,(Ie)^1,\dots,(Ie)^m$ — двойственный базис пространства $\Gamma(TM)$. Тогда

$$\Omega = -\sum_{i=1}^{m} k_i (Ie)^i \wedge e^i.$$

Используя это и (8), получаем

$$\Omega\cdot s = -\sum_{i=1}^{m} k_i(Ie_i)\cdot e_i\cdot s = -\,\mathrm{i}\sum_{i=1}^{m} k_i(Ie_i)\cdot(Ie_i)\cdot s = -\,\mathrm{i}ms.$$

Аналогично $\Omega\cdot s_1 = -\,\mathrm{i}ms_1$. Напомним, что имеет место следующее разложение спинорного разложения S псевдокэлерова многообразия:

$$S = \sum_{k=0}^{m} S_k, \quad (S_k)_x \simeq \Lambda^k\mathbb{C}^m,$$

где S_k — собственное пространство, соответствующее собственному значению $(m-2k)\mathrm{i}$ оператора умножения Клиффорда на форму Ω. Получаем, что $s, s_1 \in S_m$. Так как S_m — расслоение ранга 1, s и s_1 пропорциональны и принадлежат одному одномерному параллельному подрасслоению расслоения S. Выше мы видели, что S допускает по крайней мере два параллельных одномерных комплексных подрасслоения. Ясно, что имеются в точности два таких подрасслоения, второе из них соответствует кэлеровой структуре $-I$ (и совпадает с расслоением S_0 ранга 1).

6. Псевдоримановы многообразия нейтральной сигнатуры

Теорема 8. *Пусть (M,g) — односвязное спинорное псевдориманово многообразие нейтральной сигнатуры (n,n), допускающее два взаимно дополнительных параллельных изотропных распределения. Тогда спинорное расслоение S многообразия (M,g) допускает одномерное комплексное подрасслоение.*

Доказательство. Касательное пространство такого многообразия можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^{n,n}$, и оно допускает разложение $\mathbb{R}^{n,n} = W\oplus W_1$, где $W, W_1 \subset \mathbb{R}^{n,n}$ — изотропные подпространства. Алгебра голономии такого многообразия имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \left\{ A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B^T \end{pmatrix} \mid B \in \mathfrak{h} \right\},$$

где $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ — подалгебра, совпадающая с ограничением представления $\tilde{\mathfrak{h}}$ на W. В [7] показано, что $\tilde{\mathfrak{h}}$ обнуляет некоторый элемент в $\Delta_{n,n}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Также показано, что элемент $A \in \tilde{\mathfrak{h}}$ действует в $\Delta_{n,n}$ как

$$\frac{1}{2}n\,\cdot + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(e_i^*\cdot A(e_i) - A(e_i^*)\cdot e_i)\cdot,$$

где $e_1, \dots, e_n$ и $e_1^*, \dots, e_n^*$ — базисы пространств W и W_1 такие, что $g(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$. Следовательно, $A_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$ действует в $\Delta_{n,n}$ как умножение на n. Так как алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})}$ обнуляет некоторый ненулевой элемент в $\Delta_{n,n}$, алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})} = \widetilde{\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})} \oplus \mathbb{R}A_0$ сохраняет соответствующую прямую в $\Delta_{n,n}$. Это доказывает теорему.

7. Связь с параллельными спинорными полями Spin^C- расслоений

Пусть (M, g) — односвязное спинорное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(p, q)$ и спинорным расслоением S. Пусть S^C — Spin^C-расслоение на (M, g), определенное комплексным расслоением прямых L над (M, g) с формой связности $\mathrm{i}A$ и алгеброй голономии $\mathfrak{h}_L \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$. Алгебра голономии $\hat{\mathfrak{h}}$ индуцированной связности на S^C содержится в $\lambda_*(\mathfrak{h}) \oplus \mathrm{i}\mathbb{R} \subset \mathfrak{spin}(p, q) \oplus \mathrm{i}\mathbb{R}$. В [9] показано, что существование ненулевого параллельного спинорного поля в расслоении S^C эквивалентно существованию ненулевого спинора $v \in \Delta_{p,q}$ такого, что $\xi \cdot v = \mathrm{i}tv$ для всех $(\xi, \mathrm{i}t) \in \hat{\mathfrak{h}}$. Следовательно, существование ненулевого параллельного спинорного поля в S^C влечет существование параллельного одномерного комплексного подрасслоения S. В общем случае обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Например, в случае лоренцевых многообразий существование ненулевого параллельного спинорного поля в S^C влечет существование ненулевого параллельного векторного поля на многообразии (M, g) [10], в тоже время выше видели, что существуют лоренцевы многообразия, допускающие ненулевые рекуррентные спинорные поля и вместе с тем не допускающие ненулевых параллельных векторных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hitchin N.* Harmonic spinors // Adv. Math. 1974. V. 14. P. 1–55.
2. *Friedrich Th.* Zur Existenz paralleler Spinorfelder über Riemannschen Mannigfaltigkeiten // Colloq. Math. 1981. V. 44, N 2. P. 277–290.
3. *Wang M.* Parallel spinors and parallel forms // Ann. Global Anal. Geom. 1989. V. 7, N 1. P. 59–68.
4. *Leistner Th.* Lorentzian manifolds with special holonomy and parallel spinors // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 2002. N 69. P. 131–159.
5. *Leistner Th.* Holonomy and parallel spinors in Lorentzian geometry. Berlin: Logos-Verl.; Humboldt-Univ. Berlin, 2003.
6. *Baum H., Kath I.* Parallel spinors and holonomy groups on pseudo-Riemannian spin manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1999. V. 17, N 1. P. 1–17.
7. *Ikemakhen A.* Groupes d'holonomie et spineurs parallèles sur les variétés pseudo-riemanniennes complètement réductibles // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2004. V. 339, N 3. P. 203–208.
8. *Moroianu A.* Parallel and Killing spinors on Spin^c manifolds // Comm. Math. Phys. 1997. V. 187, N 2. P. 417–427.
9. *Ikemakhen A.* Parallel spinors on pseudo-Riemannian Spin^c manifolds // J. Geom. Phys. 2006. V. 56, N 9. P. 1473–1483.
10. *Ikemakhen A.* Parallel spinors on Lorentzian Spin^c manifolds // Differ. Geom. Appl. 2007. V. 25, N 3. P. 299–308.
11. *Galaev A. S.* Metrics that realize all Lorentzian holonomy algebras // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2006. V. 3, N 5–6. P. 1025–1045.
12. *Galaev A. S., Leistner Th.* Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications // Recent developments in pseudo-Riemannian geometry. Zürich: Eur. Math. Soc., 2008. P. 53–96. (ESI Lect. Math. Phys.).

13. *Berard Berhery L., Ikemakhen A.* On the holonomy of Lorentzian manifolds // Proc. Symp. Pure Math. 1993. V. 54. P. 27–40.

14. *Leistner T.* On the classification of Lorentzian holonomy groups // J. Differ. Geom. 2007. V. 76, N 3. P. 423–484.

15. *Armstrong S.* Ricci-flat holonomy: a classification // J. Geom. Phys. 2007. V. 57, N 6. P. 1457–1475.

Статья поступила 18 февраля 2013 г.

Галаев Антон Сергеевич
Университет Градец-Кралове, факультет естественных наук,
ул. Яна Козины, Градец-Кралове 1237, Чехия
`galaevas@gmail.com`