Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 517.545+519.111

О ПОДСЧЕТЕ КРУГОВЫХ КАРТ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

М. А. Дерягина, А. Д. Медных

Аннотация. *Картой* называется замкнутая риманова поверхность S вместе с вложенным в нее графом G таким, что $S\setminus G$ гомеоморфно дизъюнктному объединению открытых дисков. Систематическое исследование карт (dessins d'enfants) было начато в работах Татта в 1960-е гг. и до сих пор активно развивается современными авторами. В данной работе введено понятие *круговой карты* и доказана его эквивалентность понятию карты, допускающей окраску граней в два цвета. Основным результатом является формула для числа круговых карт с заданным числом ребер.

Ключевые слова: круговая карта, риманова поверхность, разветвленное накрытие, двухцветная карта.

Введение

Картой называется замкнутая риманова поверхность S вместе с вложенным в нее графом G таким, что $S\setminus G$ гомеоморфно дизъюнктному объединению открытых дисков. Систематическое исследование карт начато в работах Татта в 1960-е гг., в которых был заложен фундамент теории карт с точки зрения топологии и комбинаторики. Позднее, в своей знаменитой программе (1984), Гротендик связал исследование карт с многими задачами комплексного анализа, комбинаторной теории, теории чисел и теории фуксовых групп. В частности, установлено, что каждая карта на римановой поверхности естественным образом ассоциируется с мероморфной функцией, имеющей не более трех критических значений. Такую функцию называют *функцией Белого.* Две карты G и G' на римановой поверхности S *эквивалентны*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм h, переводящий G в G'. Указанный гомеоморфизм будем называть *изоморфизмом* карт. Карта называется *корневой*, если одно из ее ориентированных ребер рассматривается как корень (т. е. ребро отмечено). Изоморфизм между корневыми картами переводит корень в корень. Рассмотрим классическую задачу Татта о подсчете числа неэквивалентных карт с заданным числом ребер на римановой поверхности заданного рода [1]. Корневая версия этой задачи для рода $g=0$ решена еще самим Таттом. Явная формула для числа корневых карт на торе ($g=1$) получена Арком [2]. В [3] предложен новый метод вычисления числа классов сопряженных подгрупп в произвольной конечно порожденной группе. Приложением этого метода является решение

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–00642, 13–01–00513), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–921.2012.1) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (соглашение № 8206).

проблемы Татта для карт с заданным числом ребер на поверхности заданного рода [4]. Ранее эта проблема была решена только для сферы [5]. С помощью указанного метода также получена новая формула для числа пар близнецов (карт, между которыми существует меняющий ориентацию гомеоморфизм, но не существует сохраняющего ориентацию) с заданным числом ребер [6]. В настоящей работе с помощью указанного метода найдена явная формула для числа круговых карт с заданным числом ребер независимо от рода поверхности.

Авторы выражают благодарность В. А. Лисковцу, С. К. Ландо, С. Г. Басалаеву за полезные обсуждения полученных результатов, а также анонимному рецензенту за полезные замечания, повлекшие заметное улучшение работы.

1. Предварительные сведения

1.1. Основные определения.

Определение 1. *Картой* (S, G) называется замкнутая риманова поверхность S вместе с вложенным в нее графом G таким, что $S \backslash G$ представляет собой дизъюнктное объединение связных компонент, называемых *гранями*, каждая из которых гомеоморфна открытому диску.

Определение 2. Две карты (S, G) и (S_1, G_1) называются *эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S \to S_1$ такой, что $h(G) = G_1$.

Определение 3. Пусть X и Y — линейные связные топологические пространства и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тройка (X, Y, f) называется *накрытием*, если для любого $y \in Y$ существует окрестность V такая, что полный прообраз представляется в виде дизъюнктного объединения

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{\xi} \widetilde{V}_{\xi}$$

открытых в X множеств таких, что $f|_{\widetilde{V}_{\xi}} : \widetilde{V}_{\xi} \to V$ является гомеоморфизмом.

Определение 4. Пусть X — компактное ориентируемое двумерное многообразие, а S^2 — двумерная сфера. Непрерывное отображение $f : X \to S^2$ называется *разветвленным накрытием*, если существует конечное множество $B = \{y_1, y_2, \dots, y_k\} \subset S^2$ такое, что $f|_{X \backslash f^{-1}(B)} : X \backslash f^{-1}(B) \to S^2 \backslash B$ является накрытием. Минимальное множество B, удовлетворяющее указанному выше свойству, называется *множеством ветвления* f.

Определение 5. *Элементарной круговой картой* $(S^2, G_\circ)$ будем называть карту на сфере S^2, имеющую одно ребро, одну вершину и две грани (внутреннюю и внешнюю).

Определение 6. *Круговой картой* будем называть карту, накрывающую элементарную круговую карту. Другими словами, (S, G) — круговая карта, если существует разветвленное накрытие $f : (S, G) \to (S^2, G_\circ)$, допускающее ветвление только над серединами граней и вершиной $G_\circ$ и такое, что $f(G) = G_\circ$.

Примеры карт и их иллюстрации можно найти в [7].

Следующая лемма дает наглядную геометрическую характеристику круговых карт.

Лемма 1.1. *Карта круговая тогда и только тогда, когда ее грани можно раскрасить в два цвета таким образом, чтобы каждое ребро разграничивало два разных цвета.*

Доказательство. Пусть карта (S, G) круговая. Докажем, что ее грани можно раскрасить в два цвета. По определению круговой карты существует разветвленное накрытие $f : (S, G) \to (S^2, G_\circ)$, допускающее ветвление только над серединами граней и вершиной $G_\circ$, и $f(G) = G_\circ$. Заметим, что элементарную круговую карту $G_\circ$ можно раскрасить в два цвета (например, внутреннюю грань окрасим в черный, внешнюю — в белый цвета). Локально если взять окрестность V некоторой точки ребра $G_\circ$, то в этой окрестности ребро разделяет два цвета. По определению накрытия получаем, что на исходной карте окрестность некоторой точки ребра также разделена ребром на два цвета. Так как на ребрах нет точек ветвления, кроме вершин, раскраску можно поднять на исходную круговую карту (S, G).

Пусть теперь (S, G) — карта, допускающая раскраску граней в два цвета. Белые кружочки отвечают за вершины, черные — за середины ребер, квадратики — за середины граней. Сделаем барицентрическое подразбиение, как показано на рис. 1 (здесь и далее на рисунках жирные линии отвечают за ребра карты, тонкие — за линии барицентрического подразбиения). Тогда существует естественное гомеоморфное отображение f карты (S, G) с барицентрическим подразбиением на раскрашенную четверку треугольников.

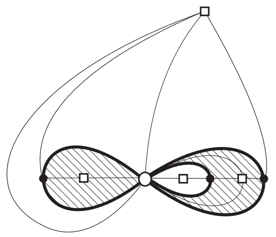

Рис. 1. Карта, раскрашенная в два цвета.

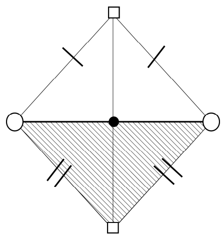

Рис. 2. Раскрашенная четверка треугольников.

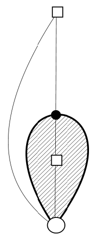

Рис. 3. Элементарная круговая карта.

После отождествления соответствующих сторон этой четверки, как показано на рис. 2, получим элементарную круговую карту (рис. 3).

Таким образом, карта (S, G) допускает отображение на элементарную круговую карту. Отметим, что конформная структура на S^2 с удаленными вершиной и серединами граней элементарной круговой карты поднимается по отображению f до конформной структуры на исходной поверхности S с удаленными вершинами и серединами граней карты G. При этом f становится голоморфным отображением. По теореме Римана об устранении особенностей указанное отображение однозначно продолжается до голоморфного отображения римановой поверхности S на риманову поверхность S^2. Следовательно, f — разветвленное накрытие, а карта (S, G) круговая. $\square$

Следуя [8, с. 57], введем понятие гиперкарты.

Определение 7. *Гиперкартой* называется карта, вершины которой раскрашены в черный и белый цвета так, что каждое ребро соединяет вершины противоположных цветов.

Как можно заметить из доказательства леммы 1.1, у карты есть белые кружочки, отвечающие за ее вершины, и черные, отвечающие за середины ребер (дополнительное построение). Таким образом, произвольную карту можно рассматривать как гиперкарту, где белые вершины — вершины, а черные — середины ребер исходной карты с одним лишь ограничением, что валентности черных вершин одинаковы и равны двум. При этом ребро исходной карты состоит из двух ребер гиперкарты, которые будем называть *полуребрами* исходной карты.

Определение 8. Предположим, что помимо ребер карта может иметь висячие полуребра, т. е. у соответствующей ей гиперкарты валентности черных вершин могут быть равны единице, а не только двум, как ранее. Полученный таким образом объект назовем *картой общего вида.* При этом белые вершины этой гиперкарты будем называть *вершинами* карты общего вида, а черные — *серединами ребер* карты общего вида (даже если полуребро висячее).

Замечание 1. Любую карту можно рассматривать как карту общего вида, полагая количество висячих полуребер равным нулю.

Определение 9. *Элементарной картой* назовем гиперкарту, состоящую из одного ребра, одной белой и одной черной вершин и одной грани.

Замечание 2. Любая карта общего вида естественным образом накрывает элементарную карту.

Поясним это на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим карту общего вида. Белые кружочки отвечают за вершины, черные — за середины ребер, квадратики — за середины граней. Сделаем барицентрическое подразбиение, раскрасим в шахматном порядке (см. рис. 4). Тогда существует естественное отображение f раскрашенной картинки, кроме пары треугольников, общей стороной которых будет висячее полуребро, на следующую пару треугольников (рис. 5).

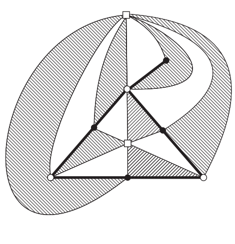

Рис. 4. Карта общего вида.

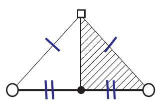

Рис. 5. Раскрашенная пара треугольников.

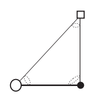

Рис. 6. Сфера с тремя особыми точками.

После отождествления сторон, показанного на рис. 5, легко получается сфера с тремя особыми точками (рис. 6). Отождествляя третью сторону пары треугольников, соответствующих висячему полуребру, также получим сферу с тремя особыми точками. Таким образом, вся раскрашенная картинка отображается на рис. 6.

Конформная структура на сфере с тремя выколотыми особыми точками поднимается по отображению f до конформной структуры на исходной римановой поверхности с удаленными вершинами, серединами граней и серединами ребер. При этом f становится голоморфным отображением. По теореме Римана об устранении особенностей указанное отображение однозначно продолжается до голоморфного отображения римановой поверхности на риманову сферу.

В случае, когда у исходной карты общего вида нет висячих полуребер, эта функция будет так называемой *функцией Белого.* Ее критические значения будут в точности квадратик, белый кружочек и черный кружочек, которые обычно полагают равными $0, 1, \infty$. Функция Белого определена. Во многих важных случаях ее можно выписать в явном виде. Вычислению этих функций посвящены работы Г. Б. Шабата, А. Звонкина и других авторов [9–11].

1.2. Карты общего вида на языке фуксовых групп. В п. 1.1 основные понятия введены на языке топологии, но для дальнейших целей будет уместно переформулировать многие из них с помощью фуксовых групп. Для этого рассмотрим верхнюю полуплоскость $H^2 = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$ как модель плоскости Лобачевского с метрикой $ds^2 = \frac{|dz|^2}{y^2}$, где $z = x + iy$, $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$. Рассмотрим две изометрии плоскости Лобачевского $\alpha : z \to z + 2$ и $\beta : z \to \frac{-1}{z}$. Тогда по теореме Пуанкаре $\Gamma = \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong Z * Z_2$ — фуксова группа, т. е. дискретная группа изометрий плоскости Лобачевского.

Рассмотрим карту общего вида. У каждой вершины рассмотрим достаточно малую окрестность. С учетом того, что поверхность, на которой расположена карта, ориентированная, существует циклический порядок на полуребрах, инцидентных одной вершине. Определим его следующим образом: берем полуребра одно за другим в направлении против часовой стрелки. Обозначим через D множество всех полуребер. Множество описанных выше циклических порядков на полуребрах, соответствующих всем вершинам, есть подстановка на D. Будем обозначать ее через R. Если рассмотреть таким же образом окрестности вокруг середин ребер, то получим подстановку L, состоящую из циклов длин два или один. Заметим, что $L^2 = 1$, а группа $\langle R, L \rangle$, порожденная R и L, транзитивно действует на D. Отметим, что существует естественный гомоморфизм $\Phi : \alpha \to R$, $\beta \to L$ группы Γ на группу $\langle R, L \rangle$.

Известно [12], что Γ является универсальной фуксовой группой, униформизирующей элементарную карту, и каждой карте общего вида сопоставляется подгруппа группы Γ. Более точно, элементарная карта есть фактор-пространство H^2/Γ, а карта общего вида с m полуребрами — фактор-пространство H^2/K, где $K <_m \Gamma$. Поясним, что $H^2/K = \{Kx,\ x \in H^2\}$ — множество орбит, рассматриваемое как риманова поверхность с индуцированной из H^2 метрикой, причем $Kx = [x] = \{y \in H^2 : (\exists \delta \in K)\ \delta x = y\}$. При этом $\varphi : H^2/K \to H^2/\Gamma$ есть накрытие, индуцированное групповым включением $K <_m \Gamma$, т. е. $\varphi : Kx \to \Gamma x$.

Отношение эквивалентности карт общего вида на языке фуксовых групп можно сформулировать следующим образом [13].

Факт 1. *Две карты H^2/K и H^2/K' эквивалентны тогда и только тогда, когда группы K и K' сопряжены в группе Γ, т. е. $(\exists \delta \in \Gamma)\ K' = \delta K \delta^{-1}$.*

Элементарная круговая карта представляет собой фактор-пространство H^2/Γ^+, где $\Gamma^+ = \langle \alpha, \beta\alpha\beta^{-1} \rangle$ — фуксова группа, свободно порожденная элементами $\alpha, \beta\alpha\beta^{-1}$, и $\Gamma^+ <_2 \Gamma$.

Из определения следует, что круговая карта представляется в виде H^2/K, $K <_e \Gamma^+$, где e — количество ребер карты.

Наша главная проблема: посчитать число круговых карт с e ребрами с точностью до эквивалентности или, что то же, посчитать число подгрупп индекса e в группе Γ^+ с точностью до сопряжения в группе Γ.

Замечание 3. Число подгрупп индекса n (без сопряжения) в группе Γ^+, которая изоморфна свободной группе ранга 2, подсчитано Холлом [14].

Замечание 4. Число подгрупп индекса n в группе Γ^+ с точностью до сопряжения в Γ^+, т. е. число классов сопряженных подгрупп индекса n, подсчитано В. А. Лисковцом [15].

Общий подход решения нашей задачи предложен в [16]. Нам нужно получить конкретные аналитические формулы, исходя из их общего вида.

1.3. Подсчет подгрупп в свободной группе F_r ранга r. Напомним несколько известных результатов из комбинаторной теории групп.

Задача Холла. *Посчитать число подгрупп индекса n в свободной группе F_r.*

Рассмотрим сначала более общий случай. Пусть $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_r\rangle$ — некоторая группа на r порождающих. Если есть подгруппа H индекса n в группе G, то есть и разложение на классы смежности: $G = Hg_1 + Hg_2 + \dots + Hg_n$. Тогда G действует на множестве из n элементов $\{Hg_1, Hg_2, \dots, Hg_n\}$ по правилу

$$G \ni g : Hg_i \to Hg_i g, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, имеем гомоморфизм группы G в группу подстановок S_n, определенный по правилу

$$\varphi : g \to \begin{pmatrix} Hg_1, & Hg_2, & \dots, & Hg_n \\ Hg_1 g, & Hg_2 g, & \dots, & Hg_n g \end{pmatrix} \in S_n.$$

Без ограничения общности можем считать, что $g_1 = 1$ (так как G — группа). В этом случае $Hg_1 = H$ и справедливо свойство $Hg_1 g = Hg = H \Leftrightarrow g \in H$. Другими словами, образ $g \in H$ в S_n имеет по крайней мере один неподвижный элемент, стоящий на первом месте, т. е. H. Этим полностью характеризуются элементы группы H.

Положим $\varphi(G) = \mathbf{G}$ и $\varphi(H) = \mathbf{H}$. Тогда справедливы следующие свойства.

1. $\mathbf{G}$ — транзитивная подгруппа группы S_n (или φ — *транзитивный гомоморфизм*).

2. $\mathbf{H} <_n \mathbf{G}$, т. е. $\mathbf{H}$ — подгруппа индекса n в группе $\mathbf{G}$.

3. $\mathbf{H} = \mathbf{G}|_1$, т. е. $\mathbf{H}$ — стабилизатор группы $\mathbf{G}$, действующий на множестве $\{Hg_1, Hg_2, \dots, Hg_n\} := \{1, 2, \dots, n\}$ и оставляющий на месте $Hg_1 = H$ (или 1).

Обратно, если $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют свойствам 1–3, то $H = \varphi^{-1}(\mathbf{H})$ — подгруппа индекса n в группе G. Тем самым описание подгрупп индекса n в G сводится к описанию транзитивных гомоморфизмов группы G в группу S_n.

В нашем рассмотрении класс смежности $Hg_1 = H$ фиксирован. Оставшиеся классы $Hg_2, Hg_3, \dots, Hg_n \neq H$ выбраны произвольным образом (они все между собой различны). Такой выбор можно сделать $(n-1)!$ способами.

Как результат предыдущих рассуждений имеем фундаментальное соотношение, сформулированное в следующей лемме.

Лемма 1.2. *Число подгрупп индекса n в группе G равно числу транзитивных гомоморфизмов G в S_n, деленному на $(n-1)!$.*

Справедлива следующая лемма, восходящая к Гурвицу [17].

Лемма 1.3. *Число B_n гомоморфизмов $\varphi : G \to S_n$ и число T_n транзитивных гомоморфизмов связаны следующим соотношением Гурвица:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k}{k!} z^k = \log \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k,$$

где для удобства положено $B_0 = 1$, $T_0 = 0$.

Если приравнять коэффициенты при равных степенях z^n в указанных в лемме 1.3 степенных рядах, то получатся равенства

$$B_n = \sum_{i+j=n} \binom{n-1}{j} T_i B_j \tag{1}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \dots$.

В случае задачи Холла $G = F_r = \langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle$ есть свободная группа на r порождающих. Тогда число B_n всех гомоморфизмов F_r в S_n равно $(n!)^r$, а число транзитивных представлений T_n группы F_r в S_n определяется по рекуррентной формуле (1), которую удобно переписать в следующем виде:

$$T_n = (n!)^r - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)!((n-i)!)^{r-1}}{(i-1)!} T_i\,.$$

Поскольку по лемме 1.2 число подгрупп M_n и число транзитивных гомоморфизмов T_n связаны соотношением $M_n = \frac{T_n}{(n-1)!}$, имеем следующую рекуррентную формулу Холла для числа подгрупп индекса n в свободной группе F_r:

$$M_n = n(n!)^{r-1} - \sum_{i=1}^{n-1} ((n-i)!)^{r-1} M_i\,, \tag{2}$$

откуда $M_1 = 1$, $M_2 = 2^r - 1$, $M_3 = 3^r \cdot 2^{r-1} - 3 \cdot 2^{r-1} + 1$ и т. д.

Рассмотрим задачу о нахождении числа классов сопряженных подгрупп индекса n в свободной группе F_r. Ее решение получено В. А. Лисковцом и сформулировано в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Число N_n классов сопряженных подгрупп индекса n в свободной группе F_r определяется по формуле*

$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{l|n,\, lm=n} \sum_{d|l} \mu\left(\frac{l}{d}\right) d^{(r-1)m+1} M_m,$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

Элементарное доказательство этой теоремы приведено в [3].

1.4. Общие теоремы. Остановимся более подробно на результатах, полученных в [16].

Рассмотрим конечно порожденную группу Λ. Пусть P — некоторое свойство подгрупп группы Λ, инвариантное относительно сопряжения (например, быть нормальной, быть без элементов конечного порядка, быть ориентируемой и т. д.). Немного модифицируя аргументы из [3], имеем следующий результат, полученный ранее в [4].

Теорема 1.2. *Пусть Λ — произвольная конечно порожденная группа. Тогда число сопряженных классов подгрупп индекса n в группе Λ, имеющих свойство P, задается формулой*

$$c^P_\Lambda(n) = \frac{1}{n}\sum_{l|n,\, lm=n}\ \sum_{K<_m\Lambda} |\operatorname{Epi}^P(K, Z_l)|,$$

где сумма $\sum\limits_{K<_m\Lambda}$ *берется по всем подгруппам K индекса m в группе Λ, а* $|\operatorname{Epi}^P(K, Z_l)|$ *— число эпиморфизмов группы K на циклическую группу Z_l порядка l, ядро которых имеет свойство P.*

Предположим теперь, что $\Lambda = (\Lambda, \omega)$ — конечно порожденная группа с нетривиальной знаковой структурой. Это означает, что существует гомоморфизм $\omega : \Lambda \to Z_2$, ядро которого $\Lambda^+ = \ker\omega$ состоит из *положительных* элементов группы Λ. Соответственно *отрицательными* элементами Λ называются элементы дополнения $\Lambda^- = \Lambda\backslash\Lambda^+$. Характерный пример группы Λ с нетривиальной знаковой структурой — фундаментальная группа неориентируемого многообразия. В этом случае Λ^+ соответствует фундаментальной группе ориентируемого дубля указанного многообразия. Подгруппа K группы Λ называется *ориентируемой*, если она лежит в Λ^+, и *неориентируемой* в противном случае. Используя теорему 1.2, получим следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть Λ — произвольная конечно порожденная группа с нетривиальной знаковой структурой. Число сопряженных классов неориентируемых подгрупп индекса n в группе Λ задается формулой*

$$c^-_\Lambda(n) = \frac{1}{n}\sum_{l|n,\, lm=n}\ \sum_{K^-<_m\Lambda} |\operatorname{Epi}^-(K^-, Z_l)|,$$

где сумма $\sum\limits_{K^-<_m\Lambda}$ *берется по всем неориентируемым подгруппам индекса m в группе Λ, а* $|\operatorname{Epi}^-(K^-, Z_l)|$ *— число эпиморфизмов группы K^- на циклическую группу Z_l порядка l с неориентируемым ядром.*

Пусть M — связное неориентируемое многообразие с конечно порожденной фундаментальной группой Λ. Тогда группа Λ действует как группа гомеоморфизмов на универсальном накрытии $\widetilde{M}$ многообразия M. Обозначим через Λ^+ подгруппу индекса два в группе Λ, состоящую из всех сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Тогда Λ допускает нетривиальную знаковую структуру с множеством положительных элементов Λ^+. Отождествим классы эквивалентности ориентируемых накрытий M и классы сопряженности ориентируемых подгрупп в Λ. Имеет место.

Теорема 1.4 [16]. *Пусть Λ — конечно порожденная группа с нетривиальной знаковой структурой. Обозначим через Λ^+ группу положительных элементов группы Λ. Тогда число классов сопряженности ориентируемых подгрупп индекса $2n$ в группе Λ задается формулой*

$$c^+_\Lambda(2n) = \frac{1}{2n}\sum_{l|n\, lm=n}\Big(\sum_{K^+<_m\Lambda^+} |\operatorname{Epi}(K^+, Z_l)| + \sum_{K^-<_m\Lambda} |\operatorname{Epi}^+(K^-, Z_{2l})|\Big),$$

где сумма $\sum\limits_{K^-<_m\Lambda}$ *берется по всем неориентируемым подгруппам индекса m в группе Λ, а* $|\operatorname{Epi}^+(K^-, Z_{2l})|$ *— число эпиморфизмов группы K^- на циклическую группу Z_l порядка l с ориентируемым ядром.*

Эти результаты и некоторые другие, также полученные в работе [16], будут служить основным инструментом для подсчета круговых карт с заданным числом ребер.

1.5. Структура групп, униформизирующих карты общего вида. Пусть H^2/K — карта общего вида, где K — подгруппа индекса n группы $\Gamma = \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1\rangle$. Элементы группы Γ^+ будем называть *положительными*, а элементы дополнения $\Gamma^- = \Gamma \backslash \Gamma^+$ — *отрицательными.* Таким образом, элементы $\alpha, \beta\alpha\beta^{-1}$ положительные, а элементы $\beta, \alpha\beta\alpha^{-1}$ отрицательные. Любой элемент группы Γ имеет вид $\delta = \alpha^{n_1}\beta\alpha^{n_2}\beta\dots\alpha^{n_s}\beta$, где $n_1, \dots, n_s$ — целые числа. При этом если s четно, то δ — положительный элемент, а если s нечетно, то δ отрицательный.

Введем обозначения: $K = K^+$, если $K < \Gamma^+$, где $\Gamma^+ = \langle \alpha, \beta\alpha\beta^{-1}\rangle$, и $K = K^-$, если $K \not< \Gamma^+$. В первом случаем K назовем *положительной* подгруппой, а во втором — *отрицательной.*

Подгруппу K индекса n группы Γ можно представить следующим образом [18]:

$$K = \Big\{ a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, p_1, \dots, p_V, q_1, \dots, q_F, s_1, \dots, s_H : \\ \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{V} p_j \prod_{k=1}^{F} q_k \prod_{l=1}^{H} s_l = 1,\ s_1^2 = \dots = s_H^2 = 1 \Big\}, \quad (3)$$

где g — род римановой поверхности, на которой расположена карта общего вида, элементы a_i, b_i, где $i = 1, \dots, g$, отвечают за риманову поверхность, V — количество вершин, F — количество граней, H — количество висячих полуребер исходной карты общего вида.

Замечание 5. В формуле (3) числа n и H не могут быть произвольными, так как существует связь между индексом n подгруппы K группы Γ и числом висячих полуребер H соответствующей карты общего вида. Индекс n равен числу всех полуребер карты общего вида. Значит, $\frac{n-H}{2}$ должно быть целым и неотрицательным, так как у карты общего вида H висячих полуребер, а остальные полуребра должны составляться в пару (ребро).

Замечание 6. Всюду далее выражение «подгруппа K группы Γ имеет H порождающих конечного порядка» будет означать, что эта подгруппа имеет H порождающих конечного порядка в вышеуказанном представлении (3).

Определим, какие из порождающих группы K будут отрицательными, а какие положительными элементами. Заметим, что в общем случае ничего не можем сказать о знаках элементов a_i, b_i, где $i = 1, \dots, g$. Элементы s_l, отвечающие за висячие полуребра, где $l = 1, \dots, H$, всегда отрицательны, так как сопряжены β. Будем обозначать их через $s_l = s_l^-$ для всех $l = 1, \dots, H$. Элементы q_k для $k = 1, \dots, F$ отвечают за середины граней и всегда положительны, так как сопряжены степеням α. Будем писать $q_k = q_k^+$. Элементы p_j, где $j = 1, \dots, V$, отвечающие через вершины, будут как положительными, так и отрицательными, потому что они сопряжены степеням $\alpha\beta$. Пусть V — общее количество вершин, обозначим через V^+ количество положительных вершин, через V^- — количество отрицательных. Тогда $V = V^+ + V^-$. Будем писать

$p_j = p_j^+$ для положительных элементов и $p_j = p_j^-$ — для отрицательных. Учитывая вышесказанное, перепишем представление (3) следующим образом:

$$K = \Big\{ a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, p_1^+, \dots, p_{V^+}^+, p_1^-, \dots, p_{V^-}^-, q_1^+, \dots, q_F^+, s_1^-, \dots, s_H^- : \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j_1=1}^{V^+} p_{j_1}^+ \prod_{j_2=1}^{V^-} p_{j_2}^- \prod_{k=1}^{F} q_k^+ \prod_{l=1}^{H} s_l^- = 1,\ (s_1^-)^2 = \dots = (s_H^-)^2 = 1 \Big\}. \quad (4)$$

Для подгруппы K возможны два случая: она положительна или отрицательна.

Рассмотрим первый случай. Пусть подгруппа $K = K^+$ положительна. Тогда у ее карты нет отрицательных вершин и висячих полуребер, т. е. $V^- = 0$ и $H = 0$, и все элементы a_i, b_i, где $i = 1, \dots, g$, положительны. Будем писать $a_i = a_i^+$ и $b_i = b_i^+$ для всех $i = 1, \dots, g$. Для $K = K^+$ представление (4) перепишется в виде

$$K^+ = \Big\{ a_1^+, a_2^+, \dots, a_g^+, b_1^+, b_2^+, \dots, b_g^+, p_1^+, \dots, p_{V^+}^+, q_1^+, \dots, q_F^+ : \prod_{i=1}^{g} [a_i^+, b_i^+] \prod_{j_1=1}^{V^+} p_{j_1}^+ \prod_{k=1}^{F} q_k^+ = 1 \Big\}. \quad (5)$$

Пусть

$$\varphi : a_i^+ \to A_i^+,\ b_i^+ \to B_i^+,\ p_{j_1}^+ \to P_{j_1}^+,\ q_k^+ \to Q_k^+,$$

где $i = 1, \dots, g$, $j_1 = 1, \dots, V^+$ и $k = 1, \dots, F$, является каноническим отображением группы K^+ на группу $H_1(K^+, Z) = K^+/[K^+, K^+]$. Тогда

$$H_1(K^+, Z) = \Big\{ A_1^+, A_2^+, \dots, A_g^+, B_1^+, B_2^+, \dots, B_g^+, P_1^+, \dots, P_{V^+}^+, Q_1^+, \dots, Q_F^+ : \sum_{j_1=1}^{V^+} P_{j_1}^+ + \sum_{k=1}^{F} Q_k^+ = 0 \Big\}. \quad (6)$$

Стало быть, абелева группа $H_1(K^+, Z)$ свободно порождена элементами

$$A_1^+, A_2^+, \dots, A_g^+, B_1^+, B_2^+, \dots, B_g^+, P_1^+, \dots, P_{V^+}^+, Q_1^+, \dots, Q_{F-1}^+.$$

Действительно, Q_F^+ выражается в виде линейной комбинации указанных порождающих. Таким образом, группа гомологий (6) изоморфна $(Z^+)^{2g} \oplus (Z^+)^{V^+} \oplus (Z^+)^{F-1}$.

Воспользуемся формулой Эйлера: $2 - 2g = V + F - E$. В нашем случае $V = V^+$, так как $V^- = 0$. Получим

$$H_1(K^+, Z) = (Z^+)^{E+1}, \quad (7)$$

где E — количество ребер карты общего вида, соответствующей данной подгруппе.

Рассмотрим второй случай. Пусть подгруппа $K = K^-$ отрицательна. Разобьем его на два подслучая: когда группа K^- содержит элементы конечного порядка (т. е. карта общего вида имеет висячие полуребра) и когда не содержит (т. е. карта общего вида является картой). Для удобства группу без кручения будем обозначать через K_0^-, а группу с кручением — через K_H^-, где индекс $H > 0$ характеризует количество порождающих второго порядка в (3).

Приступим к рассмотрению подслучаев. Для группы K_0^- представление (4) перепишется в виде

$$K_0^- = \left\{ a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, p_1, \dots, p_V, q_1^+, \dots, q_F^+ : \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{V} p_j \prod_{k=1}^{F} q_k^+ = 1 \right\}. \quad (8)$$

Элементы a_i, b_i, где $i = 1, \dots, g$, и p_j, где $j = 1, \dots, V$, могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому не ставим над ними знака $+$ или $-$. Известно, что по крайней мере один из множества порождающих отрицательный, так как группа отрицательна. Пусть

$$\varphi : a_i \to A_i,\ b_i \to B_i,\ p_j \to P_j,\ q_k^+ \to Q_k^+,$$

где $i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, V$ и $k = 1, \dots, F$, является каноническим отображением группы K_0^- на группу $H_1(K_0^-, Z) = K_0^- / [K_0^-, K_0^-]$. Тогда

$$H_1(K_0^-, Z) = \left\{ A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g, P_1, \dots, P_V, Q_1^+, \dots, Q_F^+ : \sum_{j=1}^{V} P_j + \sum_{k=1}^{F} Q_k^+ = 0 \right\}. \quad (9)$$

Значит, абелева группа $H_1(K_0^-, Z)$ свободно порождена элементами

$$A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g, P_1, \dots, P_V, Q_1^+, \dots, Q_{F-1}^+$$

(Q_F^+ выражается в виде линейной комбинации указанных порождающих).

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее

Замечание 7. Пусть абелева группа свободно порождена тремя элементами A, B и C, причем $A = A^+$, $B = B^+$ — положительные элементы, а $C = C^-$ отрицательный. Тогда $\langle A^+, B^+, C^- \rangle \cong (Z^+)^2 \oplus Z^-$. Пусть $A = A^+$ — положительный элемент, а $B = B^-$ и $C = C^-$ отрицательные. Тогда $\langle A^+, B^-, C^- \rangle \cong Z^+ \oplus (Z^-)^2$. Заметим, что $\langle A^+, B^-, C^- \rangle = \langle A^+, B^-C^-, C^- \rangle$, а произведение двух отрицательных B^-C^- есть положительный элемент. Следовательно, получили группу, свободно порожденную тремя элементами: двумя положительными и одним отрицательным. Поэтому $\langle A^+, B^-, C^- \rangle \cong (Z^+)^2 \oplus Z^-$, т. е. $Z^+ \oplus (Z^-)^2 \cong (Z^+)^2 \oplus Z^-$.

Из этого замечания следует, что группа $H_1(K_0^-, Z)$ свободно порождается одним отрицательным и $2g + V + F - 2$ положительными элементами. Воспользуемся формулой Эйлера: $2 - 2g = V + F - E$. Получим

$$H_1(K_0^-, Z) = (Z^+)^E \oplus Z^-, \quad (10)$$

где E — количество ребер.

Рассмотрим группу K_H^-, где $H > 0$. Для нее представление (4) перепишется в следующем виде:

$$K_H^- = \Big\{a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, p_1, \dots, p_V, q_1^+, \dots, q_F^+, s_1^-, \dots, s_H^- :$$
$$\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{V} p_j \prod_{k=1}^{F} q_k^+ \prod_{l=1}^{H} s_l^- = 1, (s_1^-)^2 = \dots = (s_H^-)^2 = 1\Big\}. \quad (11)$$

Элементы a_i, b_i и p_j, где $i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, V$, могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому, как и ранее, не ставим над ними знака $+$ или $-$. Пусть

$$\varphi : a_i \to A_i,\ b_i \to B_i,\ p_j \to P_j,\ q_k^+ \to Q_k^+,\ s_l^- \to S_l^-,$$

где $i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, V$, $k = 1, \dots, F$ и $l = 1, \dots, H$, является каноническим отображением группы K_H^- на группу $H_1(K_H^-, Z) = K_H^-/[K_H^-, K_H^-]$. Тогда

$$H_1(K_H^-, Z) = \Big\{A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g, P_1, \dots, P_V, Q_1^+, \dots, Q_F^+, S_1^-, \dots, S_H^- :$$
$$\sum_{j=1}^{V} P_j + \sum_{k=1}^{F} Q_k^+ + \sum_{l=1}^{H} S_l^- = 0, 2S_l^- = 0 \quad \text{для всех } l = 1, \dots, H\Big\}. \quad (12)$$

Отсюда $H_1(K_H^-, Z)$ свободно порождена элементами

$$A_1, A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g, P_1, \dots, P_V, Q_1^+, \dots, Q_{F-1}^+, S_1^-, \dots, S_H^-$$

(Q_F^+ выражается в виде линейной комбинации указанных порождающих). Аналогично предыдущему группа гомологий (12) изоморфна $(Z^+)^{2g} \oplus (Z^+)^V \oplus (Z^+)^{F-1} \oplus (Z_2^-)^H$. Пользуясь формулой Эйлера: $2 - 2g = V + F - E$, получим

$$H_1(K_H^-, Z) = (Z^+)^{E+1} \oplus (Z_2^-)^H, \quad (13)$$

где E — количество ребер, H — количество полуребер.

Замечание 8. Число полуребер в вычислении эйлеровой характеристики не участвует, так как с топологической точки зрения при удалении полуребра с концевой точкой число граней, вершин и ребер не меняется. Следовательно, эйлерова характеристика также не меняется.

Замечание 9. Связь между индексом подгруппы и количеством ребер E зависит от типа подгруппы K индекса n группы Γ. Так, если $K = K^+$ — положительная подгруппа или $K = K_0^-$ — отрицательная без кручения подгруппа, то $E = \frac{n}{2}$, а если $K = K_H^-$ — отрицательная подгруппа, имеющая H порождающих конечного порядка, то $E = \frac{n-H}{2}$ (из замечания 5 следует, что E целое). Это несложно показать, учитывая, что индекс подгруппы равен количеству всех полуребер исходной карты общего вида.

Вспоминая, что подгруппа K^+ соответствует круговой карте, докажем следующее

Предложение 1.1. *Плоская карта является круговой картой тогда и только тогда, когда она эйлерова, т. е. валентности всех ее вершин четные. Это свойство не выполняется для римановых поверхностей большего рода.*

Доказательство. Рассмотрим представление (4) для подгруппы K индекса n группы Γ, отвечающей плоской эйлеровой карте. Эта подгруппа не имеет элементов конечного порядка ($H = 0$), все элементы, отвечающие за вершины, положительные (так как сопряжены степеням $(\alpha\beta)^2$), а элементы, отвечающие за риманову поверхность, отсутствуют, так как сфера имеет род 0. $\square$

Прямым следствием предложения 1.1 и леммы 1.1 является

Предложение 1.2. *Плоская карта допускает раскраску граней в два цвета тогда и только тогда, когда валентности всех ее вершин четные.*

1.6. Подсчет числа эпиморфизмов. В силу результатов п. 1.5 возможны три основных случая:

$$H_1(K^+, Z) = (Z^+)^{E+1}, \quad H_1(K_0^-, Z) = (Z^+)^E \oplus Z^-,$$
$$H_1(K_H^-, Z) = (Z^+)^{E+1} \oplus (Z_2^-)^H.$$

Рассмотрим первый случай, когда $H_1(K^+, Z) = (Z^+)^{E+1}$. По лемме 4 из [3] имеем

$$|\operatorname{Epi}(K^+, Z_l)| = \sum_{d|l} \mu\left(\frac{l}{d}\right) d^{E+1} := \varphi_{E+1}(l),$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, а $\varphi_{E+1}(l)$ — функция Жордана.

Рассмотрим случай, когда $H_1(K_0^-, Z) = (Z^+)^E \oplus Z^-$. По теореме 4 из [16] имеем

$$|\operatorname{Epi}^+(K_0^-, Z_{2l})| = \sum_{\frac{l}{m}:\mathrm{odd}} \mu\left(\frac{l}{m}\right) m^{E+1} := \varphi_{E+1}^{\mathrm{odd}}(l),$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, а $\varphi_{E+1}^{\mathrm{odd}}(l)$ — нечетная функция Жордана.

Аналогично в последнем случае, когда $H_1(K_H^-, Z) = (Z^+)^{E+1} \oplus (Z_2^-)^H$, имеем

$$|\operatorname{Epi}^+(K_H^-, Z_{2l})| = \sum_{\frac{l}{m}:\mathrm{odd}} \mu\left(\frac{l}{m}\right) m^{E+1} (2, m)^H$$

при нечетном l и $|\operatorname{Epi}^+(K_H^-, Z_{2l})| = 0$ при четном l.

Заметим, что если l нечетное и m является делителем l, то $\frac{l}{m}$ нечетное и $(2, m) = 1$. Отсюда

$$|\operatorname{Epi}^+(K_H^-, Z_{2l})| = \varphi_{E+1}(l).$$

Учитывая замечания 5 и 9, получим, что точные формулы для числа эпиморфизмов выражаются следующим предложением.

Предложение 1.3. *Справедливы следующие равенства:*

1. $|\operatorname{Epi}(K^+, Z_l)| = \varphi_{m+1}(l)$, *где* K^+ *— положительная подгруппа индекса* $2m$ *группы* Γ.

2. *Пусть* K_0^- *— отрицательная без кручения подгруппа индекса* m *в группе* Γ, *тогда*

$$|\operatorname{Epi}^+(K_0^-, Z_{2l})| = \begin{cases} \varphi_{\frac{m}{2}+1}^{\mathrm{odd}}(l), & \textit{если } m \textit{ четное}, \\ 0 & \textit{иначе}. \end{cases}$$

3. *Пусть $H > 0$ и K_H^- — отрицательная с кручением подгруппа индекса в m группе Γ, имеющая H порождающих второго порядка, тогда*

$$|\operatorname{Epi}^+(K_H^-, Z_{2l})| = \begin{cases} \varphi_{\frac{m-H}{2}+1}(l), & \text{если } \frac{m-H}{2} \geq 0 \text{ целое и } l \text{ нечетное,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Перечисление круговых карт

Для того чтобы найти число круговых карт с заданным числом ребер по формуле из теоремы 1.4, достаточно посчитать число подгрупп $K = K^+$, K_0^-, K_H^- группы Γ каждого из трех вышеперечисленных случаев: $H_1(K^+, Z) = (Z^+)^{E+1}$, $H_1(K_0^-, Z) = (Z^+)^E \oplus Z^-$, $H_1(K_H^-, Z) = (Z^+)^{E+1} \oplus (Z_2^-)^H$.

2.1. Подсчет числа положительных и отрицательных подгрупп без кручения. Сначала посчитаем число $S(m, 0)$ всех подгрупп K индекса m без кручения в группе Γ. Для этого опишем все транзитивные гомоморфизмы, соответствующие таким подгруппам.

Лемма 2.1. *Пусть $\Gamma = \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle$, где $\alpha = \alpha^+$, $\beta = \beta^-$. Транзитивный гомоморфизм $\varphi : \Gamma \to S_m$ отвечает подгруппе K индекса m без элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда подстановка $\varphi(\beta)$ не имеет неподвижных точек.*

Доказательство. Напомним, что подстановка $\varphi(\beta)$ отвечает ребрам и висячим полуребрам карты общего вида. При этом ребру соответствует цикл длины 2, висячему полуребру — цикл длины 1 (т. е. неподвижная точка подстановки $\varphi(\beta)$). Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Заметим, что так как $\beta^2 = 1$, то $\varphi(\beta)\varphi(\beta) = \varphi(\beta^2) = \varphi(1) = 1$.

При возведении подстановки в квадрат в единичную подстановку переходят только подстановки, состоящие из циклов длины 2 и из циклов длины 1. Но $\varphi(\beta)$ не имеет неподвижных точек, так как группа K без кручения. Следовательно, $\varphi(\beta)$ состоит только из циклов длины 2. Общая длина подстановки m, а значит, m — четное число.

Сигнатура подстановки $\varphi(\beta)$ имеет вид

$$\sigma(\varphi(\beta)) = (1^0\, 2^{\frac{m}{2}}\, 3^0 \ldots m^0) = (2^{\frac{m}{2}}).$$

Отсюда число подстановок степени m сигнатуры $\sigma(\varphi(\beta))$ или, что то же, число подстановок $\varphi(\beta)$, описанных выше, равно

$$\nu(\varphi(\beta)) = \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2}\right)!}.$$

Число возможных образов подстановки α при гомоморфизме φ равно $m!$, где m — индекс подгруппы.

Так как α и β независимы и порождают группу Γ, число гомоморфизмов $\varphi : K \to S_m$, где K — подгруппа индекса m группы Γ, равно

$$B(m, 0) = \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2}\right)!} m!, \tag{14}$$

причем m четное. Если m нечетное, то $B(m, 0) = 0$.

Для удобства введем новые обозначения: $b_0(\widehat{m}) = B(m, 0)$ — число всех гомоморфизмов $\varphi : K \to S_m$, где $m = 2\widehat{m}$, таких, что $\varphi(\beta)$ не имеет неподвижных точек, а K — подгруппа индекса m группы Γ; $t_0(\widehat{m}) = T(m,0)$ — число транзитивных гомоморфизмов $\varphi : K \to S_m$, где $m = 2\widehat{m}$, таких, что $\varphi(\beta)$ не имеет неподвижных точек, а K — подгруппа индекса m группы Γ.

Следовательно, $b_0(\widehat{m}) = B(2\widehat{m},0)$ и $t_0(\widehat{m}) = T(2\widehat{m},0)$.

Для $B(2\widehat{m},0)$ и $T(2\widehat{m},0)$ верны соотношения (1):

$$B(2\widehat{m},0) = \sum_{2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}=2\widehat{m}} \binom{2\widehat{m}-1}{2\hat{\jmath}} T(2\hat{\imath},0)B(2\hat{\jmath},0)$$

и $B(0,0) = 1$, $T(0,0) = 0$. Перепишем в новых обозначениях:

$$b_0(\widehat{m}) = \sum_{\hat{\imath}+\hat{\jmath}=\widehat{m}} \binom{2\widehat{m}-1}{2\hat{\jmath}} t_0(\hat{\imath})b_0(\hat{\jmath}).$$

После некоторых преобразований получим

$$t_0(\widehat{m}) = b_0(\widehat{m}) - \sum_{i=1}^{\widehat{m}-1} \binom{2\widehat{m}-1}{2(\widehat{m}-i)} t_0(i)b_0(\widehat{m}-i) \tag{15}$$

и $b_0(0) = 1$, $t_0(0) = 0$.

Пользуясь леммой 1.2, посчитаем число $S(m,0)$ всех подгрупп K индекса m без кручения в группе Γ:

$$S(m,0) = \frac{T(m,0)}{(m-1)!} = \frac{T(2\widehat{m},0)}{(2\widehat{m}-1)!} = \frac{t_0(\widehat{m})}{(2\widehat{m}-1)!}.$$

Так как это число отлично от нуля только при четных m, для удобства будем рассматривать значения

$$s(\widehat{m},0) = S(2\widehat{m},0) = \frac{t_0(\widehat{m})}{(2\widehat{m}-1)!}. \tag{16}$$

Предложение 2.1. *Справедливо следующее рекуррентное соотношение:*

$$s(n,0) = (2n+1)!! - \sum_{k=1}^{n} (2k-1)!!\, s(n-k,0), \tag{17}$$

где $s(0,0) = 1$.

Доказательство. Подставив выражение для $t_0(n)$ из (15) в формулу (16), получим

$$s(n,0) = \frac{1}{(2n-1)!}\left(b_0(n) - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2(n-i)} t_0(i)b_0(n-i)\right).$$

Учитывая выражение для $b_0(n)$ из (14), имеем

$$s(n,0) = \frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{(2n)!}{2^n\, n!}(2n)! - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2(n-i))!(2i-1)!} t_0(i) \frac{(2(n-i))!}{2^{n-i}\,(n-i)!}(2(n-i))!\right).$$

Вспомним хорошо известные свойства двойного факториала

$$(2k)!! = 2^k k!, \quad (2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{2^k k!}. \tag{18}$$

Из них легко выводится свойство для $k \geq 1$:

$$(2k-1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}. \tag{19}$$

После некоторых арифметических преобразований, а также использования (18) и (19) получим

$$s(n,0) = (2n+1)!!\frac{2n}{2n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_0(i)}{(2i-1)!}(2(n-i)-1)!!.$$

Учитывая (16) и (19), имеем

$$s(n,0) = (2n+1)!! - (2n-1)!! - \sum_{i=1}^{n-1}(2(n-i)-1)!!s(i,0).$$

Для удобства положим $s(0,0) = 1$, откуда

$$s(n,0) = (2n+1)!! - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)!!s(n-k,0).$$

Предложение доказано. $\square$

Заметим, что указанная последовательность совпадает с последовательностью A000698 из электронной энциклопедии «On-Line Encyclopedia of Integer Sequences» [19]. Доказательство этого факта напрямую следует из предложения 2.1.

Посчитаем $S^+(m,0)$ — число положительных подгрупп индекса m без кручения. Аналогично ненулевые значения только при четном m. Перейдем к $s^+(\widehat{m},0) = S^+(2\widehat{m},0)$.

Вспомним классическое соотношение для индексов подгрупп.

Лемма 2.2. *Пусть A, B и C — три группы такие, что $A < B < C$. Тогда для индексов подгрупп выполнено следующее соотношение:*

$$|C : A| = |C : B|\,|B : A|.$$

Из этой леммы следует, что если $K^+ <_m \Gamma$, где K^+ положительная, то m четно и $K^+ <_{\frac{m}{2}} \Gamma^+$.

Число подгрупп $K^+ <_{\frac{m}{2}} \Gamma^+$ равно $M_{\frac{m}{2}}$, так как Γ^+ — свободная группа на $r = 2$ порождающих, т. е.

$$s^+(\widehat{m},0) = M_{\widehat{m}}, \tag{20}$$

где $M_{\widehat{m}}$ вычисляется по формуле (2), при этом $r = 2$.

Предложение 2.2. *Справедливо следующее рекуррентное соотношение:*

$$s^+(n,0) = (n+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!s^+(n-k,0), \tag{21}$$

где $s^+(0,0) = 1$.

Доказательство. Из формул (20) и (2), учитывая, что $r = 2$ и $M_i = s^+(i,0)$, имеем

$$s^+(n,0) = n\,n! - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)!s^+(i,0),$$

откуда

$$s^+(n,0) = (n+1)! - n! - \sum_{k=1}^{n-1} k!s^+(n-k,0).$$

Для удобства положим $s^+(0,0)=1$, тогда

$$s^+(n,0)=(n+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!s^+(n-k,0).$$

Предложение доказано. $\square$

Заметим, что последовательность $s^+(m,0)$ совпадает с последовательностью A003319 из [19]. Доказательство этого факта напрямую следует из предложения 2.2.

Отметим, что положительные подгруппы K в группе Γ не имеют кручения, поэтому в выражении «положительные подгруппы без кручения» будем опускать последние два слова.

Чтобы посчитать число $S^-(m,0)$ отрицательных подгрупп индекса m без кручения, достаточно из $S(m,0)$ отнять $S^+(m,0)$.

Основным результатом данного параграфа является

Предложение 2.3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Число положительных подгрупп индекса $2m$ группы Γ равно*

$$S^+(2m,0)=s^+(m,0),$$

где $s^+(m,0)$ вычисляется по рекуррентной формуле (21).

2. *Число отрицательных без кручения подгрупп индекса m группы Γ равно*

$$S^-(m,0)=\begin{cases} s(\frac{m}{2},0)-s^+(\frac{m}{2},0), & \text{если } m \text{ четное},\\ 0, & \text{если } m \text{ нечетное}, \end{cases}$$

где $s(n,0)$ и $s^+(n,0)$ находятся по рекуррентным формулам (17) *и* (21) *соответственно.*

2.2. Подсчет числа подгрупп с кручением. Очевидно, что подгруппа K группы Γ, имеющая кручение, может быть только отрицательной, так как имеет $H>0$ порождающих второго порядка.

Посчитаем число всех подгрупп индекса m с кручением в группе Γ. Рассмотрим гомоморфизмы $\varphi:\Gamma\to S_m$, где $\Gamma=\langle\alpha,\beta\mid\beta^2=1\rangle$. Подгруппа K индекса m группы Γ имеет H порождающих второго порядка, где $H>0$. Рассмотрим гомоморфизмы, отвечающие этой подгруппе. Подстановка $\varphi(\alpha)$ может быть произвольной, а подстановка $\varphi(\beta)$ состоит из H циклов длины 1 и $\frac{m-H}{2}$ циклов длины 2. Это утверждение корректно, так как по замечанию 5 число $\frac{m-H}{2}$ неотрицательное целое. Сигнатура подстановки $\varphi(\beta)$ имеет вид

$$\sigma(\varphi(\beta))=(1^H2^{\frac{m-H}{2}}3^0\dots m^0).$$

Отсюда по лемме 1.1 из [6] число подстановок степени m сигнатуры $\sigma(\varphi(\beta))$ или, что то же, число подстановок $\varphi(\beta)$, описанных выше, равно

$$\nu(\varphi(\beta))=\frac{m!}{1^HH!2^{\frac{m-H}{2}}\left(\frac{m-H}{2}\right)!}\operatorname{Int}\left(\frac{m-H}{2}\right),$$

где

$$\operatorname{Int}(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in Z \text{ и } x\geq 0,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}\qquad (22)$$

Число возможных образов для подстановки α равно $m!$, где m — индекс подгруппы.

Так как α и β независимы и порождают группу Γ, число гомоморфизмов $\varphi:K\to S_m$, отвечающих подгруппам K, которые имеют H порождающих второго порядка, индекса m в группе Γ, равно

$$B(m,H) = m!\frac{m!}{1^H H! 2^{\frac{m-H}{2}} \left(\frac{m-H}{2}\right)!}\,\mathrm{Int}\left(\frac{m-H}{2}\right), \tag{23}$$

где $\mathrm{Int}\left(\frac{m-H}{2}\right)$ определяется по формуле (22).

Пусть $T(m,H)$ — число транзитивных гомоморфизмов $\varphi : K \to S_m$, где K — подгруппа индекса m группы Γ, имеющая H порождающими второго порядка. После некоторых преобразований в лемме 1.3 получим

$$T(m,H) = B(m,H) - \sum_{h=0}^{H}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{m-i}T(i,h)B(m-i,H-h), \tag{24}$$

где $B(0,0) = 1$, $T(0,0) = 0$.

Замечание 10. При $\mathrm{Int}\left(\frac{m-H}{2}\right) = 0$, где $\mathrm{Int}(x)$ определяется по формуле (22), $T(m,H)$ также обращается в нуль.

Из фундаментального соотношения между числом подгрупп и числом транзитивных гомоморфизмов (лемма 1.2) имеем следующее

Предложение 2.4. 1. *$S(m,H)$ — число всех подгрупп $K = K_H^-$ индекса m в группе Γ, имеющих H порождающих второго порядка, — равно*

$$S(m,H) = \frac{T(m,H)}{(m-1)!},$$

где $T(m,H)$ находится по формулам (23) и (24).

2. *Число подгрупп K, имеющих кручение, индекса m в группе Γ равно*

$$\sum_{H=1}^{m} S(m,H).$$

2.3. Число круговых карт с n ребрами. Полученные выше формулы соберем в виде основного результата настоящей работы.

Теорема 2.1. *Обозначим через $C(n)$ число круговых карт с n ребрами. Тогда*

$$C(n) = \frac{1}{2n}\sum_{l|n,\, lm=n}\Bigg(S^+(2m,0)|\,\mathrm{Epi}(K^+, Z_l)| + S^-(m,0)|\,\mathrm{Epi}^+(K_0^-, Z_{2l})| + \sum_{H=1}^{m} S(m,H)|\,\mathrm{Epi}^+(K_H^-, Z_{2l})|\Bigg),$$

где K^+ — положительная подгруппа индекса $2m$ группы Γ, $S^+(2m,0)$ — число подгрупп K^+, K_0^- — отрицательная без кручения подгруппа индекса m группы Γ, $S^-(m,0)$ — число подгрупп K_0^-, K_H^- — отрицательная с кручением подгруппа индекса m группы Γ, имеющая H порождающих второго порядка в представлении (3), $S(m,H)$ — число подгрупп K_H^-.

Формулы для подсчета $S^+(2m,0)$, $S^-(m,0)$, $S^-(m,H)$ приведены в предложениях 2.3, 2.4, для подсчета $|\,\mathrm{Epi}(K^+, Z_l)|$, $|\,\mathrm{Epi}^+(K_0^-, Z_{2l})|$, $|\,\mathrm{Epi}^+(K_H^-, Z_{2l})|$ — в предложении 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tutte W. T.* A census of planar maps // Canad. J. Math. 1963. V. 15. P. 249–271.
2. *Arqués D.* Relations fonctionelles et dénombrement des cartes pointées sur le torre // J. Comb. Theory, Ser (B). 1987. V. 43. P. 253–274.

3. *Медных А. Д.* Новый метод подсчета числа накрытий над многообразием с конечно порожденной фундаментальной группой // Докл. АН. 2006. Т. 409, № 2. С. 158–162.
4. *Mednykh A. D., Nedela R.* Enumeration of unrooted maps with given genus // J. Comb. Theory, Ser (B). 2006. V. 96. P. 706–729.
5. *Liskovets V. A.* Enumeration of nonisomorphic planar maps // Sel. Math. Sovietica. 1985. V. 4. P. 303–323.
6. *Breda A., Mednykh A., Nedela R.* Enumeration of maps regardless of genus. Geometric approach // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1184–1203.
7. *Jackson D. M., Visentin T. I.* An atlas of the smaller maps in orientable and nonorientable surfaces. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2001.
8. *Lando S. K., Zvonkin A. K.* Graphs on surfaces and their applications (with Appendix by Don B. Zagier). Berlin: Springer-Verl., 2004. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences; V. 141. Low dimensional topology. II).
9. *Shabat G. B., Zvonkin A. K.* Plane trees and algebraic numbers: Jerusalem Combinatorics'93 / Ed by H. Barcelo, G. Kalai // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 233–275.
10. *Адрианов Н. М., Амбург Н. Я., Дремов В. А., Кочетков Ю. Ю., Крейнес Е. М., Левицкая Ю. А., Насретдинова В. Ф., Шабат Г. Б.* Каталог функций Белого детских рисунков с не более чем четырьмя ребрами // Фунд. и прикл. математика. 2007. Т. 13, вып. 6. С. 35–112.
11. *Бычков Б. С., Дремов В. А., Епифанов Е. М.* Вычисление пар Белого шестиреберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3 // Фунд. и прикл. математика. 2007. Т. 13, № 6. С. 137–148.
12. *Jones G. A.* Maps on surfaces and Galois groups // Math. Slovaca. 1997. V. 47, N 1. P. 1–33.
13. *Jones G. A., Singerman D.* Theory of maps on orientable surfaces // Proc. London Math. Soc. 1978. V. 37. P. 273–307.
14. *Hall M., Jr.* Subgroups of finite index in free groups // Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 187–190.
15. *Лисковец В. А.* К перечислению подгрупп свободной группы // Докл. АН БССР. 1971. Т. 15, № 1. С. 6–9.
16. *Kwak J. H., Mednykh A. D., Nedela R.* Enumeration of orientable coverings of a nonorientable manifold // Proc. 20th Int. conf. formal power series and algebraic combinatorics (FPSAC'08) Valparasio-Viña del Mar, Chile (June 23–27, 2008). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. P. 215–226. (DIMACS, Ser.).
17. *Hurwitz A.* Über Riemannische Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten // Math. Ann. 1891. Bd 39. S. 1–61.
18. *Bujalance E., Cirre J. F., Gamboa J. M., Gromadzki G.* Symmetries of Compact Riemann Surfaces. Berlin: Springer-Verl., 2010 (Lect. Notes Math.; V. 2007).
19. On-Line encyclopedia of integer sequences // http://www.oeis.org.

Статья поступила 17 сентября 2012 г.

Дерягина Мадина Александровна
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
zindinova@gmail.com

Медных Александр Дмитриевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru