Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 514.132+512.817

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДИСКРЕТНОСТИ ДЛЯ ДВУПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРУПП PSL$(2, \mathbb{C})$

А. В. Маслей

Аннотация. Каждый элемент группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ является эллиптическим, параболическим или локсодромическим. Для групп, порожденных двумя эллиптическими элементами, достаточные условия дискретности были получены Ф. Герингом, К. Маклохлином, Г. Мартином и А. А. Рассказовым. В данной работе установлены достаточные условия дискретности для групп, порожденных двумя локсодромическими элементами, и групп, порожденных локсодромическим и эллиптическим элементами.

Ключевые слова: клейнова группа, дискретная группа, гиперболическая геометрия.

1. Введение

На группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ рассмотрим топологию, индуцированную стандартной матричной нормой. Напомним, что $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$. Подгруппа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *дискретной*, если она является дискретным множеством в фактор-топологии.

Рассмотрим модель Пуанкаре $\mathbb{H}^3$ в верхнем полупространстве. Отождествим границу $\partial\mathbb{H}^3$ с расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$. Группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ действует на $\mathbb{H}^3$ как группа всех сохраняющих ориентацию изометрий, а на $\overline{\mathbb{C}}$ — как группа всех дробно-линейных преобразований. Группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *элементарной*, если существует конечная G-орбита в $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. В противном случае группа G называется *неэлементарной*. Классификация всех элементарных дискретных групп дана, например, в [1, с. 46]. Неэлементарная группа дискретна тогда и только тогда, когда любая ее двупорожденная подгруппа дискретна (см. [1, с. 66]).

Интерес к исследованию двупорожденных групп изометрий $\mathbb{H}^3$ обусловлен не только тем, что эти группы играют важную роль при исследовании свойства дискретности, но и тем, что такие группы представляют самостоятельный интерес в теории трехмерных многообразий и орбифолдов. Напомним, что замкнутые трехмерные гиперболические многообразия имеют хегоров род два (см. [2]) и представимы хирургиями на зацеплении Уайтхеда (см. [3, 4]). Геометрические подходы к описанию внешних автоморфизмов двупорожденных групп трехмерных гиперболических многообразий и орбифолдов предложены в [5, 6]. Квазифуксовы деформации двупорожденной группы проколотого тора изучались в [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00513) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1414.2012.1).

Вопрос о дискретности двупорожденных подгрупп $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ изучался многими авторами. В работах Йоргенсена [8], Тана [9], Геринга, Маршалла и Мартина [10, 11] получены необходимые условия дискретности для двупорожденных групп в виде неравенств, связывающих квадраты следов порождающих и след их коммутатора. Е. Я. Клименко и Н. В. Коптева [12] установили критерии дискретности широких классов двупорожденных групп, для которых квадраты следов порождающих и след их коммутатора являются вещественными числами. Д. А. Деревнин и А. Д. Медных [13] нашли нижние оценки на расстояния между точками в $\mathbb{H}^3$, стабилизаторы которых в дискретной группе изоморфны группе икосаэдра. В [10, 11] получены нижние оценки на расстояния между осями эллиптических элементов в дискретной группе.

Известно [1, с. 40], что каждый элемент $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ эллиптический, параболический или локсодромический. Для групп с двумя эллиптическими порождающими достаточные условия дискретности установлены в [14], а затем улучшены в [15]. Эти условия сформулированы в виде неравенств на расстояния между осями порождающих.

В данной работе получены достаточные условия дискретности для групп с другими парами непараболических порождающих. А именно, рассмотрены случай, когда оба порождающих локсодромические (теорема 2; следствия 3, 4), и случай, когда один порождающий локсодромический, а второй — эллиптический (теорема 3, следствие 5).

2. Предварительные результаты

Напомним основные факты о группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, а также о ее действии на $\overline{\mathbb{C}}$ и на $\mathbb{H}^3$ (см. [1, 16, 17]).

2.1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ обозначим

$$\mathrm{tr}(A) = a + d \quad \text{и} \quad \|A\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}.$$

На группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ рассмотрим топологию, индуцированную нормой $\|\cdot\|$.

Элемент $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\pm \mathrm{Id}\}$ называется *эллиптическим*, если $0 \le \mathrm{tr}^2(A) < 4$; *параболическим*, если $\mathrm{tr}^2(A) = 4$; *локсодромическим*, если $\mathrm{tr}^2(A) \in \mathbb{C} \setminus [0;4]$. Локсодромический элемент называется *гиперболическим*, если $\mathrm{tr}^2(A) \in (4;+\infty)$.

Напомним, что $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$. Элемент группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *эллиптическим, параболическим, локсодромическим или гиперболическим*, если таким является его представитель в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *дискретной*, если она является дискретным множеством в фактор-топологии.

2.2. Пусть элементам $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ соответствуют матрицы $\pm A, \pm B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Тогда для элементов f и g корректно определены следующие величины:

$$\mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = \mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}), \quad \mathrm{tr}^2(f) = \mathrm{tr}^2(A), \quad \mathrm{tr}^2(g) = \mathrm{tr}^2(B).$$

Обозначим через $\langle f, g\rangle$ группу, порожденную элементами f и g. *Параметрами* группы $\langle f, g\rangle$ называются три комплексных числа

$$\gamma = \gamma(f,g) = \mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2, \quad \beta = \beta(f) = \mathrm{tr}^2(f) - 4, \quad \beta' = \beta(g) = \mathrm{tr}^2(g) - 4.$$

Для краткости будем писать $\mathrm{par}(\langle f, g\rangle) = (\gamma, \beta, \beta')$. Если $\gamma \ne 0$, то упорядоченная тройка (γ, β, β') определяет группу $\langle f, g\rangle$ с точностью до сопряжения в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ (см. [18]). Как показано в [16, с. 66], $\gamma \neq 0$ тогда и только тогда, когда элементы f и g не имеют общих неподвижных точек в $\overline{\mathbb{C}}$.

2.3. *Дробно-линейным преобразованием* называется отображение $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ вида

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где } a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc=1. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ группу всех дробно-линейных преобразований.

Группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ действует на $\overline{\mathbb{C}}$ как группа $\mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$. При этом элементу

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \tag{2}$$

соответствует преобразование вида (1). Хорошо известно [16, с. 58], что $\mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

2.4. Пусть $g \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ — локсодромический элемент и $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ — его неподвижные точки. Точка z_1 называется *притягивающей* неподвижной точкой элемента g, если $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(z) = z_1$ для всех $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_2\}$. При этом точка z_2 называется *отталкивающей* неподвижной точкой элемента g. Заметим, что притягивающая неподвижная точка элемента g является отталкивающей неподвижной точкой элемента g^{-1}.

Пусть элемент $g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ такой, что $g(\infty) \neq \infty$. Тогда окружность, которая задается уравнением

$$\left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|},$$

называется *изометрической окружностью* элемента g и обозначается через I_g. Заметим, что радиусы окружностей I_g и $I_{g^{-1}}$ совпадают. Обозначим через $\overline{B}_g$ замкнутый круг, ограниченный окружностью I_g.

2.5. Говорят, что группа $G < \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ *действует разрывно в точке* $z \in \overline{\mathbb{C}}$, если существует окрестность U этой точки такая, что $g(U) \cap U = \varnothing$ для всех $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Множество всех точек, в которых G действует разрывно, называется *множеством разрывности* группы G и обозначается через $R(G)$.

Группа $G < \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ называется *клейновой группой* (*второго рода*), если $R(G) \neq \varnothing$. Клейнова группа (второго рода) дискретна [17, с. 18].

Пусть $G < \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ — клейнова группа (второго рода). Множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *частичным фундаментальным множеством* для группы G, если

(1) $D \neq \varnothing$,

(2) $D \subset R(G)$,

(3) $g(D) \cap D = \varnothing$ для всех $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$.

Если множество D удовлетворяет условиям (1)–(3) и

(4) $\bigcup\limits_{g\in G} g(D) = R(G)$,

то D называется *фундаментальным множеством* для группы G. Условие (3) означает, что любые две точки из множества D не G-эквивалентны. Условие (4) означает, что любая точка из множества $R(G)$ G-эквивалентна некоторой точке из множества D.

Следующую теорему принято называть теоремой комбинирования Клейна — Маскита.

Теорема 1 [19, теорема 1]. *Пусть G_1, G_2 — клейновы группы (второго рода), H — их общая подгруппа, D_1, D_2, Δ — частичные фундаментальные множества для групп G_1, G_2, H соответственно. Обозначим $E_i = \bigcup\limits_{h\in H} h(D_i)$, где $i = 1, 2$; $D = E_1 \cap E_2 \cap \Delta$ и $D' = \operatorname{Int} D$. Предположим, что $D' \neq \varnothing$ и $E_1 \cup E_2 = R(G_1) \cup R(G_2)$. Тогда группа G, порожденная группами G_1 и G_2, — клейнова группа (второго рода), D' — частичное фундаментальное множество для группы G, $G = G_1 *_H G_2$ и $g(D) \cap D = \varnothing$ для всех $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$.*

Далее теорема комбинирования Клейна — Маскита будет использована в случаях, когда группы G_1 и G_2 циклические, а группа H тривиальная. Если теорема выполнена для таких групп, то, в частности, группа G является свободным произведением $G_1 * G_2$.

2.6. Рассмотрим модель Пуанкаре $\mathbb{H}^3$ трехмерного гиперболического пространства. Точнее, множество $\{(z,t) : z \in \mathbb{C},\ t > 0\}$ с метрикой $ds^2 = \frac{|dz|^2+dt^2}{t^2}$. Геодезическими в этой модели являются дуги окружностей, перпендикулярные плоскости $t = 0$, и лучи, перпендикулярные плоскости $t = 0$. Геодезическими гиперплоскостями в этой модели являются полусферы, перпендикулярные плоскости $t = 0$, и полуплоскости, перпендикулярные плоскости $t = 0$. Далее будем отождествлять границу $\partial\mathbb{H}^3$ с $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ — группа всех сохраняющих ориентацию изометрий модели $\mathbb{H}^3$. Группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ действует на $\mathbb{H}^3$ как группа $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$. При этом элементу (2) соответствует продолжение Пуанкаре преобразования (1). Хорошо известно, что $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Группа $G < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ называется *элементарной*, если существует конечная G-орбита в $\mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. В противном случае группа G называется *неэлементарной*.

Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ — непараболический элемент. Тогда g имеет две неподвижные точки в $\overline{\mathbb{C}}$. *Осью* элемента g назовем геодезическую в $\mathbb{H}^3$, соединяющую эти неподвижные точки, и будем обозначать ее через ℓ_g. Элемент g сопряжен в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ элементу

$$h = \begin{pmatrix} k^{1/2}e^{\varphi i/2} & 0 \\ 0 & k^{-1/2}e^{-\varphi i/2} \end{pmatrix}, \quad \text{где } k \geq 1,\ -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Обозначим $\tau_g = \ln k$ и $\varphi_g = \varphi$. Величины τ_g и φ_g называются *величиной сдвига* и *углом поворота* элемента g соответственно. Заметим, что если g — эллиптический элемент, то угол φ_g определен с точностью до знака (так как в этом случае элементы h и h^{-1} сопряжены в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$). Прямые вычисления показывают, что имеет место следующая взаимосвязь между величинами τ_g, φ_g и $\beta(g)$.

Лемма 1. *Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ — непараболический элемент. Тогда*

$$\mathrm{ch}(\tau_g) = \frac{|\beta(g)+4| + |\beta(g)|}{4}, \quad \cos(\varphi_g) = \frac{|\beta(g)+4| - |\beta(g)|}{4}.$$

Следствие 1. *Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ — непараболический элемент. Тогда*

$$\mathrm{ch}(\tau_g/2) = \sqrt{\frac{|\beta(g)+4| + |\beta(g)| + 4}{8}}, \quad \mathrm{sh}(\tau_g/2) = \sqrt{\frac{|\beta(g)+4| + |\beta(g)| - 4}{8}}.$$

Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ — локсодромический элемент с величиной сдвига τ_g. Обозначим

$$\alpha_g = \arcsin\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(\tau_g/2)}\right). \tag{3}$$

Заметим, что $0 < \alpha_g < \pi/2$.

2.7. Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ — непараболические элементы. Обозначим через ℓ общий перпендикуляр к осям ℓ_f и ℓ_g. *Углом между осями ℓ_f и ℓ_g* называется величина двугранного угла, который образован плоскостью, содержащей ℓ и ℓ_f, и плоскостью, содержащей ℓ и ℓ_g. Обозначим через $\theta(f,g)$ угол между осями ℓ_f и ℓ_g, а через $\delta(f,g)$ — гиперболическое расстояние между этими осями. Заметим, что $0 \le \theta(f,g) \le \pi/2$ и $\delta(f,g) \ge 0$. Имеет место следующая взаимосвязь между введенными выше величинами.

Лемма 2 [10, лемма 4.4]. *Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ — непараболические элементы, которые не имеют общих неподвижных точек в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда*

$$\operatorname{ch}\bigl(2\delta(f,g)\bigr) = \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + 1\right| + \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right|,$$

$$\cos(2\theta(f,g)) = \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + 1\right| - \left|\frac{4\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right|.$$

Следствие 2. *Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ — непараболические элементы, которые не имеют общих неподвижных точек в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда*

$$\operatorname{ch}\delta(f,g) = \sqrt{\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| + \frac{1}{2}},$$

$$\cos\theta(f,g) = \sqrt{\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| + \frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) = \sqrt{\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| - \frac{1}{2}},$$

$$\sin\theta(f,g) = \sqrt{-\left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)} + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2\gamma(f,g)}{\beta(f)\beta(g)}\right| + \frac{1}{2}}.$$

3. Группы с двумя локсодромическими порождающими

3.1. Пусть $g \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ — гиперболический элемент с неподвижными точками $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w — притягивающая неподвижная точка. Обозначим

$$C_g^+ = \{z \in \mathbb{C} : \arg(w) - \alpha_g \le \arg(z) \le \arg(w) + \alpha_g\} \cup \{\infty\},$$

$$C_g^- = \{z \in \mathbb{C} : \arg(-w) - \alpha_g \le \arg(z) \le \arg(-w) + \alpha_g\} \cup \{\infty\}, \quad C_g = C_g^+ \cup C_g^-,$$

$$\partial_1 C_g = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i(\arg(w)+\alpha_g)},\ r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\},$$

$$\partial_2 C_g = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i(\arg(w)-\alpha_g)},\ r \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}.$$

Множество C_g — объединение вертикальных углов C_g^+ и C_g^-, которые имеют общую вершину в точке $0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Величина этих углов равна $2\alpha_g$. Множества $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$ — граничные прямые множества C_g. Заметим, что множества C_g и $C_{g^{-1}}$ совпадают.

Лемма 3. *Пусть $g \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ — гиперболический элемент с величиной сдвига τ_g и неподвижными точками $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\overline{B}_g \subset C_g$, $\overline{B}_{g^{-1}} \subset C_g$ и каждая из прямых $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$ касается окружностей I_g и $I_{g^{-1}}$.*

Доказательство. Не теряя общности, можем считать, что $w \in \overline{\mathbb{C}}$ — притягивающая неподвижная точка элемента g. Известно (см. [16, с. 156]), что $\mathrm{tr}^2(g) = 4\,\mathrm{ch}^2(\tau_g/2)$. Прямые вычисления показывают, что

$$g(z) = \frac{\mathrm{ch}(\tau_g/2)\cdot z + w\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)}{w^{-1}\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)\cdot z + \mathrm{ch}(\tau_g/2)}.$$

Значит, изометрические окружности I_g и $I_{g^{-1}}$ соответственно задаются уравнениями

$$|z + w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2)| = \frac{|w|}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)}, \quad |z - w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2)| = \frac{|w|}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)}.$$

Покажем, что $\overline{B}_g \subset C_g^-$ и каждая из прямых $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$ касается окружности I_g. Рассмотрим множество $b = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \arg(-w)\} \cup \{\infty\}$. Заметим, что $-w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2) \in b$ и $b \subset C_g^-$. Нетрудно видеть, что b — биссектриса угла C_g^-. Для $k \in \{1,2\}$ обозначим через $\rho(c(I_g), \partial_k C_g)$ евклидово расстояние от центра окружности I_g до прямой $\partial_k C_g$. Тогда из элементарных рассуждений следует, что

$$\rho(c(I_g), \partial_1 C_g) = \rho(c(I_g), \partial_2 C_g) = |w\,\mathrm{cth}(\tau_g/2)|\sin\alpha_g = \frac{|w|}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)}.$$

Значит, $\overline{B}_g \subset C_g^-$ и прямые $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$ касаются окружности I_g.

Тот факт, что $\overline{B}_{g^{-1}} \subset C_g^+$ и каждая из прямых $\partial_1 C_g$ и $\partial_2 C_g$ касается окружности $I_{g^{-1}}$, устанавливается аналогично. □

3.2. Рассмотрим случай, когда два порождающих в подгруппе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ локсодромические.

Теорема 2. *Пусть группа $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такова, что f и g — локсодромические элементы с величинами сдвигов τ_f и τ_g, $\theta(f,g)$ — угол между осями ℓ_f и ℓ_g, $\delta(f,g)$ — гиперболическое расстояние между этими осями, величины α_f и α_g определены формулой (3). Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(i) $\alpha_f + \alpha_g \le \theta(f,g)$,

(ii) $\alpha_f + \alpha_g > \theta(f,g)$ *и* $\mathrm{ch}\,\delta(f,g) \ge \frac{\mathrm{ch}(\tau_f/2)\,\mathrm{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)+1}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)}$.

Тогда G — неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи (i) и (ii).

Случай (i). Предположим, что для группы G выполнено условие (i). Покажем, что G — неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ бесконечна. Из неравенства условия (i) и определения величин α_f и α_g следует, что $\theta(f,g) > 0$. Значит, элементы f и g не имеют общих неподвижных точек. Пусть $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. Тогда p не является неподвижной точкой относительно хотя бы одного из элементов f или g. Следовательно, ее орбита относительно действия циклической группы, порожденной этим элементом, бесконечна.

Покажем, что G — дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Обозначим через ℓ общий перпендикуляр к осям ℓ_f и ℓ_g. С точностью до сопряжения в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ можем считать, что элементы f и g таковы, что геодезическая $\ell \subset \mathbb{H}^3$ соединяет точки $0, \infty \in \overline{\mathbb{C}}$, и притягивающей неподвижной точкой элемента g

является $-1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $1 \in \overline{\mathbb{C}}$ — отталкивающая неподвижная точка элемента g, а $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, где $|w| = e^{\delta(f,g)}$ и $-\pi/2 < \arg(w) \le \pi/2$, — неподвижные точки элемента f. Заметим, что $|\arg(w)| = \theta(f,g)$. Заменяя, если необходимо, f на f^{-1}, можем считать, что $w \in \overline{\mathbb{C}}$ — притягивающая неподвижная точка элемента f.

Рассмотрим действие элементов f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Нетрудно видеть, что множества разрывности для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ имеют вид $R(\langle f\rangle) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm w\}$ и $R(\langle g\rangle) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\pm 1\}$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle f\rangle$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим элемент
$$\tilde f(z) = \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cdot z + w\operatorname{sh}(\tau_f/2)}{w^{-1}\operatorname{sh}(\tau_f/2)\cdot z + \operatorname{ch}(\tau_f/2)} \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}}).$$

Заметим, что $\tilde f$ — гиперболический элемент с величиной сдвига τ_f и неподвижными точками $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w — притягивающая неподвижная точка. Из определения величин $\alpha_{\tilde f}$ и α_f следует, что они равны. Обозначим
$$D_f^1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + w\operatorname{cth}(\tau_f/2)| \ge \frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)},\ |z - w\operatorname{cth}(\tau_f/2)| > \frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} \right\} \cup \{\infty\}.$$

Множество D_f^1 — это внешность окружностей $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde f^{-1}}$. Заметим, что центры окружностей $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde f^{-1}}$ симметричны относительно точки $0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Нетрудно проверить, что $f(I_{\tilde f}) = I_{\tilde f^{-1}}$ и $f^{-1}(I_{\tilde f^{-1}}) = I_{\tilde f}$. Множество D_f^1 является фундаментальным множеством для группы $\langle f\rangle$. Покажем это. Пусть элемент $t \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ такой, что $t(w) = \infty$, $t(-w) = 0$ и $t(v) = 1$, где $v \in I_{\tilde f}$. Тогда множество $t\big(D_f^1\big) = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| < e^{\tau_f}\}$ — кольцо, которое по определению является фундаментальным множеством для группы $\langle tft^{-1}\rangle$, где $tft^{-1}(z) = e^{\tau_f + i\phi_f}\cdot z$. Следовательно, D_f^1 является фундаментальным множеством для группы $\langle f\rangle$. При этом если $p \in D_f^1$, то $\big(D_f^1 \setminus \{p\}\big) \cup \{f(p)\}$ также является фундаментальным множеством для группы $\langle f\rangle$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle g\rangle$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим элемент
$$\tilde g(z) = \frac{\operatorname{ch}(\tau_g/2)\cdot z - \operatorname{sh}(\tau_g/2)}{-\operatorname{sh}(\tau_g/2)\cdot z + \operatorname{ch}(\tau_g/2)} \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}}).$$

Заметим, что $\tilde g$ — гиперболический элемент с величиной сдвига τ_g и неподвижными точками $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$, причем -1 — притягивающая неподвижная точка. Из определения величин $\alpha_{\tilde g}$ и α_g следует, что они равны. Обозначим
$$D_g^1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \operatorname{cth}(\tau_g/2)| \ge \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_g/2)},\ |z + \operatorname{cth}(\tau_g/2)| > \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_g/2)} \right\} \cup \{\infty\}.$$

Множество D_g^1 — внешность окружностей $I_{\tilde g}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$. Заметим, что центры окружностей $I_{\tilde g}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ симметричны относительно точки $0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Нетрудно проверить, что $g(I_{\tilde g}) = I_{\tilde g^{-1}}$ и $g^{-1}(I_{\tilde g^{-1}}) = I_{\tilde g}$. Рассуждая, как при построении множества D_f^1, можно показать, что D_g^1 является фундаментальным множеством для группы $\langle g\rangle$. При этом если $p \in D_g^1$, то $\big(D_g^1 \setminus \{p\}\big) \cup \{g(p)\}$ также является фундаментальным множеством для группы $\langle g\rangle$.

Используя элементарные геометрические рассуждения, нетрудно показать, что имеют место следующие свойства.

1^0. $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g} = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \varnothing$.

2^0. *Окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом тогда и только тогда, когда окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом.*

3^0. $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_{\tilde g} = \varnothing$.

4^0. *Окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом тогда и только тогда, когда окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом.*

Для элементов $\tilde f$ и $\tilde g$ рассмотрим угловые множества $C_{\tilde f}$ и $C_{\tilde g}$, определенные в п. 3.1.

Пусть $\alpha_f + \alpha_g < \theta(f,g)$. Тогда из определения множеств $C_{\tilde f}$ и $C_{\tilde g}$ следует, что $C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g} = \{0, \infty\}$. По лемме 3 $\overline{B}_{\tilde f} \subset C_{\tilde f}$, $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \subset C_{\tilde f}$ и $\overline{B}_{\tilde g} \subset C_{\tilde g}$, $\overline{B}_{\tilde g^{-1}} \subset C_{\tilde g}$. Из этих фактов и построения множеств D_f^1 и D_g^1 вытекает, что $D_f^1 \cup D_g^1 = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\bigl(D_f^1 \cap D_g^1\bigr) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D_f^1 и D_g^1 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть $\alpha_f + \alpha_g = \theta(f,g)$. Из определения множеств $C_{\tilde f}$ и $C_{\tilde g}$ следует, что либо $C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g} = \partial_1 C_{\tilde g}$, либо $C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g} = \partial_2 C_{\tilde g}$, либо $C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g} = \partial_1 C_{\tilde f} \cup \partial_2 C_{\tilde f} = \partial_1 C_{\tilde g} \cup \partial_2 C_{\tilde g}$.

Пусть $C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g} = \partial_1 C_{\tilde g}$ или $C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g} = \partial_2 C_{\tilde g}$. По лемме 3 $\overline{B}_{\tilde f} \subset C_{\tilde f}$, $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \subset C_{\tilde f}$ и $\overline{B}_{\tilde g} \subset C_{\tilde g}$, $\overline{B}_{\tilde g^{-1}} \subset C_{\tilde g}$. Из этих фактов и построения множеств D_f^1 и D_g^1 следует, что $D_f^1 \cup D_g^1 = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\bigl(D_f^1 \cap D_g^1\bigr) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D_f^1 и D_g^1 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть $C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g} = \partial_1 C_{\tilde f} \cup \partial_2 C_{\tilde f} = \partial_1 C_{\tilde g} \cup \partial_2 C_{\tilde g}$. Тогда по лемме 3 $\overline{B}_{\tilde f} \subset C_{\tilde f}$, $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \subset C_{\tilde f}$ и $\overline{B}_{\tilde g} \subset C_{\tilde g}$, $\overline{B}_{\tilde g^{-1}} \subset C_{\tilde g}$. Поэтому либо $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \varnothing$, либо окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde g^{-1}} = \varnothing$. Тогда из свойства 3^0 вытекает, что $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_{\tilde g} = \varnothing$. Из этих фактов и построения множеств D_f^1 и D_g^1 следует, что $D_f^1 \cup D_g^1 = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\bigl(D_f^1 \cap D_g^1\bigr) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D_f^1 и D_g^1 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_{\tilde g^{-1}} = \{z_1\}$ для некоторой точки $z_1 \in C_{\tilde f} \cap C_{\tilde g}$. Тогда из построения множеств D_f^1 и D_g^1 получаем, что $D_f^1 \cup D_g^1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1\} \neq R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. Следовательно, выбор множеств D_f^1 и D_g^1 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ делает невозможным применение теоремы 1. Для этих же групп выберем другую пару фундаментальных множеств D_f^2 и D_g^2 таких, что $D_f^2 \cup D_g^2 = R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$.

По свойству 4^0 окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом. Из элементарных геометрических рассуждений следует, что окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом. Тогда по свойству 2^0 окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ также касаются внешним образом. Обозначим $z_2 = f^{-1}(z_1)$, $z_3 = g^{-1}(z_2)$, $z_4 = f^{-1}(z_3)$. Зададим фундаментальные множества D_f^2 и D_g^2 следующим образом.

Если $I_{\tilde f} \cap I_{\tilde g^{-1}} \neq \{z_2\}$, то пусть $D_f^2 = \bigl(D_f^1 \setminus \{z_2\}\bigr) \cup \{z_1\}$ и $D_g^2 = D_g^1$ (рис. 1*a*).

Если $I_{\tilde f} \cap I_{\tilde g^{-1}} = \{z_2\}$ и $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_{\tilde g} \neq \{z_3\}$, то пусть $D_f^2 = \bigl(D_f^1 \setminus \{z_2\}\bigr) \cup \{z_1\}$ и $D_g^2 = \bigl(D_g^1 \setminus \{z_3\}\bigr) \cup \{z_2\}$ (рис. 1*b*).

Если $I_{\tilde f} \cap I_{\tilde g^{-1}} = \{z_2\}$ и $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_{\tilde g} = \{z_3\}$, то пусть $D_f^2 = \bigl(D_f^1 \setminus \{z_2, z_4\}\bigr) \cup \{z_1, z_3\}$ и $D_g^2 = \bigl(D_g^1 \setminus \{z_3\}\bigr) \cup \{z_2\}$ (рис. 1*c*).

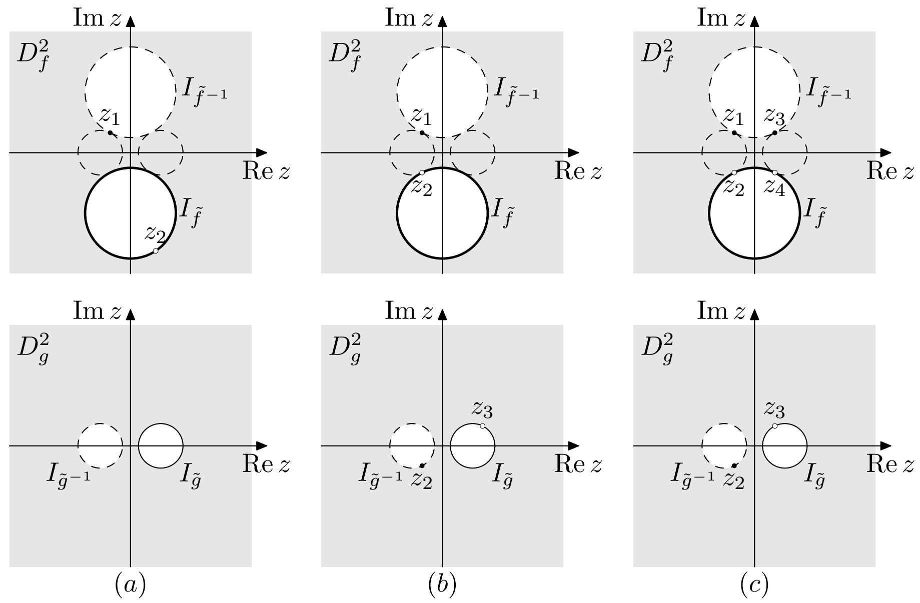

Рис. 1. Множества D_f^2 и D_g^2.

В каждом из этих трех случаев выполнено $D_f^2 \cup D_g^2 = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f \rangle) \cup R(\langle g \rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\big(D_f^2 \cap D_g^2\big) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D_f^2 и D_g^2 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$. Итак, в случае (i) теорема доказана.

Случай (ii). Предположим, что для группы G выполнено условие (ii). Покажем, что G — неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ бесконечна. Из первого неравенства условия (ii), формулы косинуса суммы и определений величин α_f и α_g следует, что

$$\cos\theta(f,g) > \cos(\alpha_f + \alpha_g) = \cos\alpha_f \cos\alpha_g - \sin\alpha_f \sin\alpha_g$$
$$= \operatorname{th}(\tau_f/2)\operatorname{th}(\tau_g/2) - \frac{1}{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)}.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\operatorname{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g) + 1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\operatorname{sh}(\tau_g/2)} > 1.$$

Из этого неравенства и второго неравенства условия (ii) вытекает, что $\delta(f,g) > 0$. Значит, элементы f и g не имеют общих неподвижных точек. Аналогично случаю (i) можно показать, что для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ бесконечна.

Покажем, что G — дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$. Рассуждая, как в случае (i), можем считать, что элемент f имеет неподвижные точки $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w — притягивающая неподвижная точка, а элемент g имеет неподвижные точки $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$, причем -1 — притягивающая неподвижная точка.

Рассмотрим действие элементов f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Аналогично случаю (i) определим элементы $\tilde f$ и $\tilde g$ и построим фундаментальные множества D_f^1 и D_g^1 для групп $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$.

Для элементов $\tilde f$ и $\tilde g$ рассмотрим угловые множества $C_{\tilde f}$ и $C_{\tilde g}$, определенные в п. 3.1. Если выполнено первое неравенство из условия (ii), то $\mathrm{Int}(C_{\tilde f}\cap C_{\tilde g})\neq\varnothing$. Покажем, что если выполнено второе неравенство из условия (ii), то множество $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g}$ состоит не более чем из одной точки. В этом неравенстве распишем гиперболический косинус по определению и выполним элементарные преобразования. Получим

$$e^{2\delta(f,g)}-2e^{\delta(f,g)}\frac{\mathrm{ch}(\tau_f/2)\,\mathrm{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)+1}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)}+1\geq 0.$$

Используя тождество для гиперболических функций, перепишем полученное неравенство следующим образом:

$$e^{2\delta(f,g)}\frac{\mathrm{ch}^2(\tau_f/2)-1}{\mathrm{sh}^2(\tau_f/2)}-2e^{\delta(f,g)}\frac{\mathrm{ch}(\tau_f/2)\,\mathrm{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)+1}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)}+\frac{\mathrm{ch}^2(\tau_g/2)-1}{\mathrm{sh}^2(\tau_g/2)}\geq 0.$$

Это неравенство приводится к виду

$$\frac{e^{2\delta(f,g)}\,\mathrm{ch}^2(\tau_f/2)}{\mathrm{sh}^2(\tau_f/2)}+\frac{\mathrm{ch}^2(\tau_g/2)}{\mathrm{sh}^2(\tau_g/2)}-2e^{\delta(f,g)}\frac{\mathrm{ch}(\tau_f/2)\,\mathrm{ch}(\tau_g/2)\cos\theta(f,g)}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)\,\mathrm{sh}(\tau_g/2)}\geq\left(\frac{e^{\delta(f,g)}}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)}+\frac{1}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)}\right)^2.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$|w|^2\,\mathrm{cth}^2(\tau_f/2)+\mathrm{cth}^2(\tau_g/2)-2|w|\,\mathrm{cth}(\tau_f/2)\,\mathrm{cth}(\tau_g/2)\cos(\arg(w))\geq\left(\frac{|w|}{\mathrm{sh}(\tau_f/2)}+\frac{1}{\mathrm{sh}(\tau_g/2)}\right)^2.$$

Из этого неравенства и теоремы косинусов для евклидовых треугольников следует, что евклидово расстояние между центрами окружностей $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g}$ не меньше суммы радиусов этих окружностей. Значит, реализуется один из следующих случаев: либо $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g}=\varnothing$, либо окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g}=\varnothing$. Тогда из элементарных геометрических рассуждений вытекает, что $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g^{-1}}=\varnothing$. По свойствам 1^0 и 3^0 из доказательства п. (i) теоремы $\overline{B}_{\tilde f}\cap\overline{B}_{\tilde g^{-1}}=\varnothing$ и $\overline{B}_{\tilde f}\cap\overline{B}_{\tilde g}=\varnothing$. Из этих фактов и построения множеств D^1_f и D^1_g имеем $D^1_f\cup D^1_g=\overline{\mathbb{C}}=R(\langle f\rangle)\cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\mathrm{Int}\big(D^1_f\cap D^1_g\big)\neq\varnothing$. Таким образом, выбор множеств D^1_f и D^1_g в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом. Тогда из элементарных геометрических рассуждений следует, что либо $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g^{-1}}=\varnothing$, либо окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_{\tilde g^{-1}}=\varnothing$. Тогда по свойствам 2^0 и 3^0 из доказательства случая (i) теоремы окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом и $\overline{B}_{\tilde f}\cap\overline{B}_{\tilde g}=\varnothing$. Из этих фактов и построения множеств D^1_f и D^1_g следует, что $D^1_f\cup D^1_g=\overline{\mathbb{C}}=R(\langle f\rangle)\cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\mathrm{Int}\big(D^1_f\cap D^1_g\big)\neq\varnothing$. Таким образом, выбор множеств D^1_f и D^1_g в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

Пусть $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_{\tilde g^{-1}} = \{z_1\}$ для некоторой точки $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Аналогично случаю (i) можно построить множества D_f^2 и D_g^2 и показать, что выбор множеств D_f^2 и D_g^2 в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Итак, в случае (ii) теорема доказана. $\square$

3.3. Расписывая условие теоремы 2 с использованием следствий 1 и 2, получаем следующие утверждения.

Следствие 3. *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}(\langle f,g\rangle) = (\gamma,\beta,\beta')$, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$ *и* $\beta,\beta' \in \mathbb{C}\setminus[-4,0]$. *Предположим, что для тройки* (γ,β,β') *выполнено неравенство*

$$\sqrt{|4\gamma+\beta\beta'| - 4|\gamma| + |\beta\beta'|} \le \sqrt{2|\beta\beta'|}\cdot\frac{\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|-4)(|\beta'+4|+|\beta'|-4)}-8}{\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|+4)(|\beta'+4|+|\beta'|+4)}}.$$

Тогда G *— неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Следствие 4. *Пусть* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}(\langle f,g\rangle) = (\gamma,\beta,\beta')$, *где* $\gamma \in \mathbb{C}$ *и* $\beta,\beta' \in \mathbb{C}\setminus[-4,0]$. *Предположим, что для тройки* (γ,β,β') *выполнено условие*

$$\sqrt{|4\gamma+\beta\beta'| - 4|\gamma| + |\beta\beta'|} > \sqrt{2|\beta\beta'|}\cdot\frac{\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|-4)(|\beta'+4|+|\beta'|-4)}-8}{\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|+4)(|\beta'+4|+|\beta'|+4)}},$$

$$\begin{aligned}&\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|-4)(|\beta'+4|+|\beta'|-4)(|4\gamma+\beta\beta'|+4|\gamma|+|\beta\beta'|)}\\ &-\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|+4)(|\beta'+4|+|\beta'|+4)(|4\gamma+\beta\beta'|-4|\gamma|+|\beta\beta'|)} \ge 8\cdot\sqrt{2|\beta\beta'|}.\end{aligned}$$

Тогда G *— неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

4. Группы с локсодромическим и эллиптическим порождающими

4.1. Рассмотрим случай, когда один порождающий в подгруппе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ локсодромический, а второй — эллиптический.

Теорема 3. *Пусть группа* $G = \langle f, g\rangle < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *такова, что* f *— локсодромический элемент с величиной сдвига* τ_f, g *— эллиптический элемент порядка* $n \ge 2$, $\theta(f,g)$ *— угол между осями* ℓ_f *и* ℓ_g, $\delta(f,g)$ *— гиперболическое расстояние между этими осями. Предположим, что выполнено неравенство*

$$\operatorname{sh}\delta(f,g) \ge \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g)+1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)}. \tag{4}$$

Тогда G *— неэлементарная дискретная группа и* $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $n = 2$ и $n \ge 3$.

Случай $n = 2$. Предположим, что для группы G выполнено условие теоремы и g — эллиптический элемент порядка $n = 2$.

Покажем, что G — неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ бесконечна. Из неравенства (4) следует, что $\delta(f,g) > 0$. Значит, элементы f и g не имеют общих неподвижных точек. Пусть $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. Достаточно показать, что если p — неподвижная точка элемента f, то ее орбита $G(p)$ бесконечна. Заметим, что если p — неподвижная точка элемента f, то

$g(p)$ не является неподвижной точкой элемента f (так как в противном случае $\delta(f,g)=0$). Следовательно, орбита точки $g(p)$ относительно действия группы $\langle f\rangle$ бесконечна.

Покажем, что G — дискретная группа и $G=\langle f\rangle * \langle g\rangle$. Обозначим через ℓ общий перпендикуляр к осям ℓ_f и ℓ_g. С точностью до сопряжения в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ можем считать, что элементы f и g таковы, что геодезическая $\ell\subset\mathbb{H}^3$ соединяет точки $0,\infty\in\overline{\mathbb{C}}$, и одной из неподвижных точек элемента g является $-1\in\overline{\mathbb{C}}$. Тогда $1\in\overline{\mathbb{C}}$ — вторая неподвижная точка элемента g, а $\pm w\in\overline{\mathbb{C}}$, где $|w|=e^{\delta(f,g)}$ и $0\le\arg(w)<\pi$, — неподвижные точки элемента f. Заметим, что если $0\le\arg(w)\le\pi/2$, то $\arg(w)=\theta(f,g)$; если же $\pi/2<\arg(w)<\pi$, то $\arg(w)=\pi-\theta(f,g)$. Заменяя, если необходимо, f на f^{-1}, можем считать, что $w\in\overline{\mathbb{C}}$ — притягивающая неподвижная точка элемента f.

Рассмотрим действие элементов f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Нетрудно видеть, что множества разрывности для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ имеют вид $R(\langle f\rangle)=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{\pm w\}$ и $R(\langle g\rangle)=\overline{\mathbb{C}}\setminus\{\pm1\}$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle f\rangle$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим элемент

$$\tilde f(z)=\frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cdot z+w\operatorname{sh}(\tau_f/2)}{w^{-1}\operatorname{sh}(\tau_f/2)\cdot z+\operatorname{ch}(\tau_f/2)}\in\mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}}).$$

Заметим, что $\tilde f$ — гиперболический элемент с величиной сдвига τ_f и неподвижными точками $\pm w\in\overline{\mathbb{C}}$, причем w — притягивающая неподвижная точка. Из определения величин $\alpha_{\tilde f}$ и α_f следует, что они равны. Обозначим

$$D_f^1=\left\{z\in\mathbb{C}:|z+w\operatorname{cth}(\tau_f/2)|\ge\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)},\ |z-w\operatorname{cth}(\tau_f/2)|>\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}\right\}\cup\{\infty\}.$$

Множество D_f^1 — внешность окружностей $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde f^{-1}}$. Заметим, что центры окружностей $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde f^{-1}}$ симметричны относительно точки $0\in\overline{\mathbb{C}}$. Нетрудно проверить, что $f(I_{\tilde f})=I_{\tilde f^{-1}}$, $f^{-1}(I_{\tilde f^{-1}})=I_{\tilde f}$. Рассуждая, как в доказательстве п. (i) теоремы 2, можно показать, что D_f^1 является фундаментальным множеством для группы $\langle f\rangle$. При этом если $p\in D_f^1$, то $\left(D_f^1\setminus\{p\}\right)\cup\{f(p)\}$ также является фундаментальным множеством для группы $\langle f\rangle$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle g\rangle$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Из определения окружностей I_g и $I_{g^{-1}}$ следует, что они совпадают. Обозначим

$$D_{g,2}^1=\{z\in\mathbb{C}:|z|\ge1,\ \operatorname{Im}z\ne-\sqrt{1-\operatorname{Re}^2z}\}\cup\{\infty\}.$$

Множество $D_{g,2}^1$ — внешность окружности I_g. Нетрудно проверить, что $g(I_g)=I_g$. Множество $D_{g,2}^1$ является фундаментальным множеством для группы $\langle g\rangle$. Покажем это. Пусть элемент $t\in\mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ такой, что $t(1)=0$, $t(-1)=\infty$ и $t(v)=1$, где $v\in I_g\cap D_{g,2}^1$. Тогда множество $t\left(D_{g,2}^1\right)=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}:-\pi<\arg(z)\le0\}$ — полуплоскость, которая по определению является фундаментальным множеством для группы $\langle tgt^{-1}\rangle$, где $tgt^{-1}(z)=-z$. Следовательно, $D_{g,2}^1$ является фундаментальным множеством для группы $\langle g\rangle$. При этом если $p\in D_{g,2}^1$, то $\left(D_{g,2}^1\setminus\{p\}\right)\cup\{g(p)\}$ также является фундаментальным множеством для группы $\langle g\rangle$.

Используя элементарные геометрические рассуждения, нетрудно показать, что имеют место следующие свойства.

1^0. $\overline{B}_{\tilde f^{-1}}\cap\overline{B}_g=\varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde f}\cap\overline{B}_g=\varnothing$.

2^0. *Окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и I_g касаются внешним образом тогда и только тогда, когда окружности $I_{\tilde f}$ и I_g касаются внешним образом.*

Покажем, что если выполнено неравенство (4), то множество $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_g$ состоит не более чем из одной точки. В этом неравенстве распишем гиперболический синус по определению и выполним элементарные преобразования. Получим

$$e^{2\delta(f,g)} - 2e^{\delta(f,g)} \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} - 1 \geq 0.$$

Используя тождество для гиперболических функций, перепишем полученное неравенство следующим образом:

$$e^{2\delta(f,g)} \frac{\operatorname{ch}^2(\tau_f/2) - 1}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)} - 2e^{\delta(f,g)} \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} - 1 \geq 0.$$

Это неравенство приводится к виду

$$e^{2\delta(f,g)} \operatorname{cth}^2(\tau_f/2) \geq \left(\frac{e^{\delta(f,g)}}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} + 1 \right)^2.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$|w|^2 \operatorname{cth}^2(\tau_f/2) \geq \left(\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} + 1 \right)^2.$$

Из этого неравенства следует, что евклидово расстояние между центрами окружностей $I_{\tilde f^{-1}}$ и I_g не меньше суммы радиусов этих окружностей. Значит, реализуется один из следующих случаев: либо $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_g = \varnothing$, либо окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и I_g касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde f^{-1}} \cap \overline{B}_g = \varnothing$. Тогда по свойству 1^0 $\overline{B}_{\tilde f} \cap \overline{B}_g = \varnothing$. Из этих фактов и построения множеств D_f^1 и $D_{g,2}^1$ следует, что $D_f^1 \cup D_{g,2}^1 = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f \rangle) \cup R(\langle g \rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\big(D_f^1 \cap D_{g,2}^1\big) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D_f^1 и $D_{g,2}^1$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

Пусть окружности $I_{\tilde f^{-1}}$ и I_g касаются внешним образом. Тогда по свойству 2^0 окружности $I_{\tilde f}$ и I_g также касаются внешним образом. Рассмотрим отдельно случаи $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_g \neq \{1\}$ и $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_g = \{1\}$.

Пусть $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_g \neq \{1\}$. Из построения множеств D_f^1 и $D_{g,2}^1$ следует, что $D_f^1 \cup D_{g,2}^1 = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f \rangle) \cup R(\langle g \rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\big(D_f^1 \cap D_{g,2}^1\big) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D_f^1 и $D_{g,2}^1$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

Пусть $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_g = \{1\}$. Из построения множеств D_f^1 и $D_{g,2}^1$ следует, что $D_f^1 \cup D_{g,2}^1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{1\} \neq R(\langle f \rangle) \cup R(\langle g \rangle)$. Поэтому выбор множеств D_f^1 и $D_{g,2}^1$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ делает невозможным применение теоремы 1. Рассмотрим отдельно случай, когда $f^{-1}(1) \neq -1$, и случай, когда $f^{-1}(1) = -1$.

Пусть $f^{-1}(1) \neq -1$. Для групп $\langle f \rangle$ и $\langle g \rangle$ выберем другую пару фундаментальных множеств D_f^2 и $D_{g,2}^2$ таких, что $D_f^2 \cup D_{g,2}^2 = R(\langle f \rangle) \cup R(\langle g \rangle)$. А именно, пусть $D_f^2 = \big(D_f^1 \setminus \{f^{-1}(1)\}\big) \cup \{1\}$ и $D_{g,2}^2 = D_{g,2}^1$ (рис. 2*a*). Тогда

$D_f^2 \cup D_{g,2}^2 = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\bigl(D_f^2 \cap D_{g,2}^2\bigr) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D_f^2 и $D_{g,2}^2$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть $f^{-1}(1) = -1$. Покажем, что преобразования f и $\tilde f$ совпадают. Из построения элемента $\tilde f$ следует, что $\tilde f(w) = w$ и $\tilde f(-w) = -w$. При этом $f(w) = w$ и $f(-w) = -w$. Покажем, что $\tilde f(-1) = 1$. Из того факта, что $I_{\tilde f^{-1}} \cap I_g = \{1\}$, и элементарных геометрических рассуждений следует равенство

$$|1 - e^{\delta(f,g)}\operatorname{cth}(\tau_f/2)| = \frac{e^{\delta(f,g)}}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}.$$

Полученное равенство приводится к виду

$$e^{\delta(f,g)} = \frac{\operatorname{sh}(\tau_f/2)}{\operatorname{ch}(\tau_f/2) - 1}.$$

Прямые вычисления с использованием последнего равенства показывают, что $\tilde f(-1) = 1$. При этом $f(-1) = 1$. Известно [16, с. 56], что каковы бы ни были три различные точки $u_1, u_2, u_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и три различные точки $v_1, v_2, v_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, существует единственный элемент $h \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ такой, что $h(u_k) = v_k$, где $k \in \{1,2,3\}$. Таким образом, f — гиперболический элемент такой, что $f(-1) = 1$. При этом $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$ — неподвижные точки эллиптического элемента порядка 2. Тогда, как показал Маскит [20], G — дискретная группа и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$. Итак, теорема доказана в случае, когда g — эллиптический элемент порядка $n = 2$.

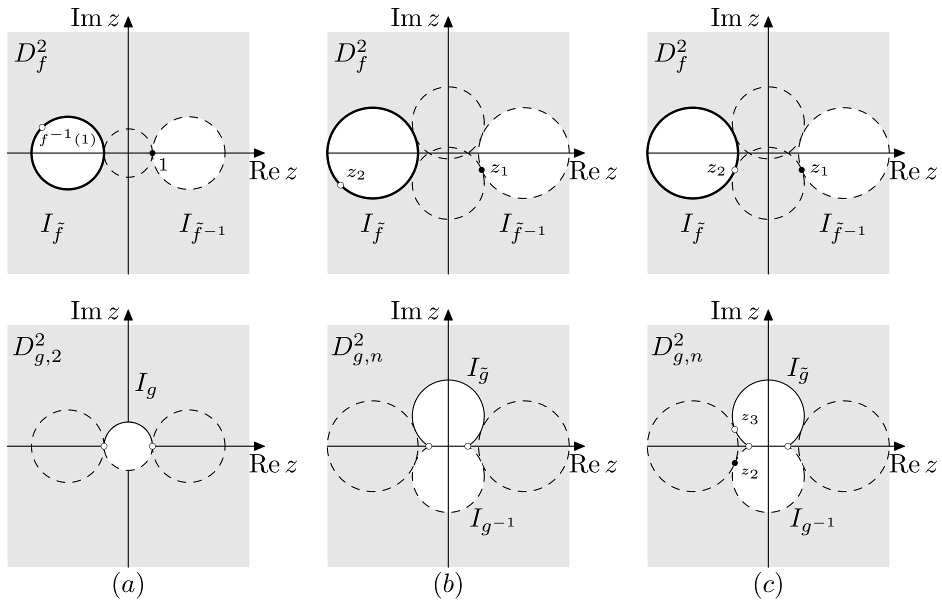

Рис. 2. Множества D_f^2 и $D_{g,2}^2$; D_f^2 и $D_{g,n}^2$, где $n \geq 3$.

Случай $n \geq 3$. Предположим, что для группы G выполнено условие теоремы и g — эллиптический элемент порядка $n \geq 3$.

Покажем, что G — неэлементарная группа, т. е. для любой точки $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$ ее орбита $G(p)$ бесконечна. Из неравенства (4) следует, что $\delta(f,g) > 0$.

Значит, элементы f и g не имеют общих неподвижных точек. Пусть $p \in \mathbb{H}^3 \cup \overline{\mathbb{C}}$. Достаточно показать, что если p — неподвижная точка элемента f, то ее орбита $G(p)$ бесконечна. Заметим, что если p — неподвижная точка элемента f, то существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $g^m(p)$ не является неподвижной точкой элемента f. Следовательно, орбита точки $g^m(p)$ относительно действия группы $\langle f \rangle$ бесконечна.

Покажем, что G — дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

Рассуждая, как в случае $n = 2$, можем считать, что элемент f имеет неподвижные точки $\pm w \in \overline{\mathbb{C}}$, причем w — притягивающая неподвижная точка; а элемент g имеет неподвижные точки $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Заменяя, если необходимо, g на g^{-1}, можем считать, что

$$g = \begin{pmatrix} \cos(k\pi/n) & i\sin(k\pi/n) \\ i\sin(k\pi/n) & \cos(k\pi/n) \end{pmatrix},$$

где $1 \le k < n/2$ и $(k, n) = 1$.

Рассмотрим действие элементов f и g на $\overline{\mathbb{C}}$. Аналогично случаю $n = 2$ определим элемент $\tilde{f}$ и построим фундаментальное множество D_f^1 для группы $\langle f \rangle$.

Построим фундаментальное множество для группы $\langle g \rangle$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Рассмотрим элемент

$$\tilde{g}(z) = \frac{\cos(\pi/n) \cdot z + i\sin(\pi/n)}{i\sin(\pi/n) \cdot z + \cos(\pi/n)} \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}}).$$

Заметим, что $\tilde{g}$ — эллиптический элемент порядка n с неподвижными точками $\pm 1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Обозначим

$$D_{g,n}^1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - i\operatorname{ctg}(\pi/n)| \ge \frac{1}{\sin(\pi/n)},\ |z + i\operatorname{ctg}(\pi/n)| > \frac{1}{\sin(\pi/n)} \right\} \cup \{\infty\}.$$

Множество $D_{g,n}^1$ — это внешность окружностей $I_{\tilde{g}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$. Заметим, что центры окружностей $I_{\tilde{g}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ симметричны относительно точки $0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Нетрудно проверить, что $\tilde{g}(I_{\tilde{g}}) = I_{\tilde{g}^{-1}}$ и $\tilde{g}^{-1}(I_{\tilde{g}^{-1}}) = I_{\tilde{g}}$. Множество $D_{g,n}^1$ является фундаментальным множеством для группы $\langle g \rangle$. Покажем это. Пусть элемент $t \in \mathrm{LF}(\overline{\mathbb{C}})$ такой, что $t(1) = 0$, $t(-1) = \infty$ и $t(p) = 1$, где $p \in I_{\tilde{g}} \cap D_{g,n}^1$. Тогда множество $t\big(D_{g,n}^1\big) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -2\pi/n < \arg(z) \le 0\}$ — плоский угол, который по определению является фундаментальным множеством для группы $\langle tgt^{-1} \rangle$, где $tgt^{-1}(z) = e^{-2\pi ki/n} \cdot z$. Следовательно, $D_{g,n}^1$ является фундаментальным множеством для группы $\langle g \rangle$. При этом если $p \in D_{g,n}^1$, то $\big(D_{g,n}^1 \setminus \{p\}\big) \cup \{\tilde{g}(p)\}$ также является фундаментальным множеством для группы $\langle g \rangle$.

Используя элементарные геометрические рассуждения, нетрудно показать, что имеют место следующие свойства.

3^0. $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \varnothing$.

4^0. *Окружности* $I_{\tilde{f}^{-1}}$ *и* $I_{\tilde{g}}$ *касаются внешним образом тогда и только тогда, когда окружности* $I_{\tilde{f}}$ *и* $I_{\tilde{g}^{-1}}$ *касаются внешним образом.*

5^0. $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \varnothing$.

6^0. *Окружности* $I_{\tilde{f}^{-1}}$ *и* $I_{\tilde{g}^{-1}}$ *касаются внешним образом тогда и только тогда, когда окружности* $I_{\tilde{f}}$ *и* $I_{\tilde{g}}$ *касаются внешним образом.*

Покажем, что если выполнено неравенство (4), то множество $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_g$ состоит не более чем из одной точки. В этом неравенстве распишем гиперболический синус по определению и выполним элементарные преобразования. Получим

$$e^{2\delta(f,g)} - 2e^{\delta(f,g)} \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g) + 1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)} - 1 \geq 0.$$

Используя тождества для гиперболических и тригонометрических функций, перепишем полученное неравенство следующим образом:

$$e^{2\delta(f,g)} \frac{\operatorname{ch}^2(\tau_f/2) - 1}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)} - 2e^{\delta(f,g)} \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g) + 1}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)} - \frac{1 - \cos^2(\pi/n)}{\sin^2(\pi/n)} \geq 0.$$

Это неравенство приводится к виду

$$\frac{e^{2\delta(f,g)}\operatorname{ch}^2(\tau_f/2)}{\operatorname{sh}^2(\tau_f/2)} - 2e^{\delta(f,g)} \frac{\operatorname{ch}(\tau_f/2)\cos(\pi/n)\sin\theta(f,g)}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)\sin(\pi/n)} + \frac{\cos^2(\pi/n)}{\sin^2(\pi/n)} \geq \left(\frac{e^{\delta(f,g)}}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} + \frac{1}{\sin(\pi/n)}\right)^2.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$|w|^2 \operatorname{cth}^2(\tau_f/2) + \operatorname{ctg}^2(\pi/n) - 2|w|\operatorname{cth}(\tau_f/2)\operatorname{ctg}(\pi/n)\cos(\pi/2 - \arg(w)) \geq \left(\frac{|w|}{\operatorname{sh}(\tau_f/2)} + \frac{1}{\sin(\pi/n)}\right)^2.$$

Из этого неравенства и теоремы косинусов для евклидовых треугольников следует, что евклидово расстояние между центрами окружностей $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}}$ не меньше суммы радиусов этих окружностей. Значит, реализуется один из следующих случаев: либо $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \varnothing$, либо окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \varnothing$. Тогда из элементарных геометрических рассуждений вытекает, что $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \varnothing$. По свойствам 3^0 и 5^0 $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \varnothing$ и $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \varnothing$. Из этих фактов и построения множеств D^1_f и $D^1_{g,n}$ получаем, что $D^1_f \cup D^1_{g,n} = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\bigl(D^1_f \cap D^1_{g,n}\bigr) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D^1_f и $D^1_{g,n}$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}}$ касаются внешним образом. Тогда из элементарных геометрических рассуждений следует, что либо $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \varnothing$, либо окружности $I_{\tilde{f}^{-1}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ касаются внешним образом.

Пусть $\overline{B}_{\tilde{f}^{-1}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}^{-1}} = \varnothing$. Тогда по свойствам 4^0 и 5^0 окружности $I_{\tilde{f}}$ и $I_{\tilde{g}^{-1}}$ касаются внешним образом и $\overline{B}_{\tilde{f}} \cap \overline{B}_{\tilde{g}} = \varnothing$. Из этих фактов и построения множеств D^1_f и $D^1_{g,n}$ следует, что $D^1_f \cup D^1_{g,n} = \overline{\mathbb{C}} = R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\bigl(D^1_f \cap D^1_{g,n}\bigr) \neq \varnothing$. Таким образом, выбор множеств D^1_f и $D^1_{g,n}$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G = \langle f\rangle * \langle g\rangle$.

Пусть $I_{\tilde{f}^{-1}} \cap I_{\tilde{g}^{-1}} = \{z_1\}$ для некоторой точки $z_1 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда из построения множеств D^1_f и $D^1_{g,n}$ следует, что $D^1_f \cup D^1_{g,n} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1\} \neq R(\langle f\rangle) \cup R(\langle g\rangle)$. Следовательно, выбор множеств D^1_f и $D^1_{g,n}$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ делает невозможным применение теоремы 1. Для этих же групп выберем другую пару фундаментальных множеств D^2_f и $D^2_{g,n}$ таких, что $D^2_f\cup D^2_{g,n}=R(\langle f\rangle)\cup R(\langle g\rangle)$.

По свойствам 4^0 и 6^0 окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g^{-1}}$ касаются внешним образом и окружности $I_{\tilde f}$ и $I_{\tilde g}$ касаются внешним образом. Обозначим $z_2=f^{-1}(z_1)$, $z_3=\tilde g^{-1}(z_2)$. Зададим фундаментальные множества D^2_f и $D^2_{g,n}$ следующим образом.

Если $I_{\tilde f}\cap I_{\tilde g^{-1}}\neq\{z_2\}$, то пусть $D^2_f=\big(D^1_f\setminus\{z_2\}\big)\cup\{z_1\}$ и $D^2_{g,n}=D^1_{g,n}$ (рис. 2b).

Если $I_{\tilde f}\cap I_{\tilde g^{-1}}=\{z_2\}$, то пусть $D^2_f=\big(D^1_f\setminus\{z_2\}\big)\cup\{z_1\}$ и $D^2_{g,n}=\big(D^1_{g,n}\setminus\{z_3\}\big)\cup\{z_2\}$ (рис. 2c).

В каждом из этих двух случаев выполнено $D^2_f\cup D^2_{g,n}=\overline{\mathbb{C}}=R(\langle f\rangle)\cup R(\langle g\rangle)$. При этом $\operatorname{Int}\big(D^2_f\cap D^2_{g,n}\big)\neq\varnothing$. Таким образом, выбор множеств D^2_f и $D^2_{g,n}$ в качестве фундаментальных множеств для групп $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ позволяет применить теорему 1. Следовательно, G — дискретная группа, и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$. Итак, теорема доказана в случае, когда g — эллиптический элемент порядка $n\geq 3$. $\square$

4.2. Расписывая условие теоремы 3 с использованием следствий 1 и 2, получаем

Следствие 5. *Пусть* $G=\langle f,g\rangle<\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ *и* $\mathrm{par}(\langle f,g\rangle)=(\gamma,\beta,\beta')$, *где* $\gamma\in\mathbb{C}$, $\beta\in\mathbb{C}\setminus[-4,0]$ *и* $\beta'=-4\sin^2(k\pi/n)$, $n\geq 2$, $1\leq k\leq n/2$ *и* $(k,n)=1$. *Предположим, что для тройки* (γ,β,β') *выполнено неравенство*

$$\sin(\pi/n)\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|-4)(|4\gamma+\beta\beta'|+4|\gamma|-|\beta\beta'|)}$$
$$-\cos(\pi/n)\sqrt{(|\beta+4|+|\beta|+4)(-|4\gamma+\beta\beta'|+4|\gamma|+|\beta\beta'|)}\geq 4\sqrt{|\beta\beta'|}.$$

Тогда G — неэлементарная дискретная группа и $G=\langle f\rangle*\langle g\rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Груневальд Ф., Менникe Й., Эльстродт Ю.* Группы, действующие на гиперболическом пространстве. М.: МЦНМО, 2003.
2. *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* О роде Хегора трехмерных гиперболических многообразий малого объема // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1013–1018.
3. *Mednykh A., Vesnin A.* Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds // J. Knot Theory Ramifications. 1998. V. 7, N 3. P. 381–392.
4. *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* Трехмерные гиперболичекие многообразия малого объема с тремя гиперэллиптическими инволюциями // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 5. С. 1035–1051.
5. *Mednykh A., Vesnin A.* Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold // J. Lie Theory. 1998. V. 8, N 1. P. 51–66.
6. *Веснин А. Ю., Рассказов А. А.* Изометрии гиперболических многообразий Фибоначчи // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 14–29.
7. *Mednykh A., Parker J., Vesnin A.* On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups // Bol. Soc. Mat. Mex. 2004. V. 10, N 3. P. 357–381.
8. *Jørgensen T.* On discrete groups of Mobius transformations // Amer. J. Math. 1976. V. 98. P. 739–749.
9. *Tan D.* On two-generator discrete groups of Mobius transformations // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106. P. 763–770.
10. *Gehring F. W., Martin G. J.* Commutators, collars and the geometry of Mobius groups // J. Anal. Math. 1994. V. 63. P. 175–219.
11. *Gehring F. W., Marshall T. H., Martin G. J.* The spectrum of elliptic axial distances in Kleinian groups // Indiana Math. J. 1998. V. 47. P. 1–10.

12. *Klimenko E., Kopteva N.* All discrete RP-groups whose generator have real trace // Int. J. Algebra Comput. 2005. V. 15, N 3. P. 577–618.

13. *Деревнин Д. А., Медных А. Д.* Геометрические свойства дискретных групп, действующих в пространстве Лобачевского с неподвижными точками // Докл. АН СССР. 1989. Т. 300, № 1. С. 27–30.

14. *Gehring F. W., C. Maclachlan, Martin G. J.* On the discreteness of the free product of finite cyclic groups // Mitt. Math. Semin. Giessen. 1996. V. 228. P. 9–15.

15. *Rasskazov A.* On the distance between the axes of elliptic elements generating a free product of cyclic groups // Adv. Geom. 2006. V. 6, N 1. P. 85–92.

16. *Бердон А. Ф.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.

17. *Maskit B.* Kleinian groups. Berlin: Springer-Verl., 1987.

18. *Gehring F. W., Martin G. J.* Stability and extremality in Jørgensen's inequality // Complex Variables, Theory Appl. 1989. V. 12, N 1–4. P. 277–282.

19. *Maskit B.* On Klein's combination theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 120. P. 499–509.

20. *Maskit B.* Some special 2-generator Kleinian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106. P. 175–186.

Статья поступила 28 марта 2013 г.

Маслей Александр Викторович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
masley.alexander@gmail.com