*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2013. Том 54, № 4*

*УДК 517.977*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО–АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ

**В. Ф. Чистяков**

**Аннотация.** Изучаются условия разрешимости систем линейных интегральных уравнений Вольтерра с тождественно вырожденной или прямоугольной матрицей при главном члене. Обсуждается связь условий разрешимости и применимости численных методов для решения таких систем. В частности, получены условия сходимости метода наименьших квадратов. При этом функционал квадрата невязки рассматривается в пространствах Соболева.

**Ключевые слова:** интегро-алгебраическое уравнение, индекс, метод наименьших квадратов, разностная схема, особая точка.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$(\Lambda_0 + V)x := A(t)x + \int_\alpha^t p(t,s)K(t,s)x(s)\,ds = f, \quad t \in T = [\alpha,\beta], \tag{1}$$

где $A(t)$, $K(t,s)$ — $(m \times n)$-матрицы, $x \equiv x(t)$, $f \equiv f(t)$ — искомая и заданная вектор-функции соответственно, $p(t,s) = 1$ либо $p(t,s) = (t-s)^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $\Lambda_0 x := A(t)x$. Предполагается, что входные данные достаточно гладкие и характер вырождения задается условием

$$\operatorname{rank} A(t) < \min\{m,n\} \quad \forall t \in T. \tag{2}$$

Система (1) называется *замкнутой*, если число уравнений равно числу компонент искомой вектор-функции ($m = n$), *переопределенной*, если $m > n$, и *недоопределенной*, если $m < n$. Для замкнутой системы условие (2) эквивалентно равенству $\det A(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Под *решением системы* (1) на $T$ будем понимать любую вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}(T)$, которая обращает уравнение (1) в тождество на $T$.

В частности, в виде (1) можно записать системы алгебраических уравнений, интегральных уравнений Вольтерра первого и второго родов, связанные по части переменных

$$u + \int_\alpha^t [K_{11}(t,s)u(s) + K_{22}(t,s)v(s)]\,ds = f_1, \quad \int_\alpha^t [K_{21}(t,s)u(s) + K_{22}(t,s)v(s)]\,ds + f_2,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00639–а) и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (№ 80).

$$A_{31}(t)u + A_{32}(t)v + A_{33}(t)w = f_3, \quad t \in T, \tag{3}$$

где $x = (u, v, w)^\top$, $\top$ — символ транспонирования,

$$A(t) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{31}(t) & A_{32}(t) & A_{33}(t) \end{pmatrix},$$

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) & 0 \\ K_{21}(t,s) & K_{22}(t,s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

$E$ — единичная матрица, $K_{ij}(t,s)$, $A_{3q}(t)$ — некоторые блоки подходящего размера, $i, j = 1, 2$, $q = 1, 2, 3$.

В настоящее время исследования дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) $A(t)\dot{x} + B(t,x) = 0$, $t \in T$, где $B(t,x)$ — $m$-мерная вектор-функция, $\dot{} = d/dt$, и матрица $A(t)$ удовлетворяет условию (2), отражены в многочисленных публикациях. Только за последнее десятилетие изданы ряд монографий и учебных пособий, сотни статей (см., например, [1] и приводимую там библиографию). Системы интегральных уравнений (ИУ) вида (1) пока не привлекли такого пристального внимания, но в последнее время исследования активизировались. Большей частью изучался случай замкнутых систем, когда объект имеет вид (3) и $|\det K_{22}(t,t)| > 0$, $t \in T$, называемый полуявной системой (см., например, [1, 2]). Получен ряд результатов о системах с ядром типа свертки общего вида [3, 4]. Начаты исследования по изучению многомерных интегро-алгебраических уравнений [5].

Коротко обсудим терминологию, которая еще не устоялась. Имеется общепринятая классификация замкнутых систем ИУ вида (1) (см., например, [6]):

(a) если $A(t) \equiv 0$, $t \in T$, то (1) называется *системой ИУ Вольтерра* I *рода*;

(b) если $A(t) = E_n$, где $E_n$ — единичная матрица размера $n$, то (1) называется *системой ИУ Вольтерра* II *рода* (если $\det A(t) \neq 0$, $t \in T$, то систему (1) отнесем к системам II рода, так как выражение $A^{-1}(t)[(\Lambda_0 + V)x - f] = 0$ является системой II рода);

(c) если $\det A(t)$ обращается в нуль на дискретном множестве точек отрезка $T$, то (1) называется *системой ИУ Вольтерра* III *рода*.

В этом ряду естественно смотрится термин *системы ИУ Вольтерра* IV *рода*, используемый в [7, 8]. Но в литературе все чаще (по аналогии с термином ДАУ) используется термин *интегро-алгебраические уравнения* (integral-algebraic equations), хотя он является не совсем удачным, так как можно указать системы вида (1), не содержащие алгебраических уравнений. Например, такая система получается исключением в (3) последнего уравнения. В данной работе продолжаются исследования, начатые в [9].

Целью статьи являются выяснение структуры решений систем вида (1) и на этой основе получение условий применимости численных методов для этих систем.

Ниже используются евклидова и равномерная нормы $q$-мерного вектора $b \in \mathbb{R}^q$, вычисляемые соответственно по правилам

$$\|b\|_q^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_q^2; \quad \|b\|_I = \max\{|b_i|,\ i = 1, 2, \dots, q\}, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_q)^\top,$$

где $\top$ — символ транспонирования.

Замечание 1. Для упрощения записи указание зависимости от $t$ в работе будет иногда опускаться, если это не вызывает путаницы.

Замечание 2. Включения $V(t) \in \mathbf{C}^i(T)$, $Z(t,s) \in \mathbf{C}^i(T \times T)$, $i > 1$, где $V(t)$, $Z(t,s)$ — матрицы или вектор-функции, означают, что все их элементы дифференцируемы $i$ раз включительно в областях определения. Непрерывности соответствуют обозначения: $V(t) \in \mathbf{C}(T)$, $Z(t,s) \in \mathbf{C}(T \times T)$. Записи $V(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $Z(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$ означают, что все элементы $V(t)$, $Z(t,s)$ являются вещественно-аналитическими функциями на $T$ и на $T \times T$ соответственно.

## 2. Основные определения

Приведем некоторые сведения о структуре общих решений систем вида (1) в случае полного ранга матрицы $A(t)$. Нам потребуются такие понятия и утверждения.

Определение 1 (см., например, [10]). *Полуобратной матрицей к $(m\times n)$-матрице $M(t)$, $t \in T$*, называется $(n \times m)$-матрица $M^-(t)$, удовлетворяющая для любых $t \in T$ уравнению

$$M(t)M^-(t)M(t) = M(t). \tag{4}$$

Полуобратная матрица будет псевдообратной (обозначается через $M^+(t)$), если кроме (4) для всех $t \in T$ выполнены равенства

$$\begin{gathered} M^+(t)M(t)M^+(t) = M^+(t), \quad M^+(t)M(t)^\top = M^+(t)M(t), \\ M(t)M^+(t)^\top = M(t)M^+(t). \end{gathered} \tag{5}$$

Полуобратная и псевдообратные матрицы определены поточечно для любого $t \in T$ и любой $(m \times n)$-матрицы $M(t)$. Псевдообратная матрица единственна. Теория постоянных обобщенных обратных матриц изложена в ряде монографий (см., например, [10]). Если матрица $M(t)$ квадратная и неособенная, то $M^{-1}(t) = M^+(t) = M^-(t)$.

В [11, 12] соответственно доказаны следующие утверждения.

**Лемма 1.** *Пусть $(n\times n)$-матрица $A(t)$ принадлежит $\mathbf{C}^i(T)$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда для существования полуобратной и псевдообратной матриц $A^-(t), A^+(t) \in \mathbf{C}^i(T)$ необходимо и достаточно условие $\operatorname{rank} A(t) = \mathrm{const} = r$, $t \in T$. Более того, существуют $(n \times n)$-матрицы $L(t), R(t) \in \mathbf{C}^i(T)$ такие, что $\det[L(t)R(t)] \neq 0$, $t \in T$, $L(t)A(t)R(t) = \operatorname{diag}\{E_r, 0\}$.*

**Лемма 2.** *Пусть*

1) *$(n \times n)$-матрица $A(t)$ принадлежит $\mathbf{C}^A(T)$;*

2) *$\operatorname{rank} A(t) \le r$.*

*Тогда существуют $(n \times n)$-матрицы $L(t), R(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ такие, что*

$$\det[L(t)R(t)] \neq 0, \ t \in T, \quad L(t)A(t)R(t) = \operatorname{diag}\{A_{11}(t), 0\},$$

*где $A_{11}(t)$ — $(r \times r)$-блок, $\det A_{11}(t) \not\equiv 0$ на $T$.*

Используя свойства полуобратных матриц, перепишем систему (1) в эквивалентной форме

$$x = -\int\limits_{\alpha}^{t} A^-(t)K(t,s)x(s)\,ds + A^-(t)f(t) + [E_n - A^-(t)A(t)]u(t), \tag{6}$$

$$[E_m - A(t)A^-(t)]\left[-\int\limits_\alpha^t K(t,s)x(s)\,ds + f(t)\right] = 0, \quad t \in T, \tag{7}$$

где $u(t)$ — произвольная вектор-функция. Эта запись основана на представлении решения линейной системы $My = b$ в виде соотношения $y = M^-b + [E_n - M^-M]v$, где $v$ — произвольный вектор. Условие совместности имеет вид $[E_m - MM^-]b = 0$ (см., например, [10]).

Пусть в системе (1) $A(t) \in \mathbf{C}^q(T)$ и $\operatorname{rank} A(t) = \min\{m,n\}$, $t \in T$. Для определенности примем $A^-(t) = A^+(t)$, $m \le n$. Тогда в (6) $E_m - A(t)A^+(t) \equiv 0$, $A^+(t) \in \mathbf{C}^q(T)$ и

$$x(t) = \varphi(t) + \int\limits_\alpha^t \mathbf{K}(t,s)\varphi(s)\,ds, \quad \varphi(t) = A^+(t)f(t) + [E_n - A^+(t)A(t)]u(t) \tag{8}$$

ввиду [6], где $\mathbf{K}(t,s)$ — разрешающее ядро произведения $A^+(t)V$. Если $p(t,s) = 1$, $K(t,s) \in \mathbf{C}^q(T \times T)$, $f(t), u(t) \in \mathbf{C}^q(T)$, то $x(t) \in \mathbf{C}^q(T)$.

Рассмотрим случай $m > n$. Здесь $E_n - A(t)^+A(t) \equiv 0$. Тогда для существования решений у системы (1) необходимо и достаточно, чтобы $x(t)$ из формулы (8) удовлетворяло соотношению (7) при $A^-(t) = A^+(t)$.

Определение 2. Пусть заданы операторы

$$\Lambda_l := \sum_{j=0}^{l} L_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j, \quad \widetilde{\Lambda}_q := \sum_{j=0}^{q} \widetilde{L}_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j, \quad \overline{\Lambda}_\omega := \sum_{j=0}^{\omega} \overline{L}_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где $L_j(t) \in \mathbf{C}(T)$, $\widetilde{L}_j(t) \in \mathbf{C}^l(T)$ — $(\rho \times \rho)$-матрицы, $\overline{L}_\omega(t) = E_\rho$, со свойством

$$\Lambda_l \circ \widetilde{\Lambda}_q y = \overline{\Lambda}_\omega y \quad \forall y \in \mathbf{C}^{l+q}(T).$$

Тогда оператор $\Lambda_l$ будем называть *левым нормализатором* (ЛН) для оператора $\widetilde{\Lambda}_q$, а оператор $\widetilde{\Lambda}_q$ — *правым нормализатором* (ПН) для оператора $\Lambda_l$.

Предположим, что $p(t,s) = 1$ в формуле (1), и введем следующие понятия.

Определение 3. Пусть для оператора $\Lambda_{l,*} := \sum\limits_{j=0}^{l} L_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$, где $L_j(t) \in \mathbf{C}(T)$ — $(m \times m)$-матрицы, определен ЛН и выполнено равенство

$$\Lambda_{l,*} \circ (\Lambda_0 + V)y = \begin{pmatrix} A_l(t) \\ 0 \end{pmatrix} y + \int\limits_\alpha^t \begin{pmatrix} K_l(t,s) \\ 0 \end{pmatrix} y(s)\,ds \quad \forall y \in \mathbf{C}^l(T), \tag{9}$$

где матрицы $A_l(t)$, $K_l(t,s)$ имеют размер $(k \times n)$, $0 < k \le \min\{m,n\}$, причем матрица $A_l(t)$ имеет полный ранг для всех $t \in T$, кроме, возможно, конечного числа точек $t_j \in T$, $j = 0,1,2,\dots,\nu$.

Если матрица $A_l(t)$ имеет полный ранг для всех $t \in T$, то оператор $\Lambda_{l,*}$ будем называть *левым регуляризирующим оператором* (ЛРО) для оператора $\Lambda_0 + V$, а минимально возможное $l$ — его *индексом.*

Определение 4. Точки $t_j \in T$, $j = 0,1,2,\dots,\mu$, со свойством: $\operatorname{rank} A_l(t_j) < k$ в формуле (9), будем называть *особыми точками системы* (1).

Пример 1. Рассмотрим уравнения

$$tx(t) + \int\limits_0^t (\rho+1)x(s)\,ds = 0, \quad ty(t) - \int\limits_0^t (\rho+1)y(s)\,ds = 0,$$

где $\rho = 1, 2, \dots$, $T = [0, 1]$. Здесь точка $t = 0$ является особой, первое уравнение имеет только нулевое решение, а второе имеет семейство решений $y(t) = ct^{\rho}$.

Пример 2. Пусть задана система

$$(\Lambda_0 + V)x = \begin{pmatrix} t & 1 \\ \delta t^2 & \delta t \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t \left[ \begin{pmatrix} \gamma - 1 & 0 \\ \delta(\gamma - 1)t + s + (t - s)g(t)s & 1 + (t - s)g(t) \end{pmatrix} \right] x(s)\, ds = 0, \quad (10)$$

где $\gamma, \delta$ — вещественные параметры, $t \in T = [0, 1]$, $g(t)$ — заданная функция из $\mathbf{C}^{\infty}(T)$. Здесь $x_2 = -tx_1$, где $(x_1\ x_2)^{\top} = x$. Тогда

$$\int_0^t (\gamma - 1)x_1(s)\, ds = 0 \Leftrightarrow \dim\ \ker\ (\Lambda_0 + V) = 0$$

при $\gamma \neq 1$. Это следует из первого уравнения системы (10). Здесь

$$\ker\ (\Lambda_0 + V) = \{y \in \mathbb{C}[0, 1] : (\Lambda_0 + V)y = 0\}. \quad (11)$$

При $\gamma = 1$ справедливо соотношение $\dim \ker(\Lambda_0 + V) = \infty$, dim — символ размерности пространства, так как подстановкой проверяется, что любая вектор-функция вида $(-u(t)\ tu(t))^{\top}$, где $u(t)$ — произвольная функция из $\mathbf{C}[0, 1]$, является решением системы. В качестве базиса ядра можно принять набор $\phi_j = (\,-t^j \quad t^{j+1}\,)^{\top}$, $j = 0, 1, \dots$.

Если $\gamma \neq 1$, то $l = 2$ и в определении 3 можно принять

$$\Lambda_{l,*} = \mathbf{d}L\mathbf{d}W,\ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\delta t & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\det A_l(t) = \gamma - 1\ \forall g(t)$, $k = 2$.

Если $\gamma = 1$, $g(t) = e^t$, то $l = 3$ и можно принять

$$\Lambda_{l,*} = L\mathbf{d}L\mathbf{d}\,\mathrm{diag}\{1, e^{-t}\}L\mathbf{d}W.$$

В случае, когда $\gamma = 1$, $g(t) = \sin(t)$, пока непонятно, как построить ЛРО в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка.

Замечание 3. В случае существования ЛРО по формуле (8) можно выписать общее решение системы

$$A_l(t)x + \int_{\alpha}^t K_l(t, s)x(s) = \Lambda_1 f, \quad t \in T,$$

где $\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda_{l,*}$, и подставить его в исходную для проверки. Для совместности системы (1) необходимо, чтобы $\Lambda_2 f = 0$.

Дифференциальные операторы, для которых определен нормализатор, выполняют роль неособенных матриц в матричном анализе. А именно, если интегродифференциальный оператор имеет конечномерное ядро, то произведение этого оператора на нормализатор также имеет конечномерное ядро и количество особых точек в области определения не меняется.

Замечание 4. Очевидно, что для систем (1) при $m \geq n$ условие

$$\dim\ker(\Lambda_0 + V) < \infty$$

выполняется только тогда, когда $k = n$ в формуле (9).

Определение 5. Пусть в системе (1) $p(t,s) = 1$. Выражение $\mathrm{d}_q[(\Lambda_0 + V)x] = \mathrm{d}_q[f]$ называется *$q$-продолженной системой* (1).

Продолженную систему можно записать в виде равенства

$$\mathrm{d}_q[(\Lambda_0 + V)x] = \Gamma_q[A,K]\,\mathrm{d}_q[x] + \int\limits_0^t \mathrm{d}_q[K](t,s)x(s)\,ds = \mathrm{d}_q[f], \tag{12}$$

где

$$\Gamma_q[A,K](t) = \mathscr{M}_q[A](t) + \sum_{j=0}^{q} \widetilde{E}_j \mathscr{M}_q[H_j](t), \quad \widetilde{E}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(q-j)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_0(t) \equiv K(t,t), \quad H_j(t) = \frac{\partial^j K(t,s)}{\partial t^j}\bigg|_{t=s}, \ \overline{j=1,q},$$

матрицы $\widetilde{E}_j$ квадратные размера $n(q+1)$,

$$\mathscr{M}_j[A](t) = \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 A^{(1)}(t) & C_1^1 A(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_j^0 A^{(j)}(t) & C_j^1 A^{(j-1)}(t) & \dots & C_j^j A(t) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\mathrm{d}_j[\,\cdot\,] = (E, (d/dt)E, \dots, (d/dt)^j E)^{\mathrm{T}}, \quad j = 0,1,\dots, \tag{14}$$

$C_j^\nu$ — биномиальные коэффициенты. Операторы (13), (14) при $j = 0$ понимаются как тождественные. Размер единичной матрицы $E$ определяется контекстом.

Введем функционал

$$\mathscr{Q}_q(x) = \sum_{j=0}^{q} \int\limits_\alpha^\beta \left\| \left(\frac{d}{dt}\right)^j [(\Lambda_0 + V)x - f] \right\|_m^2 dt = \sum_{j=0}^{q} \left\| \left(\frac{d}{dt}\right)^j [(\Lambda_0 + V)x - f] \right\|_{\mathscr{H}_m}^2$$

$$= \left\| \Gamma_q[A,\ K](t)\,\mathrm{d}_q[x] + \int\limits_\alpha^t \mathrm{d}_q[K(t,s)]x(s)\,ds - \mathrm{d}_q[f] \right\|_{\mathscr{H}_\mu}^2, \tag{15}$$

где $q$ целое, $\mu = (q+1)m$, $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_m}$ — норма в гильбертовом пространстве $L_{2,m}(T)$, а именно $h \in \mathscr{H}_m$, $\|h\|^2_{\mathscr{H},m} = \int\limits_\alpha^\beta \|h(t)\|_m^2\,dt$.

Определение 6. Пусть $\mathscr{X} = \{x_* \equiv x_*(t) : \ (\Lambda_0 + V)x_* - f = 0\}$ — множество решений системы (1) и начиная с некоторого $q = l_\varepsilon$ из неравенства $\mathscr{Q}_q(x_\varepsilon) < \varepsilon$ следует неравенство

$$\min\bigl\{\|x_* - x_\varepsilon\|^2_{\mathscr{H},m},\ x_* \in \mathscr{X}\bigr\} \leq \kappa\varepsilon, \quad \kappa = \mathrm{const}. \tag{16}$$

Тогда число $l_\varepsilon$ будем называть *индексом системы* (1) *по возмущению.*

Замечание 5. Понятие индекса по возмущению введено в [9]. В более узком смысле понятия индекса и ЛРО введены в [11]. Предполагалось, что системы (1) замкнутые и $k = n$ в формуле (9).

## 3. Теоремы существования

При доказательстве первых теорем о разрешимости систем вида (1) базовую роль играло следующее понятие.

Определение 7. Пучок матриц $\lambda A(t)+B(t)$, где $A(t), B(t)\in \mathbf{C}(T)$, $\lambda$ — комплексный параметр, удовлетворяет на $T$ критерию «ранг-степень», если многочлен $\det[\lambda A(t)+B(t)] = a_r(t)\lambda^r+\dots$ имеет степень $r=\max\{\operatorname{rank} A(t),\ t\in T\}$ и $a_r(t)\neq 0$, $t\in T$.

**Теорема 1** [9, 13]. *Пусть для замкнутой системы* (1) *выполнены условия:*
1) $A(t), f\in \mathbf{C}^1(T)$, $K(t,s)\in \mathbf{C}^1(T\times T)$;
2) *пучок матриц* $\lambda A(t)+K(t,t)$ *удовлетворяет на* $T$ *критерию «ранг-степень»;*
3) $\operatorname{rank} A(\alpha) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A(\alpha) & f(\alpha)\end{pmatrix}$ (*критерий Кронекера — Капелли* [14]) *в точке* $t=\alpha$.

*Тогда существует единственное решение системы* (1) $x(t)\in \mathbf{C}(T)$.

**Лемма 3.** *Пусть в замкнутой системе* (1) $p(t,s)=1$ *и для нее выполнены условия:*
1) $A(t)\in \mathbf{C}^q(T)$, $K(t,s)\in \mathbf{C}^q(T\times T)$;
2) $H_j(t)\equiv 0$ *на* $T$, $j=\overline{0,q-1}$, *где* $H_0(t)\equiv K(t,t)$, $H_j(t)=\frac{\partial^j K(t,s)}{\partial t^j}\big|_{t=s}$;
3) *пучок матриц* $\lambda A(t)+H_q(t)$ *удовлетворяет на* $T$ *критерию «ранг-степень». Тогда индекс оператора системы* $l$ *равен* $q$.

*Более того, если* $A(t)\in \mathbf{C}^A(T)$, $K(t,s)\in \mathbf{C}^A(T\times T)$ *и многочлен* $\det[\lambda A(t)+H_q(t)]$ *имеет степень* $r$, *то нули старшего коэффициента многочлена совпадают с особыми точками системы и других особых точек на* $T$ *нет.*

Доказательство. Из представления

$$\overline{P}(\lambda\overline{A}+\overline{B})\overline{Q} = \lambda\operatorname{diag}\{E_d,\overline{N}\}+\operatorname{diag}\{\overline{J},E_{n-d}\},$$

где $\overline{A},\overline{B}$ — $(n\times n)$-матрицы, $\overline{P},\overline{Q}$ — постоянные $(n\times n)$-матрицы, $\overline{N}^{n-d}=0$, следует, что степень характеристического многочлена $d=\deg\det(\lambda\overline{A}+\overline{B})$ не меньше $\operatorname{rank}\overline{A}$ [14]. Следовательно, в условиях леммы $r=\operatorname{rank}A(t)=\mathrm{const}$ $t\in T$. Справедливо равенство

$$a_r(t)\det[L(t)R(t)] = \det\begin{pmatrix} L_1(t)A(t)\\ L_2(t)H_q(t)\end{pmatrix}R(t) = \det\begin{pmatrix} E_r(t) & 0\\ H_{21}(t) & H_{22}(t)\end{pmatrix}\neq 0\ \forall t\in T,$$

где $\begin{pmatrix} L_1(t)\\ L_2(t)\end{pmatrix}=L(t), R(t)$ — матрицы из леммы 1,

$$\begin{pmatrix} H_{21}(t) & H_{22}(t)\end{pmatrix} = L_2(t)H_q(t)R(t),\quad \det[\lambda A(t)+H_q(t)] = a_r(t)\lambda^r+\dots.$$

Согласно [9] $\det H_{22}(t)\neq 0$, $t\in T$. Следовательно, оператор

$$\Lambda_{*,1} = \begin{pmatrix} L_1(t)\\ 0\end{pmatrix}+\left(\frac{d}{dt}\right)^q\begin{pmatrix} 0\\ L_2(t)\end{pmatrix} \tag{17}$$

можно принять в качестве ЛРО.

Далее, при аналитических входных данных

$$a_r(t)\det[L(t)R(t)] = \det\begin{pmatrix} L_1(t)A(t)\\ L_2(t)H_q(t)\end{pmatrix}R(t) = \det\begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0\\ H_{21}(t) & H_{22}(t)\end{pmatrix},$$

где $L(t), R(t)$ — матрицы из леммы 2. Из этого следует, что оператор (17) приводит исходную систему к виду (9), где $k = n$ и $\operatorname{rank} A_l(t_j) < n$ в точках обращения в нуль коэффициента $a_r(t)$. Лемма доказана.

Замечание 6. Алгоритмы поиска особых точек для более сложных систем в настоящее время отсутствуют, кроме случая, когда (1) получена интегрированием ДАУ [11].

Пример 3. Рассмотрим систему

$$(\Lambda_0 + V)x = \begin{pmatrix} t & 1 \\ \delta t^2 & \delta t \end{pmatrix} x(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1-\delta+\gamma \end{pmatrix} x(s)\,ds = f(t), \quad t \in T,$$

где $\gamma, \delta$ — вещественные параметры, $\alpha \neq 0$. Если $\gamma \neq 0$, то выполнен критерий «ранг-степень» и система имеет индекс 1 (в случае $0 \in T$ точка $t = 0$ является особой), иначе система имеет индекс 2.

**Теорема 2.** *Пусть в системе* (1) $m \le n$, $p(t,s) = 1$ *и для нее выполнены условия:*

1) $A(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, $f \in \mathbf{C}^l(T)$;

2) *на* $T$ *определен индекс оператора системы, равный* $l < \infty$, *причем* $k = m$ *в формуле* (9);

3) $\operatorname{rank} \Upsilon_{l-1} = \operatorname{rank} (\,\Upsilon_{l-1} \quad \mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha)\,)$, *где* $\Upsilon_{l-1} = \Gamma_{l-1}[A,\ K](\alpha)$.

*Тогда система* (1) *имеет семейство решений вида*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{l} S_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j f + \int\limits_{\alpha}^{t} K_1(t,s) f(s)\,ds + \sum_{j=0}^{l} W_j(t) f^{(j)}(\alpha) + K_2(t)u(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K_3(t,s)u(s)\,ds, \quad (18)$$

*где* $S_j(t)$, $W_j(t)$, $K_2(t)$ — $(n \times n)$-*матрицы из* $\mathbf{C}^A(T)$, $K_1(t,s)$, $K_3(t,s)$ — $(n \times n)$-*матрицы из* $\mathbf{C}^A(T \times T)$, $u(t)$ — *произвольная вектор-функция.*

Доказательство. В условиях теоремы справедлива альтернатива:

$$\operatorname{rank} A = m \ \forall t \in T \quad \text{либо} \ \operatorname{rank} A < m \ \forall t \in T.$$

Действительно, по определению 3 $L_l A \equiv 0$, $t \in T$. Пусть $(n \times n)$-матрица $R$ из леммы 2 применительно к $(n \times n)$-матрице $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ обладает свойством $AR = (\,A_1 \quad 0\,)$, где блок $A_1$ имеет размер $m \times m$. Если $\det A_1(\gamma) \neq 0$, $\gamma \in T$, то существует окрестность $\mathscr{O} = (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \subset T$ такая, что $\det A_1(t) \neq 0$, $t \in \mathscr{O}$ (вместо окрестности могут быть полуинтервалы $[\alpha, \alpha + \delta)$, $(\beta - \delta, \beta])$, и невозможно равенство $L_l A \equiv 0$, $t \in \mathscr{O}$ при любой матрице $L_l$. С использованием леммы 2 выпишем нужные далее равенства

$$LAR = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad LA = \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T, \quad (19)$$

где $L, R \in \mathbf{C}^A(T)$, $A_{11}$ — $(r \times r)$-блок, $\det\, A_{11}(t) \not\equiv 0$ на $T$, $r = \max\{\operatorname{rank} A(t), t \in T\}$.

Из формулы Лейбница для дифференцирования произведений для достаточно гладких матриц $Z$, $\varphi$ подходящего размера следуют соотношения для операторов (13), (14): $\mathscr{M}_i[Z\varphi] = \mathscr{M}_i[L]\,\mathrm{d}_i[\varphi]$. Запишем равенства

$$M\Gamma_l[A,K] = \Gamma_l[LA, LK], \quad M\mathrm{d}_l[K] = \mathrm{d}_l[LK], \quad M\mathrm{d}_l[f]) = \mathrm{d}_l[Lf], \tag{20}$$

где $M = \mathscr{M}_k[L]$. Первое из равенств (20) позволяет выписать соотношение

$$P\Gamma_l[A,K] = P(SM)^{-1}(SM)\Gamma_l[A,K] = U\Gamma_l^1[A,K], \tag{21}$$

где $P = (\,L_0 \quad L_1 \quad \dots \quad L_l\,)$ — матрица из коэффициентов ЛРО, $S$ — матрица перестановок блочных строк по правилу: на место второй — четвертую, четвертой — шестую и т. д. Вторую строку поставим последней. В результате этих преобразований получим новую матрицу

$$\begin{gathered}\Gamma_l^1[A,\ K] = \begin{pmatrix} \Gamma_{l-1}[A_1, K_1] & 0 \\ W^0 & A_1^0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T, \\ A_1 = \begin{pmatrix} A_1^0 \\ K_2^1(t,t) \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} K_1^0(t,s) \\ \partial K_2^0(t,s)/\partial t \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{22}$$

где $W^0$ — некоторый блок подходящего размера. Число нулевых строк в первой матрице из (22) равно $r$. По матрицам $A_1,\ K_1$ построим оператор

$$(\Lambda_{0,1} + \mathscr{V}_1)x = [\Omega_0 \circ (\Lambda_0 + \mathscr{V})]x = A_1 x + \int\limits_{\alpha}^{t} K_1(t,s)x(s)\,ds, \quad t \in T, \tag{23}$$

который можно получить действием на исходную систему оператором

$$\Omega_0 = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ L_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_1^0 \\ L_2^0 \end{pmatrix} = L, \tag{24}$$

Число строк в блоке $L_1^0$ равно $r$. Введем обозначение

$$U = P(SM)^{-1} = (\,U_0 \quad U_1 \quad \dots \quad U_l\,).$$

По условию $P_l A \equiv 0$ на $T$ и из равенств (19) следует, что

$$P_l L^{-1} LA = U_l \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_l \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} R = U_l \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{25}$$

Введем разбиение на блоки $U_l = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$, где $V_{11} - (r \times r)$-блок. Согласно (19) из (22) получаем $V_{11}A_{11} \equiv 0$, $V_{21}A_{11} \equiv 0$, $t \in T$, где $\det A_{11} \not\equiv 0$, $t \in T$. Таким образом, с учетом аналитичности сомножителей видим, что $V_{11} \equiv 0,\ V_{21} \equiv 0$. Отсюда

$$(\,U_0 \quad U_1 \quad \dots \quad U_{l-1}\,)\,\Gamma_{l-1}[A_1, K_1] = (\,A_l \quad 0 \quad \dots \quad 0\,). \tag{26}$$

Следовательно, оператор $\sum\limits_{j=0}^{l-1} U_j \big(\frac{d}{dt}\big)^j$ является ЛРО для оператора (23).

Матрицу $\Upsilon_{l-1}$ и вектор $\mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha)$ умножим на матрицу $\mathscr{M}_{l-1}[L](\alpha)$ и переставим блочные строки. Таким образом выделим из условия 3 теоремы новые условия разрешимости

$$\operatorname{rank} \Upsilon_{l-2}^1 = \operatorname{rank}(\,\Upsilon_{l-2}^1 \quad \mathrm{d}_{l-2}[f_1](\alpha)\,), \tag{27}$$

где $\Upsilon^1_{l-2} = \Gamma_{l-2}[A_1, K_1](\alpha)$, $f_1 = \Omega_0 f$.

Для матрицы $A_1$ из формулы (23) в силу существования ЛРО с коэффициентами из формулы (26) справедлива альтернатива: $\operatorname{rank} A_1 = m$, $t \in T$ либо $\operatorname{rank} A_1 < m$, $t \in T$. Проводя аналогичные рассуждения, получим систему интегральных уравнений, определяемую матрицами $A_2$, $K_2$, и новые условия совместности. В силу условия 2 теоремы за конечное число шагов придем к системе с матрицей $A_l$ полного ранга для всех $t \in T$, для которой можно выписать общее решение по формуле (8).

Рассмотрим системы на шагах процесса понижения индекса с номерами $l$ и $l-1$:

$$[\Lambda_{0,l} + V_l]y = f_l, \quad [\Lambda_{0,l-1} + V_{1-1}]y = f_{l-1}, \tag{28}$$

где

$$f_i = \Omega_{l-1}\Omega_{l-2}\dots\Omega_0 f, \quad i = l-1, l. \tag{29}$$

Пусть $y \equiv y(t)$ — решение первой из систем. Первые $r_{l-1}$ уравнений у обеих систем совпадают, где $r_{l-1} = \max\{\operatorname{rank} A_{l-1}(t), t \in T\}$. Условие (27) здесь имеет вид

$$\operatorname{rank} A_{l-1}(\alpha) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A_{l-1}(\alpha) & f_{l-1}(\alpha)\end{pmatrix}. \tag{30}$$

Напомним, что первая из систем (28) получена умножением второй на оператор $\Omega_{l-1}$. При этом система умножается на неособенную матрицу $L_{l-1}$ из леммы 2 и последние $n - r_{l-1}$ уравнений дифференцируются.

Проинтегрируем последние $n - r_{l-1}$ уравнений системы (28) от $\alpha$ до $t$. Получим соотношение

$$\int_\alpha^t K_{l-1,2}(t,s)y(s)\,ds = f_{l-1,2} - L_{l-1,2}(\alpha)f_{l-1}(\alpha), \quad \begin{pmatrix} L_{l-1,1} \\ L_{l-1,2}\end{pmatrix} = L_{l-1}, \quad t \in T, \tag{31}$$

где согласно (30) $L_{l-1,2}(\alpha)f_{l-1}(\alpha) = 0$. Итак, вектор-функция $y(t)$ является решением второй системы (28). Продолжая процесс, убеждаемся в справедливости утверждения. Теорема доказана.

Замечание 7. Решение в виде (18), получается интегрированием по частям в формуле (8) слагаемого $\int\limits_\alpha^t \mathbf{K}(t,s)f_l(s)\,ds$, где $\mathbf{K}(t,s)$ — разрешающее ядро произведения $A_l^+(t)V_l$.

**Следствие 1.** *В условиях теоремы* 2 *индекс по возмущению $l_\varepsilon$ системы* (1) *равен индексу $l$ в смысле определения* 3. *Более того, замкнутые системы имеют единственное решение* (*в формуле* (18) $K_2(t) \equiv 0$, $t \in T$, $K_3(t,s) \equiv 0$, $(t,s) \in T \times T$).

Доказательство (простое, но довольно громоздкое) опирается на вид общего решения (18), а также на неравенства

$$\|g(t)h(t)\|_{L_2(T)} \le \|g(t)\|_{\mathbf{C}(T)}\|h(t)\|_{L_2(T)}$$

и Коши — Буняковского, где $g(t) \in \mathbf{C}(T)$, $h(t) \in L_2(T)$ — скалярные функции [15].

**Следствие 2.** *Если в условиях теоремы* 2 *индекс системы* (1) *при* $p(t,s)=1$ *равен* 1, *то и система с* $p(t,s)=(t-s)^{-\gamma}$, $0<\gamma<1$, *разрешима.*

Доказательство. Умножим систему на матрицу $L$ из формулы (2). Система расщепится на два блочных уравнения. Второе блочное уравнение здесь имеет вид

$$\int\limits_{\alpha}^{t} p(t,s)=(t-s)^{-\gamma}K_2(t,s)x(s)\,ds=f_2,\quad K_2(t,s)=L_2(t)K(t,s),\ f_2=L_2(t)f.$$

Подействуем на него оператором вида

$$D_{1-\gamma}\varphi=\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha}^{t}(t-s)^{1-\gamma}\varphi(s)\,ds.$$

Согласно [16] получим

$$\theta K_2(t,s)+\int\limits_{\alpha}^{t}\frac{d}{dt}G(t,s)x(s)\,ds=\psi,\quad G(t,s)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{K_2(s+(t-s)z,s)}{(1-z)^{1-\gamma}z^{\gamma}}\,dz,$$

где $\theta=\pi\sin(\gamma\pi)\neq 0$, $\psi=D_{1-\gamma}f_2$. По условию $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}L_1(t)A(t)\\ L_2(t)K(t,t)\end{pmatrix}=m$, $t\in T$, следовательно, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}L_1(t)A(t)\\ \theta L_2(t)K(t,t)\end{pmatrix}=m$, $t\in T$. Дальнейшие рассуждения очевидны. Следствие доказано.

Замечание 8. Существует гипотеза, обобщающая следствие 2: система (1) разрешима при $p(t,s)=(t-s)^{-\gamma}$, $0<\gamma<1$, если выполнены условия теоремы 2 для системы при $p(t,s)=1$.

Ясно, что изложенный подход тесно связан с теорией нётеровых операторов для замкнутого случая ($m=n$), причем ЛРО является некоторым «приближением» левого регуляризатора (параметрикса, см., например, [17]).

**Лемма 4.** *Пусть для замкнутой системы* (1) *выполнены условия:*

1) $A(t)\in\mathbf{C}^A(T)$, $K(t,s)\in\mathbf{C}^A(T\times T)$;

2) *на* $T$ *определен индекс оператора системы, равный* $l<\infty$, *причем* $k=n$ *в формуле* (9);

3) *оператор* $(\Lambda_0+V)$ *отображает топологическое пространство* $\mathbf{C}^\infty(T)$ *в себя.*

*Тогда для нётерова индекса (см., например,* [17]*) оператора справедливо соотношение*

$$\operatorname{ind}(\Lambda_0+V)=\dim\ker(\Lambda_0+V)-\dim\operatorname{coker}(\Lambda_0+V)=\operatorname{rank}\Upsilon_{l-1}-nl.$$

Доказательство. Действительно, в условиях леммы $\ker(\Lambda_0+V)=0$. Множество вектор-функций $f\in\mathbf{C}^\infty(T)$, для которых система (1) разрешима, удовлетворяет условию 3 теоремы 2. Лемма доказана.

Посмотрим, что представляет собой образ оператора системы (1)

$$\operatorname{im}(\Lambda_0+V)=\{(\Lambda_0+V)x\mid x\in\mathbf{C}(T)\},$$

если оператор определен на пространстве $\mathbf{C}(T)$. Введем пространство вектор-функций $\widetilde{\mathbf{C}}(T)$ как пополнение пространства $\mathbf{C}^l(T)$ по норме вида

$$\|\phi\|_{\widetilde{\mathbf{C}}(T)} = \|\phi\|_{\mathbf{C}(T)} + \|\Omega_0\phi\|_{\mathbf{C}(T)} + \dots \|\Omega_{l-1}\Omega_{l-2}\dots\Omega_0\phi\|_{\mathbf{C}(T)},$$

где $\Omega_{l-1}, \Omega_{l-2}, \dots, \Omega_0$ — операторы из формулы (29). Образ $\operatorname{im}(\Lambda_0 + V) \subset \widetilde{\mathbf{C}}(T)$ отличается от $\widetilde{\mathbf{C}}(T)$ на некоторое конечномерное пространство.

**Лемма 5.** *Пространство* $\widetilde{\mathbf{C}}(T)$ *полно.*

Лемма доказывается так же, как соответствующее утверждение из [18].

Признаки существовании оператора $\Lambda_{*,l}$ из формулы (9) получены пока только для отдельных случаев. Приведем несколько переформулированный результат из [8].

**Лемма 6.** *Если ядро* $\overline{K}(\sigma)$ *в системе*

$$(\overline{\Lambda}_0 + \overline{V})x := \overline{A}x + \int\limits_{\alpha}^{t} \overline{K}(t-s)x(s)\,ds = f, \quad t \in T,$$

*где* $\overline{A}$ *— постоянная* $(n\times n)$*-матрица и* $\overline{V}$ *— интегральный оператор, вещественно-аналитическое, то* ЛРО *в смысле определения* 3 *существует и справедлива альтернатива:*

$$\ker(\overline{\Lambda}_0 + \overline{V}) = 0 \text{ либо } k < n,\ \dim\ker\,(\overline{\Lambda}_0 + \overline{V}) = \infty.$$

Анонсируем полезный в некоторых случаях результат.

**Лемма 7.** *Для оператора системы* $\Lambda_1 := A(t)\dot{x} + B(t)x = f$, $t \in T$, *где* $A(t), B(t)$ – $(m \times n)$*-матрицы из* $\mathbf{C}^A(T)$, *определен оператор* $\Lambda_{*,l}$, *обладающий* ЛН, *со свойством*

$$\Lambda_{l,*} \circ \Lambda_1 y = \begin{pmatrix} A_l(t) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} B_l(t) \\ 0 \end{pmatrix} y \quad \forall y \in \mathbf{C}^{l+1}(T),$$

*где матрицы* $A_l(t)$, $B_l(t)$ *имеют размер* $k\times n$, $0 < k \le \min\{m, n\}$, *причем матрица* $A_l(t)$ *имеет полный ранг для всех* $t \in T$, *кроме, возможно, конечного числа точек* $t_j \in T$, $j = 0, 1, 2, \dots, \nu$.

## 4. Замечания о численных методах

Обычно теоремы существования являются подсказками при конструировании численных методов, при этом обрисовывая набор трудностей, с которыми придется столкнуться. Из вида общего решения (18) следует, что задачи вида (1) некорректны. Сколь угодно малым возмущениям входных данных могут соответствовать сколь угодно большие возмущения решений, и это должно учитываться при построении численных методов.

Пример 4. Рассмотрим скалярное уравнение и его возмущенный вариант:

$$0\cdot x(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K(t,s)x(s)\,ds = f(t),\ \delta x_{\delta,\varepsilon}(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K(t,s)x_{\delta,\varepsilon}(s)\,ds = f(t) + \varepsilon\sin(t-\alpha)/\varepsilon^2,$$

где $\delta \le 0$, $K(t,t) > 0$, $t \in T$. Здесь индекс исходного уравнения $l$ равен 1 и условие 3 в теоремах 1, 2 имеет вид $f(\alpha) = 0$. Легко проверить, что $\|x_{\delta,\varepsilon}(t) - x(t)\| \to \infty$ при $\delta, \varepsilon \to 0$.

В [9] для случая $p(t,s) = 1$ была доказана

**Теорема 3.** *Пусть*

1) *выполнены условия теоремы* 1*;*

2) *справедливы оценки*

$$\|A(t)-\widetilde{A}(t)\|_{C(T)} \le \delta,\ \|f(t)-\tilde{f}(t)\|_{C(T)} \le \delta^{2/3},\ \|\widetilde{K}(t,s)-K(t,s)\|_{C(T\times T)} \le \delta^{2/3};$$

3) *шаг интегрирования вычисляется по формулам:* (a) $\tau=(\beta-\alpha)/\mathscr{N}$, $\mathscr{N}\to\infty$, (b) $\tau=\tau(\delta)=\kappa_0\delta^{1/3}$, $\kappa_0=\mathrm{const}>0$,

*Тогда начиная с некоторых* $\mathscr{N}\ge\mathscr{N}_0$ *или* $\delta\le\delta_0$ *решения разностных задач*

$$A_{i+1}y_{i+1}+\tau\sum_{j=1}^{i+1}\omega_{i+1,j}K_{i+1,j}y_j=f_{i+1},\quad \widetilde{A}_{i+1}z_{i+1}+\tau(\delta)\sum_{j=1}^{i+1}\omega_{i+1,j}\widetilde{K}_{i+1,j}z_j=\tilde{f}_{i+1}, \tag{32}$$

*где* $A_i=A(t_i)$, $f_i=f(t_i)$, $K_{i,j}=K(t_i,t_j)$, $\widetilde{A}_i=\widetilde{A}(t_i)$, $\tilde{f}_i=\tilde{f}(t_i)$, $\widetilde{K}_{i,j}=\widetilde{K}(t_i,t_j)$, $t_i=\alpha+i\tau$, $t_j=\alpha+j\tau$, $i=0,1,\dots,\mathscr{N}-1$, $\omega_{i,j}=1$, *существуют и равномерно по* $i$ *справедливы оценки*

$$\|x(t_i)-y_i\|_I\le\kappa_1\tau,\ \|x(t_i)-z_i\|_I\le\kappa_2\delta^{1/3},\quad \kappa_1,\kappa_2=\mathrm{const}>0,\ i=1,2,\dots,\mathscr{N}.$$

Для систем индекса 1 построены методы высокого порядка точности [19]. Если положить $\omega_{i,j}=\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}p(t_{i+1},s)\,ds$, $p(t,s)=(t-s)^{-\gamma}$, то в условиях теоремы 3 равномерно по $i$ справедлива оценка $\|x(t_i)-y_i\|_1\le\kappa_3\max\{h^\gamma,h^{1-\gamma}\}$, $0<\gamma<1$, $\kappa_3=\mathrm{const}$ [13].

Для систем индекса 1 построены методы высокого порядка точности [19]. Но попытки применения разностных схем для решения систем индекса выше 1 наталкиваются на большие сложности. Например, при применении схемы (32) к системе из примера 3 с условиями $\gamma=0$ и $\rho=|\beta/(\beta-1)|>1$ получаем расходящийся процесс: $\|y_i\|_I=O(\rho^i)$. В настоящее время нет алгоритмов, позволяющих до проведения расчетов ответить на вопрос: сходится выбранная разностная схема или нет?

Поэтому ниже для решения систем вида (1) предлагается использовать метод наименьших квадратов, который в работе формулируется так. Исходная задача заменяется задачей поиска минимума функционала (15). Будем искать приближающую вектор-функцию $x_\varepsilon(t)$ в виде векторного полинома

$$\mu_i(t)=\sum_{j=0}^{i}c_j(t-\alpha)^j=\mathscr{T}_0(t)C=\begin{pmatrix}E & tE & t^2E & \dots & t^iE\end{pmatrix}C,\quad i>l, \tag{33}$$

где $C=\left(c_0^\top,c_1^\top,\dots,c_i^\top\right)^\top$, $E=E_n$. Подставим (33) в (15) и сведем задачу (1), (2) к минимизации функции

$$\Phi_q(c_0,c_1,\dots,c_i)=\sum_{j=0}^{q}\left\|\left(\frac{d}{dt}\right)^j[(\Lambda_0+V)\mu_i(t)-f]\right\|^2_{\mathscr{H}_m}, \tag{34}$$

Дифференцируя функцию $\Phi_q(c_0,c_1,\dots,c_i)$ по ее аргументам, с учетом обозначений из (15), (33) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора $C$

$$\left\{\frac{\partial\Phi_q(c_0,c_1,\dots,c_i)}{\partial c_j},\ j=1,2,\dots,\ i\right\}=\mathscr{A}C-b=0, \tag{35}$$

$$\mathscr{A} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} G^{\top}(t)G(t)\,dt, \quad b = \int\limits_{\alpha}^{\beta} G^{\top}(t)\,\mathrm{d}_q[f(t)]\,dt,$$

$$G(t) = \Gamma_q[A(t), B(t)]\mathscr{T}_q(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathrm{d}_q[K(t,s)]\mathscr{T}_0(s)\,ds,$$

$$\mathscr{T}_q(t) = \begin{pmatrix} E & tE & t^2E & \dots & t^iE \\ 0 & E & 2tE & \dots & it^{i-1}E \\ 0 & 0 & 2E & \dots & i(i-1)t^{i-2}E \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i(i-1)\dots(i-q-1)t^{i-q-1}E \end{pmatrix}.$$

**Лемма 8.** *Пусть система* (1) *имеет единственное решение. Тогда система* (35) *имеет единственное решение* $c_0^\star, c_0^\star, \dots, c_i^\star$ *и*

$$\Phi_q^\star = \Phi_q(c_0^\star, c_1^\star, \dots, c_i^\star) = \min\{\Phi_q(c_0, c_1, \dots, c_i),\ c_0, c_1, \dots, c_i \in \mathbb{R}^n\}.$$

Доказательство. Подставим в систему (1) произвольный многочлен $\mu_i^\star(t)$ с конкретными значениями векторных коэффициентов $c_0^\star, c_1^\star, \dots, c_i^\star$ и вычислим свободный член $f^\star(t)$. Затем образуем функционал (15) и ищем решение в виде многочлена (33). Так как система (1) имеет единственное решение при данном свободном члене, минимум функции $\Phi_q(c_0, c_1, \dots, c_i)$ будет достигаться только на многочлене $\mu_i^\star(t)$. Следовательно, матрица $\mathscr{A}$ в системе (35) неособенна. Лемма доказана.

**Теорема 4.** *Пусть система* (1) *имеет единственное решение* $x(t)$ *и ее индекс по возмущению равен* $l_\varepsilon$*, в частности,* $m = n$ *и выполнены условия теоремы* 1.

*Тогда при* $q \geq l_\varepsilon$ *справедливы оценки*

$$\Phi_q^\star \leq \frac{\kappa_1}{(i^2 \cdot (ln\ i)^2)}, \quad \|\mu_i^\star(t) - x(t)\|^2_{\mathscr{H}_n} \leq \frac{\kappa_2}{(i^2 \cdot (ln\ i)^2)},$$

*где* $\mu_i^\star(t) = \sum\limits_{j=0}^{i} c_j^\star (t-\alpha)^j$, $\kappa_1 = \mathrm{const}$, $\kappa_2 = \mathrm{const}$.

Доказательство. Рассмотрим функционал (12) на многочлене $M_i(t)$, у которого $M_i^{(q)}(t)$ — многочлен Чебышева для производной решения системы (1) $x^{(q)}(t)$. Согласно [20] имеем

$$\max\{\|M_i^{(q)}(t) - x^{(l_\varepsilon)}(t)\|_I,\ t \in T\} = O(1/(i \cdot ln\ i)), \quad \Phi_q(M_i) = O(1/(i^2 \cdot (\ln i)^2)).$$

Так как на полиноме $\mu_i^\star(t)$ достигается минимум, то $\Phi_q^\star \leq \Phi_q(M_i)$. Из неравенства (16) следует справедливость второй оценки утверждения. Теорема доказана.

Замечание 9. При определенных требованиях на гладкость решения можно брать другие пробные многочлены, например интерполяционный многочлен Лежандра, и получать другие оценки скорости сходимости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Brunner H.* Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
2. *Kauthen J.-P.* The numerical solution of integral-algebraic equations of index 1 by polynomial spline collocation methods // Math. Comp. 2001. V. 70. P. 1503–1514.

**3.** *Никольский М. С.* О системах линейных интегральных уравнений типа Вольтерра в свертках // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1998. Т. 220. С. 210–216.

**4.** *Булатов М. В.* Редукция вырожденных систем интегральных уравнений типа Вольтерра к невырожденным // Изв. вузов. Математика. 1998. № 11. С. 14–21.

**5.** *Bulatov M. V., Lima P. M.* Two-dimensional integral-algebraic systems: Analysis and computational methods // J. Comput. Appl. Math. 2011. V. 236, N 2. P. 132–140.

**6.** *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, решения. Киев: Наук. думка, 1986.

**7.** *Чистяков В. Ф.* О разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра 4 рода. I // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 5. С. 698–707.

**8.** *Чистяков В. Ф.* О некоторых свойствах систем интегральных уравнений Вольтерра IV рода с ядром типа свертки // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 1. С. 109–113.

**9.** *Чистяков В. Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.

**10.** *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.

**11.** *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.

**12.** *Silverman L. M., Bucy R. S.* Generalizations of theorem of Dolezal // Math. System Theory. 1970. V. 4. P. 334–339.

**13.** *Brunner H., Bulatov M. V.* On singular systems of integral equations with weakly singular kernels // Proc. 11th Baikal international school-seminar, July 5–12, Irkutsk, 1998. V. 4. P. 64–67.

**14.** *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

**15.** *Маслов В. П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.

**16.** *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

**17.** *Ремпель С., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1986.

**18.** *Чистяков В. Ф.* О нётеровом индексе линейных алгебро-дифференциальных систем. I // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 209–219.

**19.** *Будникова О. С., Булатов М. В.* Численное решение интегроалгебраических уравнений многошаговыми методами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 829–839.

**20.** *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.


*Статья поступила 7 августа 2012 г.*

Чистяков Виктор Филимонович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
chist@icc.ru