Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 512.5

КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫМИ ГРУППАМИ

Е. И. Тимошенко

Аннотация. Доказано, что частично коммутативная метабелева группа является подгруппой прямого произведения абелевых групп без кручения и метабелевых произведений абелевых групп без кручения. Отсюда выводится, что любые частично коммутативные метабелевы (неабелевы) группы порождают одинаковые квазимногообразия и предмногообразия. Напротив, существует бесконечная цепочка различных квазимногообразий, порожденных частично коммутативными группами с определяющими графами диаметра два.

Ключевые слова: квазимногообразие, предмногообразие, частично коммутативная группа, метабелева группа, граф.

Введение

Пусть Γ — некоторый конечный простой неориентированный граф без петель. Обозначим через $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ множество вершин графа Γ и через E — множество его ребер. Ребра графа Γ обозначаем через (x_i, x_j), где $x_i, x_j \in X$.

Свободная частично коммутативная группа с определяющим графом Γ обозначается через F_Γ и имеет представление

$$F_\Gamma = \langle X \mid x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } (x_i, x_j) \in E \rangle. \tag{1}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие групп. Добавим к определяющим соотношениям группы F_Γ все тождества многообразия $\mathfrak{M}$. Получим частично коммутативную группу в многообразии $\mathfrak{M}$.

Как обычно, $[x, y]$ обозначает коммутатор $x^{-1}y^{-1}xy$. Многообразие $\mathfrak{A}^2$ метабелевых, т. е. двуступенно разрешимых групп, задается тождеством $[[x, y], [u, v]] = 1$.

Частично коммутативную метабелеву группу с определяющим графом Γ будем обозначать через S_Γ. Она имеет представление

$$S_\Gamma = \langle X \mid x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } (x_i, x_j) \in E;\ \mathfrak{A}^2 \rangle. \tag{2}$$

Квазитождеством называется предложение, т. е. формула, не содержащая свободных переменных, вида

$$\forall z_1 \dots z_m ((w_1(z_1, \dots, z_m) = 1 \wedge \dots \wedge w_r(z_1, \dots, z_m) = 1) \longrightarrow w(z_1, \dots z_m) = 1),$$

где w и w_i — групповые слова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00084) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.0359).

Квазимногообразием групп называется класс групп, удовлетворяющий некоторой совокупности квазитождеств.

Класс групп образует квазимногообразие тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп, декартовых произведений и ультрапроизведений.

Класс групп $\mathscr{R}$ называется *предмногообразием*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых произведений.

Граф Γ называется *полным*, если любые его вершины являются смежными.

Пусть компоненты связности $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, $m \geq 2$, графа Γ являются полными графами, т. е. группы S_{Γ_i}, $i = 1, \ldots, m$, — свободные абелевы группы. Тогда группа S_Γ является *метабелевым произведением* групп $S_{\Gamma_1}, \ldots, S_{\Gamma_m}$. Обозначим это произведение через $M(S_{\Gamma_1}, \ldots, S_{\Gamma_m})$.

Основные результаты статьи — теоремы 1 и 2. Теорема 1 позволяет представить частично коммутативную метабелеву группу как подгруппу прямого произведения абелевых групп без кручения и метабелевых произведений абелевых групп без кручения. Из нее следует, что любые частично коммутативные метабелевы (неабелевы) группы порождают одинаковые квазимногообразия и предмногообразия. Теорема 2 показывает, что, напротив, для свободных частично коммутативных групп существует бесконечная цепочка различных квазимногообразий, порожденных этими группами.

§ 1. Квазимногообразия и предмногообразия, порожденные частично коммутативными метабелевыми группами

Теорема 1. *Любая частично коммутативная метабелева группа S_Γ является подгруппой прямого произведения некоторого конечного* (*может быть, пустого*) *множества свободных абелевых групп A_i и некоторого конечного* (*может быть, пустого*) *множества метабелевых произведений $M_j = M\big(B_1^{(j)}, \ldots, B_{r_j}^{(j)}\big)$ свободных абелевых групп $B_1^{(j)}, \ldots, B_{r_j}^{(j)}$.*

Доказательство. Если S_Γ — абелева группа, то она не имеет кручения, и утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что S_Γ — неабелева группа. Дальнейшее доказательство проведем индукцией по числу n вершин определяющего графа Γ.

Так как группа S_Γ неабелева, наименьшее возможное значение n равно двум. В этом случае S_Γ — свободная метабелева группа ранга два. Она удовлетворяет утверждению теоремы, так как изоморфна метабелеву произведению двух бесконечных циклических групп.

Предположим, что теорема верна для всех частично коммутативных метабелевых групп, определяющий граф которых Γ содержит менее чем n вершин.

Пусть граф Γ имеет n вершин. Рассмотрим некоторую вершину x_p графа Γ. Обозначим через Γ_p — подграф графа Γ, полученный удалением из него вершины x_p и всех инцидентных ей ребер. Частично коммутативная метабелева группа с определяющим графом Γ_p является ретрактом группы S_Γ. Это означает, что найдется гомоморфизм группы S_Γ на группу S_{Γ_p}, тождественно действующий на подгруппе S_{Γ_p}. Пусть $\varphi_p : S_\Gamma \longrightarrow S_{\Gamma_p}$ — эта ретракция.

Обозначим через $\mathbb{C}(x_p)$ централизатор вершины x_p в коммутанте S'_Γ группы S_Γ, т. е.

$$\mathbb{C}(x_p) = \{c \in S'_\Gamma \mid c^{-1}x_p c = x_p\}.$$

По теореме о строении централизаторов частично коммутативной метабелевой группы [1] $\mathbb{C}(x_p)$ совпадает с множеством элементов c вида

$$c = \prod [x_u,\, x_v]^{\alpha_{u,v}}, \tag{1}$$

где x_u, x_v пробегают не смежные между собой вершины графа Γ, причем как x_u, так и x_v смежны с вершиной x_p, а $\alpha_{u,v}$ — любые элементы из кольца $\mathbb{Z}(S_\Gamma/S'_\Gamma)$, в запись которых не входит x_p.

Для любой вершины x_p подгруппа $\mathbb{C}(x_p)$ нормальна в S_Γ. Действительно, если $c \in \mathbb{C}(x_p)$, а $g \in S_\Gamma$, то $[c^g, x_p] = c^{g(1-x_p)} = c^{(1-x_p)g} = 1$.

Заметим, что для любого p, $1 \leq p \leq n$, пересечение $\ker\varphi_p$ и $\mathbb{C}(x_p)$ тривиально. Действительно, пусть $1 \neq c \in \ker\varphi_p \cap \mathbb{C}(x_p)$. Запишем элемент c в виде (1) и применим к обеим частям (1) ретракцию φ_p. Получим $\varphi_p(c) = c$, так как x_p не входит в запись элемента c. С другой стороны, $\varphi_p(c) = 1$; получили противоречие.

Предположим, что для некоторой вершины x_p ее централизатор $\mathbb{C}(x_p)$ не равен единице. Тогда группа S_Γ является подпрямым произведением групп $S_\Gamma/\mathbb{C}(x_p)$ и $S_\Gamma/\ker\varphi_p$, отличных от S_Γ. Обе эти группы являются частично коммутативными метабелевыми группами. Группа S_{Γ_p}, изоморфная группе $S_\Gamma/\ker\varphi_p$, определена графом Γ_p, имеющим $n-1$ вершин. Определяющий граф группы $S_\Gamma/\mathbb{C}(x_p)$ получается из графа Γ добавлением новых ребер, соединяющих между собой все вершины x_u и x_v, смежные вершине x_p. Обозначим этот граф через Δ_p.

Итак, пусть S_Γ — неабелева группа. Возможны следующие случаи.

1. Централизатор $\mathbb{C}(x_p)$ некоторой вершины x_p не равен единице.

Как было отмечено, группа S_Γ является подпрямым произведением группы S_{Γ_p}, для которой теорема верна по предположению индукции, и группы S_{Δ_p}, имеющей больше ребер, чем граф Γ. Рассматриваем группу S_{Δ_p} в качестве S_Γ. Так как количество ребер графа с n вершинами не превосходит $n(n-1)/2$, в конце концов придем либо к полному графу, определяющему абелеву группу, либо к случаю 2.

2. Централизатор $\mathbb{C}(x_p)$ любой вершины x_p графа Γ равен единице.

Это возможно лишь тогда, когда каждая компонента связности графа Γ полна и, может быть, состоит из одной изолированной вершины.

В любом случае приходим к заключению, что группа S_Γ является подгруппой прямого произведения свободных абелевых групп A_i и метабелевых произведений M_j свободных абелевых групп.

Теорема доказана.

Рассмотрим следующий пример. Пусть группа S_Γ определена линейным графом L_4 (см. рис. 1).

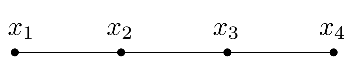

Рис. 1.

Она вкладывается в прямое произведение $S_{\Gamma_2} \times S_{\Delta_2}$, где граф Γ_2 получается из графа Γ удалением вершины x_2 и инцидентных ей ребер. Граф Δ_2 получается добавлением к графу Γ ребра (x_1, x_3).

Группа S_{Γ_2} является метабелевым произведением бесконечной циклической группы $A_1 = \langle x_1 \rangle$ и свободной абелевой группы $A_2 = \langle x_3, x_4 \rangle$, порожденной элементами x_3, x_4.

В свою очередь, группа S_{Δ_2} вкладывается в прямое произведение групп, первая из которых есть метабелево произведение абелевых групп $B_1 = \langle x_1, x_2 \rangle$ и $B_2 = \langle x_4 \rangle$. Определяющим графом этой группы является граф Δ_3 (рис. 2). Вторая группа — свободная абелева группа, порожденная элементами группы x_1, x_2, x_3, x_4.

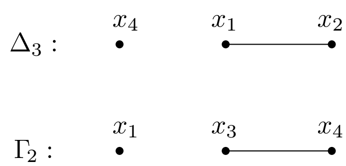

Рис. 2.

Таким образом, группа S_Γ есть подпрямое произведение трех групп: частично коммутативных групп $S_{\Gamma_2}, S_{\Delta_3}$ и свободной абелевой группы.

Не все частично коммутативные метабелевы группы имеют одинаковые универсальные теории. Так, в [2] найдены необходимые и достаточные условия для совпадения универсальных теорий двух частично коммутативных метабелевых групп, определяющие графы которых — деревья. Тем не менее любые две неабелевы частично коммутативные метабелевы группы неразличимы квазитождествами, как показывает

Следствие 1. *Любые две неабелевы частично коммутативные метабелевы группы порождают одинаковые квазимногообразия.*

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{qvar}(G)$ квазимногообразие, порожденное группой G. Хорошо известно, что свободные метабелевы (неабелевы) группы имеют одинаковые универсальные теории. Тем более они порождают одинаковые квазимногообразия. Обозначим через $\mathrm{qvar}(S)$ казимногообразие, порожденное свободной метабелевой (неабелевой) группой S.

Пусть S_Γ — неабелева частично коммутативная метабелева группа. Она содержит в качестве подгруппы свободную метабелеву группу S_2 ранга два. Поэтому

$$\mathrm{qvar}(S) = \mathrm{qvar}(S_2) \subseteq \mathrm{qvar}(S_\Gamma). \tag{2}$$

С другой стороны, группа S_Γ является подгруппой прямого произведения свободных абелевых групп A_i и метабелевых произведений M_j свободных абелевых групп $B_1^{(j)}, \dots, B_{r_j}^{(j)}$. Обозначим через $r(A)$ ранг свободной абелевой группы A. Пусть $r = \max\left\{r(A_i), r(B_t^{(j)})\right\}$. Так как квазимногообразие замкнуто относительно взятия подгрупп и прямых произведений, а все группы A_i, M_j являются подгруппами метабелевого произведения $M = M(C_1, \dots, C_q)$ свободных абелевых групп $C_1, \dots, C_q$ рангов r, где $q = \max\{r_j\}$, имеем

$$\mathrm{qvar}(S_\Gamma) \subseteq \mathrm{qvar}(M). \tag{3}$$

Группа, универсально эквивалентная свободной метабелевой группе ранга не меньше двух называется *u-группой.*

Известно (см., например, [3, 4]), что метабелево произведение свободных абелевых групп является u-группой. Следовательно, группа M универсально эквивалентна группе S_2. Значит,

$$\mathrm{qvar}(S_2) = \mathrm{qvar}(M). \tag{4}$$

Из (2)–(4) получаем требуемое утверждение.

Группы, порождающие квазимногообразие $\mathrm{qvar}(S)$, были полностью описаны в [5] В. Н. Ремесленниковым и Штером. Они названы *$\mathscr{A}$-группами.* Группа G является $\mathscr{A}$-группой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет некоторой системе квазитождеств, явно выписанной авторами.

Заметим, что класс $\mathscr{A}$-групп шире класса частично коммутативных метабелевых групп. Так, например, дискретное сплетение двух бесконечных циклических групп является $\mathscr{A}$-группой, но не частично коммутативной метабелевой, так как S_2 — единственная частично коммутативная метабелева (неабелева) группа с двумя порождающими.

Для некоторого класса групп $\mathscr{Q}$ обозначим через $\mathrm{pvar}(\mathscr{Q})$ предмногообразие, порожденное этим классом групп. Известно, что $\mathrm{pvar}(\mathscr{Q}) = SP(\mathscr{Q})$, где S — операция взятия подгрупп, а P — операция взятия декартовых произведений.

Говорят, что группа G *аппроксимируется* группой H, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует гомоморфизм $\varphi_g : G \longrightarrow H$ такой, что $\varphi_g(g) \neq 1$.

Группа G *дискриминируется* группой H, если для любого конечного множества элементов $g_1, \dots, g_n$ из группы G найдется гомоморфизм $\varphi_{g_1,\dots,g_n} : G \longrightarrow H$ такой, что $\varphi_{g_1,\dots,g_n}(g_i) \neq 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Группа G называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого положительного целого n и любой системы бескоэффициентных уравнений

$$v_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad \lambda \in \Lambda, \tag{5}$$

существует конечное подмножество $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ такое, что система уравнений

$$v_\lambda(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad \lambda \in \Lambda_0, \tag{6}$$

эквивалентна системе уравнений (5).

Следствие 2. *Любые две неабелевы частично коммутативные метабелевы группы порождают одинаковые предмногообразия.*

Доказательство. Пусть S_Γ — неабелева частично коммутативная метабелева группа. Она содержит в качестве подгруппы свободную метабелеву группу S_2 ранга два. Значит,

$$\mathrm{pvar}(S_2) \subseteq \mathrm{pvar}(S_\Gamma). \tag{7}$$

Из теоремы 1 вытекает, что

$$\mathrm{pvar}(S_\Gamma) \subseteq \mathrm{pvar}(M), \tag{8}$$

где группа M определена в ходе доказательства следствия 1.

Универсальные теории групп S_2 и M совпадают. Группа S_2 линейна [6]. Любая линейная группа нётерова по уравнениям (см. [7, теорема B1]). В этой работе в несколько общей формулировке доказана следующая

Теорема C2. *Пусть хотя бы одна из двух групп H_1 и H_2 нётерова по уравнениям. Тогда если универсальные теории групп H_1 и H_2 совпадают, то H_1 дискриминирует H_2 и H_2 дискриминирует H_1.*

Значит, группа S_2 дискриминирует группу M, тем более она аппроксимирует группу M. Следовательно, M — подгруппа декартова произведения групп S_2. Поэтому

$$\mathrm{pvar}(M) \subseteq \mathrm{pvar}(S_2). \tag{9}$$

Из (7)–(9) следует требуемое утверждение.

Позитивной универсальной теорией группы G назовем множество всех формул Φ вида

$$\Phi = \forall z_1 \dots z_m \Big(\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j_i \in J_i} w_{j_i}(z_1, \dots, z_m) = 1 \Big), \tag{10}$$

истинных на группе G, где $w_{j_i}(z_1, \dots, z_m)$ — элементы свободной группы с базисом $Z = \{z_1, \dots, z_m\}$, $m \geq 1$. Позитивную универсальную теорию группы G будем обозначать через $\mathrm{Th}_\forall^+(G)$.

Следующее предложение показывает, что не только квазимногообразия и предмногообразия, порожденные частично коммутативными метабелевыми группами, совпадают, но совпадают также их позитивные универсальные теории.

Предложение 1. *Пусть G_1 и G_2 — неабелевы частично коммутативные метабелевы группы. Тогда* $\mathrm{Th}_\forall^+(G_1) = \mathrm{Th}_\forall^+(G_2)$.

Доказательство. Действительно, пусть формула (10) верна на частично коммутативной неабелевой метабелевой группе S_Γ. Так как S_Γ содержит в качестве подгруппы свободную метабелеву группу S_2 ранга 2, формула (10) верна на группе S_2 и, следовательно, на любой свободной метабелевой группе ранга $r \geq 2$.

С другой стороны, пусть формула верна на свободной метабелевой неабелевой группе. Выберем ранг r этой группы равным количеству вершин определяющего графа Γ группы S_Γ. Рассмотрим естественный гомоморфизм свободной метабелевой группы S_r на группу S_Γ. Так как формула (10) верна на группе S_r, она справедлива и на группе S_Γ. Утверждение доказано.

§ 2. Квазимногообразия, порожденные свободными частично коммутативными группами

Прежде чем перейти к изучению квазимногообразий, порожденных свободной частично коммутативной группой, напомним необходимые определения и сформулируем некоторые известные результаты.

Пусть F — свободная группа с базисом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Рассмотрим естественный гомоморфизм группы F на группу F_Γ. Для любого элемента $g \in F_\Gamma$ обозначим через $\bar{g}$ какой-либо его прообраз в группе F, имеющий наименьшую длину. Все элементы $\bar{g}$ называются *геодезическими* для элемента g. Элемент $g \in F_\Gamma$ может иметь несколько геодезических. Обозначим через $\alpha(\bar{g})$ множество элементов $x \in X$, входящих в запись какого-то геодезического $\bar{g}$. В [8] доказано, что все для всех геодезических $\bar{g}$ элемента $g \in F_\Gamma$ множество $\alpha(\bar{g})$ определено однозначно.

Рассмотрим граф Δ, двойственный графу Γ. Вершинами графа Δ являются элементы множества X. Две вершины x_i и x_j являются смежными в Δ тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) \notin E$.

Пусть $w \in F_\Gamma$. Обозначим через $\Delta(\alpha(w))$ подграф графа Δ, порожденный множеством вершин $\alpha(\overline{w})$. Если этот граф связный, то назовем w *блоком*. Если $\Delta(\alpha(w))$ — несвязный граф, имеющий r компонент связности, то элемент w можно представить в виде произведения блоков $w = w_1 \dots w_r$, где в блок w_i входят вершины из одной компоненты связности графа $\Delta(\alpha(w))$. Заметим, что блоки w_i перестановочны между собой.

Для элемента $g \in F_\Gamma$ обозначим через $\sqrt{g}$ корень из элемента g, т. е. такой элемент $h \in F_\Gamma$, что $g = h^n$, $n \geq 1$, и из элемента h не извлекается корень степени $m > 1$.

Через $\mathbb{A}(w)$ обозначим подгруппу F_Γ, порожденную теми вершинами $x \in X$, которые не входят в $\overline{w}$ и перестановочны со всеми вершинами, входящими в $\overline{w}$.

Следующая теорема (см. [9, 10]) дает описание централизаторов элементов свободной частично коммутативной группы.

Теорема (о централизаторах элементов свободной частично коммутативной группы). *Пусть $w \in F_\Gamma$ и w — циклически редуцированное слово. Если $w = w_1 \dots w_r$ — его блоковое разложение, то централизатор $C(w)$ этого элемента совпадает с подгруппой $\langle\sqrt{w_1}\rangle \times \dots \times \langle\sqrt{w_r}\rangle \times \mathbb{A}(w)$.*

В дальнейшем будем использовать следующее утверждение (лемма 2.4), доказанное в [8]. *Символ $x \in X$ коммутирует с элементом $w \in F_\Gamma$ тогда и только тогда, когда он коммутирует с каждым символом из геодезического элемента $\overline{w}$.*

Заметим, что все свободные неабелевы группы F имеют одинаковые универсальные теории и, следовательно, порождают одинаковые квазимногообразия.

Предложение 2. *Пусть Γ — связный граф. Если квазимногообразие, порожденное свободной частично коммутативной (неабелевой) группой F_Γ, совпадает с квазимногообразием, порожденным свободной (неабелевой) группой F, то диаметр $d(\Gamma)$ графа Γ равен двум.*

Доказательство. Пусть диаметр графа Γ больше двух. Укажем квазитождество, справедливое на свободной группе F, но ложное на группе F_Γ.

Так как диаметр связного графа Γ больше двух, граф Γ содержит подграф L_4 (см. рис. 1). Значит, группа F_Γ содержит в качестве подгруппы свободную частично коммутативную группу, определенную линейным графом L_4.

На свободной группе F справедливо квазитождество

$$\forall x\, y\, u\, v\, ([x, y] = 1 \wedge [y, u] = 1 \wedge [u, v] = 1 \Longrightarrow [[x, u], [y, v]] = 1).$$

Проверим это: если $y \neq 1$ и $[x, y] = [y, u] = 1$, то $[x, u] = 1$ и, значит, $[[x, u], [y, v]] = 1$; если $y = 1$, то опять $[[x, u], [y, v]] = 1$.

Это квазитождество неверно на группе F_Γ. Пусть $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — вершины подграфа L_4. Положим $x = x_1$, $y = x_2, u = x_3, v = x_4$. Тогда $[x_1, x_2] = [x_2, x_3] = [x_3, x_4] = 1$.

Из теоремы о строении централизаторов легко получить, что в группе F_{L_4}, определенной графом L_4, имеет место неравенство $[[x_1, x_3], [x_2, x_4]] \neq 1$. Действительно, $[x_2, x_4]$ — блок. Из него не извлекается корень, т. е. $\sqrt{[x_2, x_4]} = [x_2, x_4]$. Значит, $[x_1, x_3] \in \text{гр}\langle[x_2, x_4]\rangle \times \mathbb{A}([x_2, x_4])$. Так как в группе F_{L_4} только вершина x_3 перестановочна с x_2 и x_4, то $\mathbb{A}([x_2, x_4]) = \text{гр}\langle x_3\rangle$. Но $[x_1, x_3] \notin \text{гр}\langle[x_2, x_4]\rangle \times \text{гр}\langle x_3\rangle$. Противоречие доказывает предложение.

Из предложения 2 следует, что среди свободных частично коммутативных групп «мало» таких, которые порождают квазимногообразие $\text{qvar}(F)$. Это контрастирует со следствием 1, справедливым в многообразии метабелевых групп. Более того, докажем, что существуют свободные частично коммутативные группы $G_n = F_{\Gamma_n}$, $n \geq 1$, с определяющими графами Γ_n такие, что

$$\text{qvar}(G_1) \subset \text{qvar}(G_2) \subset \dots \subset \text{qvar}(G_n) \subset \dots,$$

причем в этой цепочке все включения строгие.

Прежде чем приступить к построению групп G_n, напомним понятие централизаторной размерности группы. Более полные сведения о централизаторных размерностях групп можно найти в [11].

Пусть G — некоторая группа и M — некоторое ее подмножество. Через $C(M)$ будем обозначать централизатор множества M:

$$C(M) = \{g \in G \mid g^{-1}mg = m \text{ для всех } m \in M\}.$$

Предположим, что в группе G существует строго убывающая цепочка централизаторов $C_0 \supset \dots \supset C_d$ длины d, т. е. содержащая точно d знаков включения, но не существует такой цепочки длины $d+1$. Тогда *централизаторная размерность* $\mathrm{cdim}(G)$ равна d. Если такого числа d не существует, то полагают $\mathrm{cdim}(G) = \infty$.

В [12] доказано предложение 3.3. Оказывается, что если $\mathrm{cdim}(G)$ конечна и равна d, то в группе G существует набор элементов $g_1, \dots, g_d$ такой, что

$$G \supset C(g_1) \supset \dots \supset C(g_1, \dots, g_d) = Z(G),$$

где $Z(G)$ — центр группы G. Отсюда следует, что универсально эквивалентные группы имеют одинаковые централизаторные размерности.

В [12] исследовалась централизаторная размерность свободных частично коммутативных групп. Приведем некоторые определения и результаты из этой работы. *Каноническими* называются централизаторы непустых подмножеств $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\}$ множества вершин X, определяющего граф Γ. Будем обозначать их через $C(x_{i_1}, \dots, x_{i_t})$. В цитируемой работе доказано, что канонические централизаторы образуют подрешетку $\mathfrak{C}(X;G)$ в решетке централизаторов $\mathfrak{C}(G)$ свободной частично коммутативной группы $G = F_\Gamma$.

Для нас важна следующая теорема, доказанная в [13].

Теорема. *Централизаторная размерность* $\mathrm{cdim}(F_\Gamma)$ *свободной частично коммутативной группы* F_Γ *равна высоте решетки* $\mathfrak{C}(X;G)$ *канонических централизаторов.*

Это означает, что $\mathrm{cdim}(F_\Gamma) = d$ тогда и только тогда, когда в группе F_Γ найдутся элементы $x_1, \dots, x_d \in X$ такие, что

$$F_\Gamma \supset C(x_1) \supset \dots \supset C(x_1, \dots, x_d) = Z(F_\Gamma),$$

где $Z(F_\Gamma)$ — центр группы F_Γ.

Приступим к построению свободных частично коммутативных групп G_n. Определяющий граф Γ_n этой группы имеет множество вершин $X_n = U_n \sqcup V_n$, где $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$, $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$. Множество ребер E_n графа Γ_n определим следующим образом: $E_n = \{(v_i, u_j) \mid 1 \le i \le j \le n\}$. Граф Γ_n при $n = 3$ изображен на рис. 3.

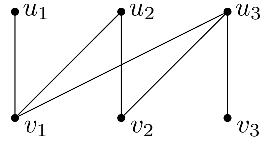

Рис. 3.

Таким образом, группа G_n имеет следующее представление:

$$G_n = \langle X_n \mid [v_i,\, u_j] = 1,\ 1 \leq i \leq j \leq n\rangle.$$

Лемма. *Централизаторная размерность группы G_n при $n \geq 2$ равна $n+1$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку канонических централизаторов

$$G_n \supseteq C(u_n) \supseteq C(u_{n-1}, u_n) \supseteq \dots \supseteq C(u_1, \dots, u_n) \supseteq C(u_1, \dots, u_n; v_n) = 1.$$

Заметим, что все включения в ней строгие. Действительно,

$$C(u_i, \dots, u_n) = \text{гр}\langle v_1, \dots, v_i\rangle$$

при $i < n$,

$$C(u_n) = \text{гр}\langle v_1, \dots, v_n, u_n\rangle.$$

Значит, $\operatorname{cdim}(G_n) \geq n+1$.

Предположим, что $\operatorname{cdim}(G_n) \geq n+2$. Тогда найдется строго убывающая цепочка канонических централизаторов

$$\begin{aligned} G_n \supset C(w_1) \supset C(w_1, w_2) \supset \dots \supset C(w_1, \dots, w_n)& \\ \supset C(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}) \supset C(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, w_{n+2})&, \end{aligned}$$

где $w_i \in X_n$.

Предположим, что среди вершин $w_1, \dots, w_i$ найдутся хотя бы две различные вершины u_p, u_q из U и хотя бы две различные v_s, v_t вершины из V. Так как множество вершин $\{u_p, u_q\}^{\perp}$, смежных с обеими вершинами u_p и u_q, не пересекается с множеством вершин $\{v_s, v_t\}^{\perp}$, смежных с обеими вершинами v_s и v_t, то $C(w_1, \dots, w_i) = 1$. Значит, $i = n+2$.

Поэтому среди вершин $\{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}\}$ только одна принадлежит множеству U, а остальные — множеству V, либо, наоборот, только одна принадлежит множеству V, а остальные — множеству U. Пусть, например, $\{w_1, \dots, w_n\} = U$, $w_{n+1} \in V$. Тогда для предпоследнего централизатора имеем равенство

$$C(u_1, \dots, u_n, w_{n+1}) = C(u_1, \dots, u_n, v_l).$$

Если $l = 1$, то $C(u_1, \dots, u_n, v_l) = \text{гр}\langle v_1\rangle$. Если $l \neq 1$, то $C(u_1, \dots, u_n, v_l) = 1$. Так как $C(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}) \neq 1$, то $l = 1$. Получаем

$$C(u_1, \dots, u_n) \supset C(u_1, \dots, u_n, v_1),$$

причем включение строгое. Но этого быть не может, так как оба централизатора равны $\text{гр}\langle v_1\rangle$. Противоречие доказывает лемму.

Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для любых n, m, $1 \leq m < n$, квазимногообразие $\operatorname{qvar}(G_m)$ строго содержится в квазимногообразии $\operatorname{qvar}(G_n)$.*

Доказательство. В [8] доказано, что при $n > m$ группа G_m является подгруппой G_n. Поэтому достаточно указать квазитождество, которое выполняется на группе G_m, но неверно на группе G_n. Можно считать, что $n, m \geq 2$.

На группе G_n верно предложение

$$\begin{aligned} \Phi_n = \exists g_1 \dots g_{n+1} h_0 \dots h_n (([g_1, h_n] \neq 1) \wedge ([g_2, h_n] = 1 \wedge [g_2, h_{n-1}] \neq 1)& \\ \wedge ([g_3, h_n] = 1 \wedge [g_3, h_{n-1}] = 1 \wedge [g_3, h_{n-2}] \neq 1)& \\ \wedge \dots \wedge ([g_{n+1}, h_1] = 1 \wedge \dots \wedge [g_{n+1}, h_n] = 1 \wedge [g_{n+1}, h_0] \neq 1))&. \end{aligned}$$

Чтобы проверить истинность этой формулы, достаточно сделать подстановку

$$g_1 = u_1, \quad g_2 = v_n, \quad g_3 = v_{n-1}, \dots, g_{n+1} = v_1,$$
$$h_0 = v_n, \quad h_1 = u_1, \quad h_2 = u_2, \dots, h_n = u_n.$$

Заметим, что если на некоторой группе G истинна формула Φ_n, то централизаторная размерность этой группы не меньше чем $n+1$. Действительно, цепочка централизаторов

$$G_n \supset C(h_n) \supset C(h_{n-1}, h_n) \supset \dots \supset C(h_1, \dots, h_n) \supset C(h_1, \dots, h_n, h_0)$$

строго убывающая, так как элементы $g_1, \dots, g_{n+1}$ лежат в соответствующих скачках цепи.

На группе G_n справедливо следующее усиление Ψ_n формулы Φ_n:

$$\begin{aligned}\Psi_n = \exists g_1 \dots g_{n+1} h_0 \dots h_n (([g_2, h_n] = 1) \wedge ([g_3, h_n] = 1 \wedge [g_3, h_{n-1}] = 1)\\ \wedge \dots \wedge ([g_{n+1}, h_1] = 1 \wedge \dots \wedge [g_{n+1}, h_n] = 1)\\ \wedge [[g_1, h_n], [g_2, h_{n-1}], [g_3, h_{n-2}], \dots, [g_{n+1}, h_0]] \neq 1),\end{aligned}$$

где последний коммутатор левонормированный.

Чтобы убедиться в справедливости этой формулы на группе G_n, достаточно сделать подстановку, определенную выше. Нужно только проверить, что элемент

$$w = [[u_1, u_n], [v_n, u_{n-1}], [v_{n-1}, u_{n-2}], \dots, [v_2, u_1], [v_1, v_n]]$$

не равен единице.

Воспользуемся для этого описанием централизаторов элементов в группе G_n. Заметим, что все коммутаторы $[z, z']$, встречающиеся в записи элемента w, являются блоками и из них не извлекаются корни в группе G_n. Чтобы убедиться в последнем, достаточно рассмотреть группу, порожденную элементами z и z' из одного коммутатора. Эта группа свободна, а элементы z, z' являются ее базой.

Итак, предположим, что $w = 1$ в группе G_n. Тогда элемент

$$w_1 = [[u_1, u_n], [v_n, u_{n-1}], [v_{n-1}, u_{n-2}], \dots, [v_2, u_1]]$$

принадлежит централизатору элемента $[v_1, v_n]$. По теореме о централизаторах

$$C([v_1, v_n]) = \text{гр}\langle [v_1, v_n] \rangle \times \text{гр}\langle u_n \rangle.$$

Значит, $w_1 = [v_1, v_n]^{l_1} u_n^{l_2}$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$. Применим к этому равенству эндоморфизм φ_1 группы G_n, при котором вершина u_1 отображается в единицу, а остальные вершины из X_n на себя. Получим $1 = [v_1, v_n]^{l_1} u_n^{l_2}$. Значит, $w_1 = 1$.

Продолжаем рассуждать аналогично, заменяя элемент w на w_1. Элемент

$$w_2 = [[u_1, u_n], [v_n, u_{n-1}], [v_{n-1}, u_{n-2}], \dots, [v_3, u_2]]$$

принадлежит централизатору элемента $[v_2, u_1]$. Поэтому $w_2 = [v_2, u_1]^{l_2}$, $l_2 \in \mathbb{Z}$. Применим к последнему равенству эндоморфизм φ_2, отображающий вершину u_2 в единицу, а остальные вершины — в себя. Имеем $w_2 = 1$.

В конце концов придем к включению $[u_1, u_n] \in C([v_n, u_{n-1}])$. Это означает, что $[u_1, u_n] = [v_n, u_{n-1}]^{l_n}$, $l_n \in \mathbb{Z}$. Применяя к этому равенству эндоморфизм φ_1, получим $[v_n, u_{n-1}]^{l_n} = 1$. Значит, $[v_n, u_{n-1}] = 1$. Получили противоречие, так как вершины v_n и u_{n-1} не смежны в графе Γ_n. Тем самым $w \neq 1$.

Формула Ψ_n неверна на группе G_m. Действительно, если формула Ψ_n верна на группе G_m, то на этой группе тем более верна формула Φ_n. В таком случае централизаторная размерность группы G_m не менее $n+1$. Но это не так по лемме.

Отрицание $\overline{\Psi}_n$ истинно на группе G_m и ложно на группе G_n. Ясно, что

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_n = \forall g_1 \dots h_0 \dots h_n([g_2, h_n] = 1 \wedge [g_3, h_n] = 1 \wedge [g_3, h_{n-1}] = 1 \\ \wedge \dots \wedge [g_{n+1}, h_1] = 1 \wedge \dots \wedge [g_{n+1}, h_n] = 1) \\ \longrightarrow [[g_1, h_n], [g_2, h_{n-1}], [g_3, h_{n-2}], \dots, [g_{n+1}, h_0]] = 1\end{aligned}$$

является квазитождеством. Итак, группы G_n и G_m различаются квазитождеством $\overline{\Psi}_n$. Теорема доказана.

Используя теорему 2, докажем, что ограничения $d(\Gamma) = 2$ на диаметр определяющего графа Γ, приведенного при формулировке предложения 2, недостаточно для совпадения универсальных теорий свободной группы F и частично коммутативной группы F_Γ.

Следствие 3. *Существуют частично коммутативные группы H_n с определяющим графом диаметра два такие, что*

$$\mathrm{qvar}(H_1) \subset \mathrm{qvar}(H_2) \subset \dots \subset \mathrm{qvar}(H_n) \subset \dots,$$

причем в этой цепочке все включения строгие.

Доказательство. Соединение графов Δ_1 и Δ_2 обозначим через $\Delta_1 + \Delta_2$. Напомним, что граф $\Delta_1 + \Delta_2$ состоит из объединения $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и всех ребер, соединяющих вершины графа Δ_1 с вершинами графа Δ_2.

Заметим, что если $d(\Delta_1) \geq 2$ или $d(\Delta_2) \geq 2$, то $d(\Delta_1 + \Delta_2) = 2$.

Пусть $\Gamma^{(n)}$ — соединение $\Gamma_n + \Gamma_n$ определяющих графов Γ_n групп G_n из теоремы 2.

Очевидно, что группа H_n с определяющим графом $\Gamma^{(n)}$ изоморфна группе $G_n \times G_n$. Таким образом, каждое квазимногообразие $\mathrm{qvar}(H_n)$ совпадает с квазимногообразием $\mathrm{qvar}(G_n)$, и, следовательно, все они различны. При этом все графы $\Gamma^{(n)}$ имеют диаметр два. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 3. С. 309–341.
2. *Тимошенко Е. И.* Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 2. С. 263–290.
3. *Тимошенко Е. И.* Об универсальных теориях метабелевых групп и вложении Шмелькина // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1168–1175.
4. *Ремесленников В. Н., Романовский Н. С.* О метабелевых произведениях групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 341–352.
5. *Remeslennikov V., Stöhr R.* On the quasivariety generated by a non-cyclic free metabelian group // Algebra Colloq. 2004. V. 11, N 2. P. 191–214.
6. *Ремесленников В. Н.* Представление конечно порожденных метабелевых групп матрицами // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 1. С. 72–76.
7. *Baumslag G., Miasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219. P. 16–79.
8. *Esyp E. E., Kazachkov I. V., Remeslennikov V. N.* Divisibility theory and complexity of algorithms for free partially commutative groups // Contemp. Math. 2005. V. 378. P. 319–348.
9. *Duchamp G., Krab D.* Partially commutative Magnus transformations // Int. J. Algebra Comput. 1993. V. 3. P. 15–41.

10. *Servatius H.* Automorphisms in partially commutative groups // J. Algebra. 1989. V. 126, N 1. P. 34–60.
11. *Myasnikov A., Shumayatsky P.* Discriminating groups and c-dimension // J. Group Theory. 2004. V. 7. P. 135–142.
12. *Dunkan A. J., Kazachkov I. V., Remeslennikov V. N.* Centralizer dimension and universal classes of group // Sib. Electron. Math. Rep. http://semr.math.nsc.ru. 2006. V. 3. P. 197–215.
13. *Dunkan A. J., Kazachkov I. V., Remeslennikov V. N.* Centralizer dimension of partially commutative groups // Geom. Dedicata. 2006. V. 120, N 1. P. 73–97.

Статья поступила 3 июля 2012 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru