Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 519.21

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОМЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПО ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОМУ ВИНЕРОВСКОМУ ПРОЦЕССУ

Н. А. Колодий

Аннотация. Получены теоремы существования и единственности решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости. Доказательство этих теорем использует неравенство для стохастического интеграла по двупараметрическому винеровскому процессу с зависящей от пределов интегрирования подынтегральной функцией.

Ключевые слова: двупараметрический винеровский процесс, стохастическое уравнение Вольтерра, линии остановки.

1. Введение

Целью работы является доказательство теорем существования и единственности решения стохастического уравнения Вольтерра на $\mathbb{R}_+^2 = [0, \infty[\times [0, \infty[$, определенного ниже в (1). Доказательства этих теорем опираются на применение неравенств для моментов равномерной нормы непрерывных модификаций стохастических интегралов по двупараметрическому винеровскому процессу с зависящими от пределов интегрирования подынтегральными функциями. Получены также условия существования непрерывных модификаций и неравенства для двупараметрических стохастических интегралов.

Буквы x, y, z будем использовать только для обозначения элементов пространства $\mathbb{R}_+^2$, причем если в одном и том же выражении присутствуют z, z_1 и (или) z_2, то всегда полагаем, что z_1 — первый, а z_2 — второй элементы вектора z (аналогично для x, y). Неравенства $x \le z$, $x \ge z$, $x < z$, $x > z$ и структурные операции $x \wedge z$, $x \vee z$ определены поэлементно, например, $x \wedge z = (x_1 \wedge z_1, x_2 \wedge z_2)$, неравенство $x < z$ эквивалентно системе неравенств $x_1 < z_1$ и $x_2 < z_2$. Далее, $]x, z]$ обозначает прямоугольник $]x, z] = \{y : x < y \le z\}$. Константы, зависящие от некоторого параметра θ и, возможно, разные для одного и того же θ, будем обозначать через C_θ. Во всех случаях, когда в каком-либо неравенстве будет присутствовать константа $C_{\theta,z}$, она будет обладать свойством: $0 \le C_{\theta,x} \le C_{\theta,z}$ для $x \le z$ (во всех этих случаях возможность выбора такой константы будет очевидна).

В дальнейшем $\mathbb{C}$ обозначает пространство непрерывных функций $g : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\mathscr{C}_z$ — минимальную σ-алгебру, содержащую цилиндрические подмножества пространства $\mathbb{C}$ с координатами из $[0, z]$, $\|g\|_z = \sup\limits_{x \in [0,z]} |g(x)|$.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство и двупараметрическое семейство σ-алгебр $\mathbb{F} = \big(\mathscr{F}_z,\, z \in \mathbb{R}^2_+\big)$ удовлетворяет условиям:

1) если $x \le z$, то $\mathscr{F}_x \subset \mathscr{F}_z \subset \mathscr{F}$;

2) $\mathscr{F}_0$ содержит все элементы $\mathscr{F}$ нулевой вероятности;

3) $\mathscr{F}_z = \bigcap\limits_{x>z} \mathscr{F}_x$ для любого z;

4) для любых x и z σ-алгебры $\mathscr{F}_x$ и $\mathscr{F}_z$ условно независимы относительно $\mathscr{F}_{x\wedge z}$.

Если поле $\big(\xi(x), x \in \mathbb{R}^2_+\big)$ $\big(\mathscr{F}_x, x \in \mathbb{R}^2_+\big)$-согласовано и траектории поля ξ п. н. принадлежат $\mathbb{C}$, то будем писать $\xi \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}$. Через Ξ_p, $p \ge 2$, обозначим пространство таких полей $\big(\xi(x), x \in \mathbb{R}^2_+\big) \in \mathbb{F}\cap\mathbb{C}$, что $|\xi|_z = \big(\mathsf{E}\|\xi\|_z^p\big)^{1/p} < \infty$ для каждого z. Для ξ и $\eta \in \Xi_p$ пусть $\varrho_\Xi(\xi,\eta) \triangleq \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(1 \wedge |\xi - \eta|_{(k,k)})$.

В дальнейшем $\mathscr{P}$ обозначает σ-алгебру $\mathbb{F}$-предсказуемых подмножеств пространства $\mathbb{R}^2_+ \times \Omega$ [1]. Отметим, что $\mathscr{P}$ совпадает с минимальной σ-алгеброй, порожденной классом множеств

$$\begin{aligned}\mathscr{J} = \{&]x,z] \times A \mid x,z \in \mathbb{R}^2_+,\ x < z,\ A \in \mathscr{F}_x\}\\ &\cup \{\{0\}\times]s,t] \times A \mid s,t \in \mathbb{R}_+,\ s<t,\ A \in \mathscr{F}_{(0,s)}\}\\ &\cup \{]s,t] \times \{0\} \times A \mid s,t \in \mathbb{R}_+,\ s<t,\ A \in \mathscr{F}_{(s,0)}\} \cup \{\{0\}\times A \mid A \in \mathscr{F}_0\}.\end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{\mathscr{P}}$ — минимальная σ-алгебра подмножеств пространства $\mathbb{R}^2_+ \times \Omega \times \mathbb{C}$, порожденная классом

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{J}} = \big\{&]x,z] \times A \times C \mid x,z \in \mathbb{R}^2_+,\ x<z,\ A \in \mathscr{F}_x,\ C \in \mathscr{C}_x\big\}\\ &\cup \{\{0\}\times]s,t] \times A \times C \mid s,t \in \mathbb{R}_+,\ s<t,\ A \in \mathscr{F}_{(0,s)},\ C \in \mathscr{C}_{(0,s)}\}\\ &\cup \{]s,t] \times \{0\} \times A \times C \mid s,t \in \mathbb{R}_+,\ s<t,\ A \in \mathscr{F}_{(s,0)},\ C \in \mathscr{C}_{(s,0)}\}\\ &\cup \{\{0\} \times A \times C \mid A \in \mathscr{F}_0,\ C \in \mathscr{C}_0\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим стохастическое интегральное уравнение Вольтерра на плоскости:

$$\xi(z) = \eta(z) + \int\limits_{]0,z]} a(z,x,\xi)\,dx + \int\limits_{]0,z]} b(z,x,\xi)\,dW(x), \quad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

1) $\eta \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}$;

2) функции $(z,(x,\omega,g)) \mapsto a(z,x,\omega,g)$ и $(z,(x,\omega,g)) \mapsto b(z,x,\omega,g)$ являются $\mathscr{B}\big(\mathbb{R}^2_+\big) \otimes \widetilde{\mathscr{P}} | \mathscr{B}(\mathbb{R})$-измеримыми;

3) $\big(W(x), x \in \mathbb{R}^2_+\big)$ — двупараметрический винеровский процесс (броуновский лист) относительно фильтрации $\mathbb{F}$ [2].

Решением уравнения (1) будем называть такое случайное поле $\big(\xi(z), z \in \mathbb{R}^2_+\big) \in \mathbb{F}\cap\mathbb{C}$, что с вероятностью 1 равенство (1) выполнено для всех $z \in \mathbb{R}^2_+$. Если уравнение (1) имеет решение, то будем называть его *единственным*, если оно неотличимо от любого другого решения уравнения (1).

Стохастические интегральные уравнения Вольтерра на $\mathbb{R}_+$ исследовались многими авторами. Например, в [3] получены условия существования и единственности сильного решения и условия существования слабого решения уравнения Вольтерра по винеровскому процессу с неслучайными коэффициентами, в [4] — условия существования и единственности решения уравнения Вольтерра с упреждающими коэффициентами, в [5] — условия существования и единственности сильного решения и условия существования слабого решения уравнения Вольтерра, содержащего криволинейные стохастические интегралы.

2. Неравенства для моментов стохастических интегралов

Целью этого раздела является доказательство существования непрерывной модификации и неравенств для моментов равномерной нормы непрерывной модификации случайного поля

$$\eta(z) = \int\limits_{]0,z]} \beta(z,x)\,dW(x), \quad z \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2}$$

где $(z,(x,\omega)) \mapsto \beta(z,x,\omega)$ — $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2_+) \otimes \mathscr{P}$-измеримая действительная функция, $(W(x), x \in \mathbb{R}^2_+)$ — двупараметрический $\mathbb{F}$-винеровский процесс, интеграл в правой части равенства (2) для каждого фиксированного z является стохастическим интегралом от $\mathbb{F}$-предсказуемого случайного поля $\beta(z,\cdot)$ по двупараметрическому $\mathbb{F}$-винеровскому процессу W [2]. Пусть $\beta'(z,y,x) = \beta(z,x) - \beta(y,x)$.

Теорема 2.1. *Предположим, что существуют такие число $p \geq 2$, возрастающая положительная функция $(\varphi(t))_{t\geq 0}$ и измеримое случайное поле $\bar\beta(z,x)$, что*

$$\int\limits_0^1 \varphi(s)s^{-1-2/p}\,ds < \infty; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} 0 \leq \bar\beta(z,x) \leq \bar\beta(z',x) \text{ для } z \leq z'; \\ |\beta'(z,z',x)| \leq \bar\beta(z \vee z',x)\varphi(|z-z'|); \\ B_p(z) \triangleq \mathsf{E}\Bigg(\int\limits_{[0,z]} \bar\beta^2(z,x)\,dx\Bigg)^{p/2} < \infty. \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда существует непрерывная модификация случайного поля (2), для которой справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\sup_{y\in[0,z]}\Bigg|\int\limits_{]0,y]}\beta(y,x)\,dW(x)\Bigg|^p \leq C_{p,\varphi,z}\mathsf{E}\Bigg(\int\limits_{]0,z]}\bar\beta^2(z,x)\,dx\Bigg)^{p/2}.$$

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем несколько утверждений и пояснений.

Не умаляя общности, будем считать, что одновременно с условием (4) выполнено условие $|\beta(z,x)| \leq \bar\beta(z,x)$. Из условия $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2_+) \otimes \mathscr{P}|\mathscr{B}(\mathbb{R})$-измеримости функции β следует, что

$$(x,\omega) \mapsto \beta(x,x,\omega) \in \mathscr{P}|\mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad (s,(x,\omega)) \mapsto \beta((s,x_2),x,\omega) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{P}|\mathscr{B}(\mathbb{R}),$$
$$(t,(x,\omega)) \mapsto \beta((x_1,t),x,\omega) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{P}|\mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Опираясь на определение стохастического интеграла по двупараметрическому винеровскому процессу [2], применяя неравенство Дэвиса для квадратической вариации двупараметрического сильного квадратично интегрируемого мартингала [6] и методы доказательств существования измеримых по параметру модификаций случайных процессов [7], имеем следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть $(U, \mathscr{U})$ — измеримое пространство и $(u,(x,\omega)) \mapsto \alpha(u,x,\omega)$ — $\mathscr{U} \otimes \mathscr{P}$-измеримая действительная функция такая, что* $\mathsf{E}\int\limits_{]0,z]} \alpha^2(u,x)\,dx < \infty$ *для любых $z \in \mathbb{R}^2_+$, $u \in U$.*

Тогда существует такая $\mathscr{U} \otimes \mathscr{P}$-измеримая действительная функция $(u,(z,\omega)) \mapsto \mathbf{J}(u,z,\omega)$, что

1) $\mathbf{J}(u,z,\omega)$ является стохастическим интегралом на прямоугольнике $]0,z]$ от $\mathscr{P}$-измеримой функции $\alpha(u,\cdot)$ по двупараметрическому $\mathbb{F}$-винеровскому процессу $W(\cdot)$:

$$\mathbf{J}(u,z) = \int\limits_{]0,z]} \alpha(u,x)\,dW(x) \quad \text{п. н. для любых } z \in \mathbb{R}^2_+,\ u \in U;$$

2) для каждого фиксированного $u \in U$ случайное поле $\mathbf{J}(u,\cdot)$ является непрерывным сильным квадратично интегрируемым $\mathbb{F}$-мартингалом [2] и квадратическая вариация $\mathbf{J}(u,\cdot)$ на прямоугольнике $[0,z]$ равна $\int\limits_{]0,z]} \alpha^2(u,x)\,dx$;

3) если $\mathsf{E}\Big(\int\limits_{]0,z]} \alpha^2(u,x)\,dx\Big)^{p/2} < \infty$ *для некоторого $p \geq 2$, то*

$$\mathsf{E}\sup_{x\in[0,z]} |\mathbf{J}(u,x)|^p \leq C_p \mathsf{E}\bigg(\int\limits_{]0,z]} \alpha^2(u,x)\,dx\bigg)^{p/2}. \tag{5}$$

В дальнейшем будем применять как неравенство (5), так и неравенство

$$\mathsf{E}\bigg|\int\limits_{]0,z]} \alpha(u,x)\,dW(x)\bigg|^p \leq C_p \mathsf{E}\bigg(\int\limits_{]0,z]} \alpha^2(u,x)\,dx\bigg)^{p/2}, \tag{6}$$

вытекающее из неравенства (5) и справедливое при тех же условиях.

Следует отметить, что поле (2) в условиях теоремы 2.1 не обладает, вообще говоря, мартингальными свойствами. Одновременно с интегралом (2) будем рассматривать случайные поля

$$\vartheta(z) = \int\limits_{]0,z]} \beta(x,x)\,dW(x),$$

$$\xi(z) = \int\limits_{]0,z]} [\beta(z,x) + \beta(x,x) - \beta((z_1,x_2),x) - \beta((x_1,z_2),x)]\,dW(x),$$

$$\zeta_1(z) = \int\limits_{]0,z]} \beta'((z_1,x_2),x,x)\,dW(x), \quad \zeta_2(z) = \int\limits_{]0,z]} \beta'((x_1,z_2),x,x)\,dW(x),$$

сумма которых равна η.

Согласно лемме 2.2 случайное поле ϑ является непрерывным сильным квадратично интегрируемым $\mathbb{F}$-мартингалом и

$$\mathsf{E}\sup_{x\in[0,z]} |\vartheta(x)|^p \leq C_p \mathsf{E}\bigg(\int\limits_{]0,z]} \beta^2(x,x)\,dx\bigg)^{p/2}, \quad p \geq 2.$$

В силу условий теоремы 2.1 случайные поля ζ_1 и ζ_2 стохастически непрерывны. Поэтому в дальнейшем будем считать, что ζ_1 и ζ_2 — измеримые сепарабельные процессы. Отметим также, что для каждого фиксированного z_1 случайный процесс $(\zeta_1(z_1,z_2))_{z_2\ge 0}$ является однопараметрическим непрерывным $(\mathscr{F}_{(z_1,z_2)})_{z_2\ge 0}$-мартингалом, для каждого фиксированного z_2 случайный процесс $(\zeta_2(z_1,z_2))_{z_1\ge 0}$ — однопараметрическим непрерывным $(\mathscr{F}_{(z_1,z_2)})_{z_1\ge 0}$-мартингалом.

Для произвольной функции $h(\cdot):\mathbb{R}_+^k\mapsto\mathbb{R}$ и измеримого случайного поля $\gamma(\cdot,\cdot):\mathbb{R}_+^k\times\Omega\mapsto\mathbb{R}$ определим

$$\Phi_a(p,\varepsilon,\gamma)=\sup\{(\mathsf{E}|\gamma(a')-\gamma(a'')|^p)^{1/p}: a',a''\in[0,a];\ |a'-a''|\le\varepsilon\},$$
$$\Delta(a,\varepsilon,h)=\sup\{|h(a')-h(a'')|: a',a''\in[0,a];\ |a'-a''|\le\varepsilon\},$$

$\varepsilon>0$, $p>1$, $a\in R_+^k$.

Для исследования полей ξ, ζ_1 и ζ_2 будем применять следующее утверждение, вытекающее из результатов работы [8].

Лемма 2.3. *Предположим, что для некоторого $p>1$*

$$\sup_{a'\in[0,a]}\mathsf{E}|\gamma(a')|^p<\infty \quad \text{и} \quad \int_0^1 s^{-1-k/p}\,\Phi_a(p,s,\gamma)\,ds<\infty.$$

Тогда существует непрерывная модификация $\bar\gamma$ случайного поля γ и

$$(\mathsf{E}\sup_{a'\in[0,a]}|\bar\gamma(a')|^p)^{1/p}\le C_{p,a}\left\{\sup_{a'\in[0,a]}(\mathsf{E}|\gamma(a')|^p)^{1/p}+\int_0^1\frac{\Phi_a(p,s,\gamma)}{s^{1+k/p}}\,ds\right\},$$
$$(\mathsf{E}\Delta^p(a,\varepsilon,\bar\gamma))^{1/p}\le C_{p,a}\left\{\varepsilon^{-k/p}\,\Phi_a(p,\varepsilon,\gamma)+\int_0^\varepsilon\frac{\Phi_a(p,s,\gamma)}{s^{1+k/p}}\,ds\right\}$$

для любых $a\in R_+^k$ и $\varepsilon\in]0,1]$.

Доказательство теоремы 2.1. Заметим, что при $y\le z$ имеет место равенство $\xi(z)-\xi(y)=J_1(z,y)+J_2(z,y)+J_3(z,y)$, где

$$J_1(z,y)=\int_{]0,y]}[\beta'(z,y,x)-\beta'((z_1,x_2),(y_1,x_2),x)-\beta'((x_1,z_2),(x_1,y_2),x)]\,dW(x),$$
$$J_2(z,y)=\int_{](0,y_2),z]}[\beta'(z,(z_1,x_2),x)-\beta'((x_1,z_2),x,x)]\,dW(x),$$
$$J_3(z,y)=\int_{](y_1,0),(z_1,y_2)]}[\beta'(z,(x_1,z_2),x)-\beta'((z_1,x_2),x,x)]\,dW(x).$$

Применяя неравенство (6), имеем

$$\mathsf{E}|J_1(z,y)|^p\le C_p\mathsf{E}\left\{\int_{]0,y]}(|\beta'(z,y,x)|+|\beta'((z_1,x_2),(y_1,x_2),x)|\right.$$
$$\left.+|\beta'((x_1,z_2),(x_1,y_2),x)|)^2\,dx\right\}^{p/2}$$
$$\le C_pB_p(z)(\varphi(|z-y|)+\varphi(|z_1-y_1|)+\varphi(|z_2-y_2|))^p\le 3^pC_pB_p(z)\varphi^p(|z-y|);$$

$$\mathsf{E}|J_2(z,y)|^p \le C_p\mathsf{E}\Bigg\{\int\limits_{](0,y_2),z]} (|\beta'(z,(z_1,x_2),x)|^2 + |\beta'((x_1,z_2),x,x)|)^2\,dx\Bigg\}^{p/2} \le 2^p C_p B_p(z)\varphi^p(|z_2-y_2|);$$

$$\mathsf{E}|J_3(z,y)|^p \le 2^p C_p B_p(z)\varphi^p(|z_1-y_1|).$$

Таким образом, если $y \le z$, то $\mathsf{E}|\xi(z)-\xi(y)|^p \le 9^p C_p B_p(z)\varphi^p(|z-y|)$. Поэтому для любых y и z

$$\mathsf{E}|\xi(z)-\xi(y)|^p \le 2^{p-1}(\mathsf{E}|\xi(z)-\xi(z\wedge y)|^p + \mathsf{E}|\xi(y)-\xi(z\wedge y)|^p) \le 18^p C_p B_p(z)\varphi^p(|z-y|).$$

Следовательно, $\Phi_z(p,s,\xi) \le C'_p\varphi(s)(B_p(z))^{1/p}$.

Снова применяя неравенство (6), имеем $\mathsf{E}|\xi(z)|^p \le C''_p B_p(z)$.

Таким образом, случайное поле ξ удовлетворяет условиям леммы 2.3 (с параметром $k=2$), поэтому имеет непрерывную модификацию, для которой справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\sup_{x\in[0,z]}|\xi(x)|^p \le C'_{p,\varphi,z}B_p(z).$$

Заметим, что при $y'_1 \le y''_1 \le z_1$

$$\zeta_1(y''_1,z_2)-\zeta_1(y'_1,z_2) = \int\limits_{]0,(y'_1,z_2)]} \beta'((y''_1,x_2),(y'_1,x_2),x)\,dW(x) + \int\limits_{](y'_1,0),(y''_1,z_2)]} \beta'((y''_1,x_2),x,x)\,dW(x).$$

Поэтому

$$\mathsf{E}|\zeta_1(y''_1,z_2)-\zeta_1(y'_1,z_2)|^p \le 2^{p-1}C_p\mathsf{E}\Bigg\{\Bigg(\int\limits_{]0,(y'_1,z_2)]} |\beta'((y''_1,x_2),(y'_1,x_2),x)|^2\,dx\Bigg)^{p/2} + \Bigg(\int\limits_{](y'_1,0),(y''_1,z_2)]} |\beta'((y''_1,x_2),x,x)|^2\,dx\Bigg)^{p/2}\Bigg\} \le 2^p C_p\varphi^p(|y'_1-y''_1|)B_p(z).$$

Следовательно, $\Phi_{z_1}(p,s,\zeta_1(\cdot,z_2)) \le C'_p\varphi(s)(B_p(z))^{1/p}$. Кроме того, $\mathsf{E}|\zeta_1(z)|^p \le C''_p B_p(z)$. Таким образом, для каждого фиксированного z_2 случайный процесс $(\zeta_1(z_1,z_2))_{z_1\ge 0}$ удовлетворяет условиям леммы 2.3 (с параметром $k=1$), поэтому имеет непрерывную модификацию, для которой справедливы неравенства

$$\mathsf{E}\sup_{y_1\in[0,z_1]}|\zeta_1(y_1,z_2)|^p \le C'_{p,\varphi,z}B_p(z), \tag{7}$$

$$\mathsf{E}\Delta^p(z_1,\varepsilon,\zeta_1(\cdot,z_2)) \le C''_{p,\varphi,z,\varepsilon}B_p(z),$$

где $C''_{p,\varphi,z,\varepsilon}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Эта модификация поля ζ_1 может быть выбрана таким образом, чтобы для каждого фиксированного z_1 все траектории случайного процесса $(\zeta_1(z_1,z_2))_{z_2\ge 0}$, являющегося однопараметрическим $(\mathscr{F}_{(z_1,z_2)})_{z_2\ge 0}$-мартингалом, были непрерывны.

Для каждого фиксированного z_1 случайный процесс $(\Delta(z_1, \varepsilon, \zeta_1(\cdot, z_2)))_{z_2 \geq 0}$ является положительным однопараметрическим $(\mathscr{F}_{(z_1,z_2)})_{z_2 \geq 0}$-субмартингалом. Поэтому

$$\mathsf{E} \sup_{y_2 \leq z_2} \Delta^p(z_1, \varepsilon, \zeta_1(\cdot, y_2)) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E}\Delta^p(z_1, \varepsilon, \zeta_1(\cdot, z_2)) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, траектории поля ζ_1 п. н. непрерывны. Кроме того, для каждого фиксированного z_1 случайный процесс $(\sup\limits_{y_1 \leq z_1} |\zeta_1(y_1, y_2)|)_{y_2 \geq 0}$ является $(\mathscr{F}_{(z_1,y_2)})_{y_2 \geq 0}$-субмартингалом. Поэтому

$$\mathsf{E} \sup_{y \in [0,z]} |\zeta_1(y)|^p = \mathsf{E} \sup_{y_2 \leq z_2} (\sup_{y_1 \leq z_1} |\zeta_1(y_1, y_2)|)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{E} \sup_{y_1 \leq z_1} |\zeta_1(y_1, z_2)|^p,$$

что вместе с (7) влечет неравенство $\mathsf{E}\|\zeta_1\|_z^p \leq C'_{p,\varphi,z} B_p(z)$.

Аналогично полю ζ_1 поле ζ_2 имеет непрерывную модификацию, для которой справедливо неравенство $\mathsf{E}\|\zeta_2\|_z^p \leq C'_{p,\varphi,z} B_p(z)$.

Учитывая очевидное равенство $\eta(z) = \vartheta(z) + \xi(z) + \zeta_1(z) + \zeta_2(z)$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. Теорема 2.1 доказана.

3. Существование и единственность решения

Результат этого раздела получен применением неравенства из теоремы 2.1, общих методов доказательства существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений из [9] и методов построения решений стохастических интегральных уравнений Вольтерра [3–5].

Заметим, что если $\big(\xi(x), x \in \mathbb{R}_+^2\big) \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}$, то

$$(z, (x, \omega)) \mapsto b(z, x, \omega, \xi(\cdot, \omega)) \in \mathscr{B}\big(\mathbb{R}_+^2\big) \otimes \mathscr{P} | \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Действительно, $\{(x, \omega) : (x, \omega, \xi(\cdot, \omega)) \in B\} \in \mathscr{J}$ для любого $B \in \widetilde{\mathscr{J}}$, и, значит, $(x, \omega) \mapsto (x, \omega, \xi(\cdot, \omega)) \in \mathscr{P} | \widetilde{\mathscr{P}}$, откуда следует справедливость замечания.

Следующая лемма является двупараметрическим аналогом леммы Гронуолла — Белмана и представлена в удобном для дальнейшего применения виде. Это утверждение следует из результатов работы [10].

Лемма 3.1. *Пусть* $f, g, \phi \in \mathscr{B}\big(\mathbb{R}_+^2\big) | \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, $\int\limits_{]0,z]} (f + g + \phi)\, dx < \infty$ *и*

$$\phi(z) \leq f(z) + g(z) \int\limits_{]0,z]} \phi(x)\, dx \quad \text{для каждого } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

Тогда

$$\phi(z) \leq f(z) + g(z) \exp\Bigg(\int\limits_{]0,z]} g(x)\, dx\Bigg) \int\limits_{]0,z]} f(x)\, dx \quad \text{для каждого } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

Для $\eta \in \Xi_p$ определим

$$J(z, \eta) = \int\limits_{]0,z]} a(z, x, \eta)\, dx + \int\limits_{]0,z]} b(z, x, \eta)\, dW(x).$$

Теорема 3.2. *Предположим, что существуют такие число $p \geq 2$, возрастающая положительная функция $(\varphi(t))_{t\geq 0}$ и константы $C \geq 0$ и $K \geq 0$, что выполняются условие (3) и следующие условия:*

$$|a(z,x,g)| + |b(z,x,g)| \leq C(1 + \|g\|_x); \tag{8}$$

$$|b(z,x,g) - b(z',x,g)| \leq C\varphi(|z-z'|)(1 + \|g\|_x); \tag{9}$$

$$|a(z,x,g) - a(z,x,g')| + |b(z,x,g) - b(z,x,g')| \leq K\|g-g'\|_x; \tag{10}$$

$$|b(z,x,g) - b(z',x,g) - b(z,x,g') + b(z',x,g')| \leq K\varphi(|z-z'|)\|g-g'\|_x. \tag{11}$$

Тогда существуют такие положительные константы $\widehat{C}_z$ и $\widehat{K}_z$, что для η, $\eta' \in \Xi_p$

$$\mathsf{E}\|J(\cdot,\eta)\|_z^p \leq \widehat{C}_z + \widehat{K}_z \int\limits_{]0,z]} \mathsf{E}\|\eta\|_x^p\,dx, \tag{12}$$

$$\mathsf{E}\|J(\cdot,\eta) - J(\cdot,\eta')\|_z^p \leq \widehat{K}_z \int\limits_{]0,z]} \mathsf{E}\|\eta-\eta'\|_x^p\,dx. \tag{13}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|J(\cdot,\eta)\|_z^p \leq 2^{p-1}\left\{\sup_{y\in[0,z]}\left|\int\limits_{]0,y]} a(y,x,\xi)\,dx\right|^p + \sup_{y\in[0,z]}\left|\int\limits_{]0,y]} b(y,x,\xi)\,dW(x)\right|^p\right\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера и учитывая условие (8), находим, что

$$\sup_{y\in[0,z]}\left|\int\limits_{]0,y]} a(y,x,\eta)\,dx\right|^p \leq (z_1z_2)^{p-1}C^p \int\limits_{]0,z]} (1+\|\eta\|_x)^p\,dx$$
$$\leq 2^{p-1}C^p(z_1z_2)^{p-1}\left(z_1z_2 + \int\limits_{]0,z]} \|\eta\|_x^p\,dx\right).$$

Согласно теореме 2.1 с $\beta(y,x) = b(y,x,\eta)$ и $\bar{\beta}(y,x) = C(1+\|\eta\|_x)$ имеем

$$\mathsf{E}\sup_{y\in[0,z]}\left|\int\limits_{]0,y]} b(y,x,\eta)\,dW(x)\right|^p \leq C_{p,\varphi,z}\mathsf{E}\left(\int\limits_{]0,z]} C^2(1+\|\eta\|_x)^2\,dx\right)^{p/2}$$
$$\leq C_{p,\varphi,z}C^p2^{p-1}(z_1z_2)^{p/2-1}\left(z_1z_2 + \int\limits_{]0,z]} \mathsf{E}\|\eta\|_x^p\,dx\right).$$

Следовательно, справедливо неравенство (12).

Заметим, что

$$\|J(\cdot,\eta) - J(\cdot,\eta')\|_z^p \leq 2^{p-1}\left\{\sup_{y\in[0,z]}\left|\int\limits_{]0,y]} [a(y,x,\eta) - a(y,x,\eta')]\,dx\right|^p\right.$$
$$\left. + \sup_{y\in[0,z]}\left|\int\limits_{]0,y]} [b(y,x,\eta) - b(y,x,\eta')]\,dW(x)\right|^p\right\}.$$

Применяя неравенство Гёльдера и учитывая условие (10), находим, что

$$\sup_{y\in[0,z]}\Bigg|\int\limits_{]0,y]}[a(y,x,\eta)-a(y,x,\eta')]\,dx\Bigg|^p \le (z_1z_2)^{p-1}\int\limits_{]0,z]}|a(z,x,\eta)-a(z,x,\eta')|^p\,dx$$

$$\le (z_1z_2)^{p-1}K^p\int\limits_{]0,z]}\|\eta-\eta'\|_x^p\,dx.$$

Случайные поля $\beta(y,x)=b(y,x,\eta)-b(y,x,\eta')$ и $\bar\beta(z,x)=K\|\eta-\eta'\|_x$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1, поэтому

$$\mathsf{E}\sup_{y\in[0,z]}\Bigg|\int\limits_{]0,y]}[b(y,x,\eta)-b(y,x,\eta')]\,dW(x)\Bigg|^p \le C_{p,\varphi,z}\mathsf{E}\Bigg(\int\limits_{]0,z]}K^2\|\eta-\eta'\|_x^2\,dx\Bigg)^{p/2}$$

$$\le C_{p,\varphi,z}K^p(z_1z_2)^{p/2-1}\int\limits_{]0,z]}\mathsf{E}\|\eta-\eta'\|_x^p\,dx.$$

Следовательно, справедливо неравенство (13). Теорема 3.2 доказана.

В дальнейшем, следуя определениям из [2], *линией остановки* будем называть дебют $\mathbb{F}$-прогрессивно измеримого множества из $\mathbb{R}^2_+\times\Omega$ и будем применять обозначение $[\![0,L]\!]=\{(x,\omega):0\le x\le L(\omega)\}$.

Теорема 3.3. *Пусть* $\eta\in\Xi_p$ *и выполняются условия теоремы* 3.2. *Тогда существует единственное решение* $\xi\in\Xi_p$ *уравнения* (1).

Доказательство. 1. Существование решения. Определим процессы:

$$\xi_0(z)=\eta(z),$$

$$\xi_n(z)=\xi_0(z)+\int\limits_{]0,z]}a(z,x,\xi_{n-1})\,dx+\int\limits_{]0,z]}b(z,x,\xi_{n-1})\,dW(x),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Согласно неравенству (12)

$$\mathsf{E}\|\xi_n\|_z^2\le 2^{p-1}\{\mathsf{E}|\xi_0|^p+\mathsf{E}\|J(\cdot,\xi_{n-1})\|_z^p\}\le C_z+K_z\int\limits_{]0,z]}\mathsf{E}\|\xi_{n-1}\|_x^2\,dx,$$

где $C_z=2^{p-1}(\mathsf{E}|\xi_0(z)|^p+\widehat{C}_z)$ и $K_z=2\widehat{K}_z$. Итерируя данное неравенство, получим

$$\mathsf{E}\|\xi_m\|_z^p\le C_z\sum_{i=0}^{m-1}\frac{K_z^i(z_1z_2)^i}{i!}+K_z^m\frac{(z_1z_2)^m}{m!}\mathsf{E}\|\eta\|_z^p\le(C_z+1)(1+\mathsf{E}\|\eta\|_z^p)e^{z_1z_2K_z}.$$

Следовательно, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathsf{E}\|\xi_m\|_z^p<\infty$ для любого z. Согласно неравенству (13) имеем

$$\mathsf{E}\|\xi_{n+m}-\xi_n\|_z^p\le\widehat{K}_z\int\limits_{]0,z]}\mathsf{E}\|\xi_{n+m-1}-\xi_{n-1}\|_x^p\,dx.$$

Итерируя последнее неравенство, получим

$$\mathsf{E}\|\xi_{n+m}-\xi_n\|_z^2\le K_z^n\int\limits_{]0,z]}\int\limits_{]0,x_1]}\dots\int\limits_{]0,x_{n-1}]}\mathsf{E}\|\xi_m-\xi_0\|_{x_n}^p\,dx_n\dots dx_1$$

$$\le 2^{p-1}\frac{(z_1z_2K_z)^n}{n!}\big(\mathsf{E}\|\xi_0\|_z^p+\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathsf{E}\|\xi_m\|_z^p\big).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{m\in N}\mathsf{E}\|\xi_{n+m}-\xi_n\|_z^p=0$ для любого $z\in\mathbb{R}_+^2$. Так как (Ξ_p,ϱ_Ξ) является метрическим полным пространством и

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\in N}\varrho_\Xi(\xi_{n+m},\xi_n)=0,$$

существует такое поле $\xi\in\Xi_p$, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_\Xi(\xi_n,\xi)=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\|\xi_n-\xi\|_z^2=0$ для любого $z\in\mathbb{R}_+^2$.

Снова применяя неравенство (13), получаем, что

$$\mathsf{E}\|J(\cdot,\xi_n)-J(\cdot,\xi)\|_z^p\le K_z\int\limits_{[0,z]}\mathsf{E}\|\xi_n-\xi\|_x^p\,dx\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

для любого $z\in\mathbb{R}_+^2$. Следовательно, ξ — решение уравнения (1).

2. Докажем, что если некоторое поле $\xi\in\mathbb{F}\cap\mathbb{C}$ является решением уравнения (1), то $\xi\in\Xi_p$. Определим линии остановки

$$L_n=\operatorname{debut}\{(x,\omega):\|\xi(\cdot,\omega)\|_z\ge n\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![0,L_n]\!]=\mathbb{R}_+^2\times\Omega,\quad [\![0,L_n]\!]\subset[\![0,L_{n+1}]\!],\quad [\![0,L_n]\!]\in\mathscr{P}$$

и $\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_n(\omega)]}\|\xi(\cdot,\omega)\|_x\le n$. Из неравенства

$$\mathrm{I}^{(u)}_{[0,L_n]}|\xi(u)|\le|\eta(u)|+|J(u,\mathrm{I}_{[0,L_n]}\xi)|$$

в силу (12) следует, что

$$\mathsf{E}\|\xi\mathrm{I}_{[0,L_n]}\|_z^p\le 2^{p-1}\biggl(\mathsf{E}\|\eta\|_z^p+\widehat{C}_z+\widehat{K}_z\int\limits_{]0,z]}\mathsf{E}\|\xi\mathrm{I}_{[0,L_n]}\|_x^p\,dx\biggr)$$
$$\le C_z+K_z\int\limits_{]0,z]}\mathsf{E}\|\xi\mathrm{I}_{[0,L_n]}\|_x^p\,dx.$$

где константы $C_z=2^{p-1}\bigl(\mathsf{E}\|\eta\|_z^p+\widehat{C}_z\bigr)$ и $K_z=2^{p-1}\widehat{K}_z$ не зависят от n. Применяя лемму 3.1, имеем $\mathsf{E}\|\xi\mathrm{I}_{[0,L_n]}\|_z^p\le C_z(1+e^{zK_z})$. Переходя к пределу по $n\to\infty$, получаем, что $\mathsf{E}\|\xi\|_z^p\le C_z(1+e^{zK_z})$ для каждого $z\in\mathbb{R}_+^2$.

3. Единственность. Если ξ' и ξ'' — два решения уравнения (1), то $\xi',\xi''\in\Xi_p$ и согласно неравенству (13)

$$\mathsf{E}\|\xi'-\xi''\|_z^p\le\widehat{K}_z\int\limits_{[0,z]}\mathsf{E}\|\xi'-\xi''\|_x^p\,dx.$$

По лемме 3.1 $\mathsf{E}\|\xi'-\xi''\|_z^p=0$. Поэтому $\varrho_\Xi(\xi',\xi'')=0$ и, значит, ξ' и ξ'' неотличимы. Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.4. *Предположим, что коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (8), (9) *и условию: для каждого* $n\in\mathbb{N}$ *существует такая константа* $K_n\ge 0$, *что*

$$\begin{gathered}|a(z,x,g)-a(z,x,g')|+|b(z,x,g)-b(z,x,g')|\le K_n\|g-g'\|_x,\\ |b(z,x,g)-b(z',x,g)-b(z,x,g')+b(z',x,g')|\le K_n\varphi(|z-z'|)\|g-g'\|_x\end{gathered}\tag{14}$$

для всех таких $g, g' : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, *что* $\|g\|_x \vee \|g'\|_x \le n$.

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение* $\xi \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\varphi_n(g, x) = \left(1 \wedge \frac{n}{\|g\|_x}\right) g, \quad g \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}_+^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Определим $a_n(z, x, g) = a(z, x, \varphi_n(g, x))$, $b_n(z, x, g) = b(z, x, \varphi_n(g, x))$. Заметим, что $\{(g, x) : \varphi_n(g, x) \in C\} \in \mathscr{C}_y \otimes \mathscr{B}([0, y])$ для любого $C \in \mathscr{C}_y$, поэтому $a_n, b_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+^2) \otimes \widetilde{\mathscr{P}} | \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Так как

$$\|\varphi_n(g)\|_x \le \|g\|_x \wedge n \quad \text{и} \quad \|\varphi_n(g) - \varphi_n(g')\|_x \le 2\|g - g'\|_x,$$

коэффициенты a_n и b_n удовлетворяют условиям (8) и (9) с той же константой C и условиям (10) и (11) с константой $2K_n$.

Определим линии остановки

$$L'_m = \operatorname{debut}\{(z, \omega) : \|\eta(\cdot, \omega)\|_z \ge m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и рассмотрим семейство стохастических интегральных уравнений

$$\xi_{n,m}(z) = [\eta(z) \vee (-m)] \wedge m + \int\limits_{]0,z]} a_n(z, x, \xi_{n,m})\, dx + \int\limits_{]0,z]} b_n(z, x, \xi_{n,m})\, dW(x), \quad z \in \mathbb{R}_+^2. \tag{15}$$

Согласно теореме 3.2 уравнение (15) имеет единственное решение $\xi_{n,m} \in \Xi_p$. Так как

$$\left|\mathrm{I}^{(y)}_{[0,L'_m]}(\xi_{n,m+1}(y) - \xi_{n,m}(y))\right| \le \left| \int\limits_{]0,y]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,L'_m]} [a_n(y, x, \xi_{n,m+1}) - a_n(y, x, \xi_{n,m})]\, dx \right| + \left| \int\limits_{]0,y]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,L'_m]} [b_n(y, x, \xi_{n,m+1}) - b_n(y, x, \xi_{n,m})]\, dW(x) \right|,$$

применяя теорему 2.1, неравенство Гёльдера и учитывая условие (14), имеем

$$\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,L'_m]}(\xi_{m+1} - \xi_m)\|_z^p \le 2^{p-1} K_n^p [(z_1 z_2)^{p-1} + C_{p,\varphi,z} (z_1 z_2)^{p/2-1}] \int\limits_{]0,z]} \mathsf{E}\|\xi_{m+1} - \xi_m\|_x^p\, dx. \tag{16}$$

По лемме 3.1 из неравенства (16) следует, что

$$\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,L'_m]}(\xi_{n,m+1} - \xi_{n,m})\|_z^p = 0.$$

Таким образом, существует семейство полей $(\xi_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}} \subset \Xi_p$ решений уравнений (15) такое, что $\xi_{n,m}(x)\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L'_m]} = \xi_{n,m+1}(x)\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L'_m]}$ п. н. для всех $x \in \mathbb{R}_+^2$. Так как $[\![0, L'_m]\!] \subset [\![0, L'_{m+1}]\!]$ и $\bigcup\limits_m [\![0, L'_m]\!] = \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое поле $\xi_n \in \mathbb{F}\cap\mathbb{C}$, что верно равенство $\xi_n(x)\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L'_m]} = \xi_{n,m}(x)\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L'_m]}$ п. н. для любого $x \in \mathbb{R}^2_+$. Заметим, что для любых $z \in \mathbb{R}^2_+$, $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L'_m]}\xi_n(z) &= \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_n]}\xi_{n,m}(z)\\ &= \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_n]}\Bigg(\eta(z) + \int\limits_{]0,z]} a_n(z,x,\xi_{n,m})\,dx + \int\limits_{]0,z]} b_n(z,x,\xi_{n,m})\,dW(x)\Bigg)\\ &= \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L'_m]}\Bigg(\eta(z) + \int\limits_{]0,z]} a_n(z,x,\xi_n)\,dx + \int\limits_{]0,z]} b_n(z,x,\xi_n)\,dW(x)\Bigg) \quad \text{п. н.}\end{aligned}$$

Следовательно, ξ_n — решение уравнения

$$\xi_n(z) = \eta(z) + \int\limits_{]0,z]} a_n(z,x,\xi_n)\,dx + \int\limits_{]0,z]} b_n(z,x,\xi_n)\,dW(x).$$

Определим линии остановки

$$L_n \triangleq \operatorname{debut}\{(z,\omega):\ \|\xi_n(\cdot,\omega)\|_z \le n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя теорему 2.1, имеем

$$\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,L_n]}\mathrm{I}_{[0,L'_m]}(\xi_{n+1}-\xi_n)\|_z^p \le C_{p,\varphi,z,n}\int\limits_{]0,z]}\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,L_n]}\mathrm{I}_{[0,L'_m]}(\xi_{n+1}-\xi_n)\|_x^p\,dx.$$

По лемме 3.1

$$\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,L_n]}\mathrm{I}_{[0,L'_m]}(\xi_{n+1}-\xi_n)\|_z^p = 0$$

для любого z. Следовательно, $\|\mathrm{I}_{[0,L_n]}\mathrm{I}_{[0,L'_m]}(\xi_{n+1}-\xi_n)\|_z = 0$ п. н. для любого $z \in \mathbb{R}^2_+$. Поэтому $\|\mathrm{I}_{[0,L_n]}(\xi_{n+1}-\xi_n)\|_z = 0$ и $[\![0,L_n]\!] \subset [\![0,L_{n+1}]\!]$ с точностью до пренебрежимого множества.

В силу неравенства (12)

$$\mathsf{E}\|\xi_{n,m}\|_z^p \le C_{z,m} + K_{z,m}\int\limits_{]0,z]}\mathsf{E}\|\xi_{n,m}\|_x^p\,dx,$$

где константы $C_{z,m} = 2^{p-1}(m+\widehat{C}_z)$ и $K_{z,m} = 2^{p-1}\widehat{K}_z$ не зависят от n. По лемме 3.1 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathsf{E}\|\xi_{n,m}\|_z^p \le C_{z,m}(1+e^{zK_{z,m}})$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{z \notin [0,L_n]\} &= \mathsf{P}\{\|\xi_n\|_z > n\}\\ &\le \mathsf{P}\{\|\xi_{n,m}\|_z > n\} + \mathsf{P}\{z \notin [0,L'_m]\} \le n^{-p}\sup_n \mathsf{E}\|\xi_{n,m}\|_z^p + \mathsf{P}\{z \notin [0,L'_m]\}.\end{aligned}$$

Выбирая вначале достаточно большое m и затем достаточно большое n, правую часть последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой. Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}\{z \notin [0,L_n]\} = 0$. Следовательно, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\![0,L_n]\!] = R^2_+ \times \Omega$, и существует такое поле $\xi \in \mathbb{F}\cap\mathbb{C}$, что $\|\mathrm{I}_{[0,L_n]}(\xi-\xi_n)\|_\infty = 0$ п. н.

Так как

$$\xi(z)\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_n]} = \xi_n(z)\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_n]} = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_n]}\Bigg(\eta(z) + \int\limits_{]0,z]} a_n(z,x,\xi_n)\,dx + \int\limits_{]0,z]} b_n(z,x,\xi_n)\,dW(x)\Bigg) = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_n]}\Bigg(\eta(z) + \int\limits_{]0,z]} a(z,x,\xi)\,dx + \int\limits_{]0,z]} b(z,x,\xi)\,dW(x)\Bigg)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$, то ξ — решение уравнения (1).

Докажем единственность. Пусть поля $\xi, \xi' \in \mathbb{F} \cap \mathbb{C}$ являются решениями уравнения (1). Определим линии остановки

$$L''_n(\omega) = \mathrm{debut}\{(x,\omega) : \|\xi(\cdot,\omega)\|_x \vee \|\xi'(\cdot,\omega)\|_x \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $[\![0, L''_n]\!] \subset [\![0, L''_{n+1}]\!]$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\![0, L''_n]\!] = \mathbb{R}^2_+ \times \Omega$.

Аналогично доказательству неравенства (16) получаем существование такой константы $C'_{z,n}$, что

$$\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L''_n]}(\xi - \xi')\|^p_z \leq C'_{z,n} \int\limits_{[0,z]} \mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L''_n]}(\xi - \xi')\|^p_x \lambda(dx).$$

Поэтому $\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L''_n]}(\xi - \xi')\|^p_z = 0$ для любых $z \in \mathbb{R}^2_+$ и $n, m \in \mathbb{N}$. Следовательно, ξ' и ξ неотличимы, что завершает доказательство теоремы 3.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гущин А. А.* К общей теории случайных полей на плоскости // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 6. С. 53–74.

2. *Dozzi M.* Twoparameter stochastic processes // Math. Res. 1991. V. 61. P. 17–43.

3. *Клепцина М. Л., Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических уравнений Ито — Вольтерра // Теория вероятностей и ее применения. 1984. Т. 29, № 1. С. 154–158.

4. *Pardoux E., Protter P.* Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients // Ann. Probab. 1990. V. 18, N 4. P. 1635–1655.

5. *Kolodii A. M.* On conditions for existence of solutions of integral equations with stochastic line integrals // Probab. Theory Math. Stat. 1994. P. 405–422. (Proc. Sixth Vilnus Conf.).

6. *Гущин А. А., Мишура Ю. С.* Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов // Теория вероятностей и мат. статистика. 1990. Т. 42. С. 27–35.

7. *Stricker C., Yor M.* Calcul stochastique d'ependant d'un parametre // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1978. Bd 45. S. 109–133.

8. *Kolodii A. M.* On existence of continuous modifications of random processes // Theory Stoch. Process. 2000. V. 6, N 1–2. P. 54–57.

9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.

10. *Horvath L.* Gronwall–Bellman type integral inequalities in measure spaces // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 202, N 1. P. 183–193.

Статья поступила 14 февраля 2008 г.

Колодий Наталья Александровна
Волгоградский гос. университет, кафедра ФИОУ,
Университетский пр., 100, Волгоград 400062
nkolodii@mail.ru