Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 514.133+514.174.5

ДЛИНА ХОРДЫ ГИПЕРЦИКЛА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Л. Н. Ромакина

Аннотация. Получены формулы выражения длины (гиперболической, эллиптической) хорды гиперцикла гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны через величину соответствующего хорде центрального угла, высоту гиперцикла и радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость положительной кривизны, плоскость де Ситтера, гиперцикл, хорда гиперцикла, длина хорды гиперцикла.

1. Введение

Гиперболическую плоскость $\widehat{H}$ *положительной кривизны* [1] рассматриваем в проективной интерпретации Кэли — Клейна как внешнюю относительно овальной линии γ, называемой *абсолютом* плоскости $\widehat{H}$, область проективной плоскости P_2, где в качестве прямых приняты прямые (или части прямых) трех топологических типов. Прямые, имеющие с абсолютом две общие мнимо сопряженные точки, называют *эллиптическими* прямыми плоскости $\widehat{H}$. Собственные для плоскости $\widehat{H}$ части прямых, имеющих две общие действительные точки с абсолютом, называют *гиперболическими*, а касательные к абсолюту прямые — *параболическими* прямыми плоскости $\widehat{H}$ [1–3].

Плоскость $\widehat{H}$ гомеоморфна листу Мёбиуса без границ. В интерпретации Кэли — Клейна $\widehat{H}$ является идеальной областью плоскости Лобачевского и имеет общую с плоскостью Лобачевского фундаментальную группу G преобразований, являющуюся группой проективных автоморфизмов овальной линии. Абсолют плоскости $\widehat{H}$ позволяет ввести инвариантное относительно группы G гиперболическое (эллиптическое) измерение расстояний на гиперболических (эллиптических) прямых. Параболические прямые изотропны на $\widehat{H}$ [3].

Плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны $1/\rho^2$ является проективной моделью двумерного пространства де Ситтера кривизны $1/\rho^2$, так как может быть реализована в псевдоевклидовом пространстве R^3_1 на сфере действительного радиуса $\rho > 0$ с отождествленными диаметрально противоположными точками. Число ρ называют *радиусом кривизны* плоскости $\widehat{H}$ [1, 4–6].

В литературе встречаются различные названия плоскости $\widehat{H}$: гиперболическая положительной кривизны [1], Лобачевского положительной кривизны [2], псевдориманова сферическая [7]. Если в качестве прямых принять только гиперболические (эллиптические) прямые, то на множестве всех точек плоскости $\widehat{H}$ может быть построена геометрия псевдогиперболической (псевдоэллиптической) плоскости [8].

В связи с развитием теории разбиений плоскости $\widehat{H}$ (см. [9–11]) необходимо построить элементарную геометрию этой плоскости, которая в силу наличия на $\widehat{H}$ прямых трех топологических типов имеет принципиальные отличия от геометрий классических плоскостей постоянной кривизны. В [12, 13] введены в рассмотрение и исследованы n-контуры расширенной гиперболической плоскости H^2, которые полностью расположены в плоскости $\widehat{H}$, где $\widehat{H} \subset H^2$. С правильными n-контурами, порождающими на $\widehat{H}$ особого вида разбиения (см. [10, 11]), связаны семейства гиперциклов, содержащих вершины одного порядка некоторого правильного n-контура. Гиперциклы плоскости $\widehat{H}$ являются траекториями точек при сдвигах вдоль эллиптических прямых и в некотором смысле аналогичны окружностям евклидовой плоскости. В [14] гиперциклы определены позиционно как овальные линии плоскости $\widehat{H}$, имеющие две общие мнимо сопряженные касательные с абсолютом. В [6] введена ортогональная криволинейная система координат плоскости $\widehat{H}$, координатными линиями в которой являются концентрические гиперциклы и их оси, расходящиеся на $\widehat{H}$ прямые. В гиперциклической системе координат доказана формула выражения длины дуги гиперцикла через величину соответствующего ей центрального угла и высоту гиперцикла.

В данной работе докажем теорему о зависимости длины хорды гиперцикла от величины соответствующего ей центрального угла и высоты гиперцикла. Следствиями этой теоремы являются сформулированные в тезисах [15] теоремы о длине ребра вписанного в гиперцикл правильного (гиперболического, эллиптического) многоугольника. Теорема данной работы позволяет уточнить одну из формул в [15]. В разд. 2 введем необходимые метрические формулы и используемые в работе объекты плоскости $\widehat{H}$.

2. Основные метрические формулы

2.1. Измерение отрезков. Пара точек эллиптической прямой, являющейся замкнутой, определяет на этой прямой два смежных отрезка, пара точек гиперболической (параболической) прямой — отрезок и пару лучей. Отрезки непараболических прямых измеримы на $\widehat{H}$ [3].

Если точки A, B принадлежат гиперболической (эллиптической) прямой, то прямая AB содержит две действительные (мнимо сопряженные) точки K_1, K_2 абсолютной линии γ. Сложное отношение (ABK_1K_2) четверки точек прямой является инвариантом группы G.

Пусть

$$\sigma = \frac{\rho}{2\tau}\ln(ABK_1K_2), \quad \tau^2 = 1 \ (\tau^2 = -1),$$

где ρ — радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$.

Для собственных точек A, B плоскости $\widehat{H}$ имеем $\sigma \in \mathbb{R}$. Если прямая AB гиперболическая, то число $|\sigma|$ назовем *расстоянием* между точками A, B и *длиной* отрезка AB. Если прямая AB эллиптическая, то числа $|\sigma|$, $\pi\rho - |\sigma|$ назовем *длинами* отрезков, образованных точками A, B. Число $|\sigma|$, $|\sigma| \in (0; \pi\rho/2]$, назовем *расстоянием* между точками A, B.

Если одна из точек A, B несобственная для $\widehat{H}$, то прямая AB гиперболическая и $(ABK_1K_2) < 0$. Пара точек A, B на содержащей их прямой образует два квазиотрезка [16, 17]. В этом случае $\ln(ABK_1K_2)$ рассматриваем как главное значение логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$ комплексного переменного

$z = (ABK_1K_2)$:
$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \quad -\pi < \arg z \le \pi. \tag{1}$$
Число σ в данном случае комплексное с мнимой частью $\pi\rho/2$.

Числа $\frac{i\pi\rho}{2} \pm \frac{\rho}{2}|\ln|(ABK_1K_2)||$ назовем *длинами* квазиотрезков между точками A, B.

Расстоянием между точками A, B назовем число $\frac{i\pi\rho}{2} - \frac{\rho}{2}|\ln|(ABK_1K_2)||$.

При выводе метрических формул используем канонический репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ первого типа плоскости $\widehat{H}$, вершины которого образуют автополярный относительно абсолютной линии γ трехвершинник первого рода, а единичная точка является пересечением касательных к абсолюту, проведенных из внешних относительно γ вершин A_1, A_2. Семейство U^* всех канонических реперов первого типа зависит от трех параметров. Уравнение абсолютной линии γ в реперах семейства U^* имеет вид $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Квадратичная форма $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, соответствующая заданию абсолюта в R^*, определяет на $\widehat{H}$ метрику на прямых гиперболического и эллиптического типов. Если точки A, B гиперболической (эллиптической) прямой имеют в R^* координаты соответственно $(a_1 : a_2 : a_3)$, $(b_1 : b_2 : b_3)$, то расстояние $|AB|$ между ними можно вычислить по формуле
$$\operatorname{ch}\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}} \tag{2}$$
$$\left(\cos\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}\right). \tag{3}$$

2.2. Измерение углов. Как и на плоскости Лобачевского, пучки прямых на плоскости $\widehat{H}$ можно отнести к трем типам. Пучок прямых плоскости $\widehat{H}$ назовем *гиперболическим* (*эллиптическим*), если его центр — внешняя (внутренняя) относительно абсолюта точка. *Параболическим* пучком назовем пучок с центром на абсолюте. Прямые, принадлежащие гиперболическому (эллиптическому) пучку, назовем *пересекающимися* (*расходящимися*) на $\widehat{H}$. Прямые параболического пучка назовем *параллельными*.

Пара прямых в зависимости от типов прямых и типа содержащего эти прямые пучка определяет на плоскости $\widehat{H}$ 15 различных объектов (15 типов углов между прямыми [3]), один из которых, полуплоскость, будет использован в данной работе. Определим его.

Пусть a и b — гиперболические расходящиеся прямые (рис. 1) с общей точкой K. На плоскости Лобачевского прямые a и b определяют две пары вертикальных углов. Плоскость $\widehat{H}$ разделена прямыми a и b на две связные части, каждая из которых принадлежит одному углу проективной плоскости P_2 между прямыми a и b. Назовем эти части *полуплоскостями* плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a и b. Существование полуплоскости на $\widehat{H}$ следует по малому принципу двойственности из существования отрезка эллиптической прямой (см., например, [16, 17]).

Поляра k точки K относительно абсолюта разделяет каждую полуплоскость между прямыми a и b на две связные части, которые назовем *квадрантами* плоскости $\widehat{H}$, определенными расходящимися прямыми a и b.

На рис. 1 серым цветом выделены два квадранта, принадлежащие одной полуплоскости между прямыми a и b.

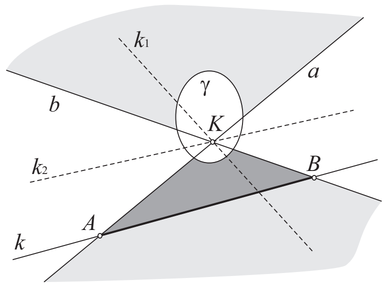

Рис. 1. Полуплоскости и квадранты плоскости $\widehat{H}$.

Прямая a (b) проходит через полюс K относительно абсолюта эллиптической прямой k, следовательно, ортогональна прямой k (в модели Кэли — Клейна под ортогональностью прямых на плоскости $\widehat{H}$, как и на плоскости Лобачевского, понимаем сопряженность прямых относительно абсолюта). Каждая ортогональная к прямой a (b) прямая проходит через полюс этой прямой относительно абсолюта. Поэтому ортогональная к каждой из прямых a, b прямая однозначно определена двумя точками, абсолютными полюсами прямых a, b. Это означает, что прямая k является единственным общим перпендикуляром расходящихся гиперболических прямых a, b.

Отрезок прямой k, высекаемый на ней прямыми a, b и принадлежащий заданной полуплоскости между прямыми a и b, назовем *основанием* данной полуплоскости и *основанием* квадрантов, составляющих данную полуплоскость.

На рис. 1 отрезок AB — основание выделенной полуплоскости между прямыми a и b.

Пусть a и b — прямые эллиптического пучка с центром в точке $K = a \cap b$. Через точку K проходят две мнимо сопряженные абсолютные касательные k_1, k_2. Сложное отношение (abk_1k_2) четверки прямых пучка с центром в точке K — инвариант всех преобразований группы G. Пусть

$$\upsilon = \left| \frac{1}{2i} \ln(abk_1k_2) \right|, \tag{4}$$

где функция $w = \ln z$ определена условием (1). Тогда $\upsilon \in (0; \pi/2]$.

Числа υ, $\pi - \upsilon$ назовем *мерами*, или *величинами*, полуплоскостей между расходящимися прямыми a и b [3].

В однородных координатах (X_i) прямых плоскости $\widehat{H}$ уравнение абсолюта, как совокупности всех касательных к линии γ, в репере R^* имеет вид

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0.$$

Квадратичная форма $\Phi = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2$ определяет на $\widehat{H}$ метрику в непараболических пучках прямых. Если расходящиеся прямые a, b имеют в репере R^* координаты соответственно $(a_1 : a_2 : a_3)$, $(b_1 : b_2 : b_3)$, то меру υ (4) угла между ними можно вычислить по формуле

$$\cos \upsilon = \pm \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}. \tag{5}$$

Координаты $(a_1 : a_2 : a_3)$ гиперболической (эллиптической) прямой a в репере R^* удовлетворяют неравенству

$$a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 > 0 \quad \bigl(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 < 0\bigr). \tag{6}$$

Следующая лемма характеризует зависимость между величиной полуплоскости и длиной ее основания.

Лемма. *Величина полуплоскости равна отношению длины ее основания к радиусу кривизны ρ плоскости $\widehat{H}$.*

Доказательство. Пусть ν — полуплоскость с основанием AB между расходящимися гиперболическими прямыми a, b, где $A \in a$, $B \in b$. Вершину A_3 репера R^* поместим в точку пересечения прямых a, b. Тогда по определению основания полуплоскости и свойству канонического репера R^* координатная прямая A_1A_2 совпадет с прямой AB. Вершину A_1 совместим с точкой A, а вершине B присвоим координаты $(t : 1 : 0)$, $t \in \mathbb{R}$. По формуле (3)

$$\cos^2 \frac{|AB|}{\rho} = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2. \tag{7}$$

Прямые $a = AA_3$, $b = BA_3$ имеют в репере R^* координаты $a\,(0 : 1 : 0)$, $b\,(1 : -t : 0)$. По формуле (5) величина υ полуплоскости ν удовлетворяет равенству

$$\cos^2 \upsilon = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2. \tag{8}$$

Вращению прямой a вокруг точки A_3 на острый угол соответствует сдвиг вдоль эллиптической прямой A_1A_2 на расстояние $|AB|$: $|AB| < \pi\rho/2$. Поэтому на основании равенств (7), (8) получаем

$$\upsilon = \frac{|AB|}{\rho}. \tag{9}$$

Лемма доказана.

3. Определение и каноническое уравнение гиперцикла

Определим гиперцикл метрически.

Множество всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от заданной эллиптической прямой l на данное действительное расстояние h, назовем *гиперциклом* с *базой* l и *высотой* h. Обозначение: $\omega(l, h)$ — гиперцикл с базой l и высотой h.

Полюс прямой l относительно абсолюта, несобственную для $\widehat{H}$ точку S, назовем *центром* гиперцикла.

На рис. 2(a) изображен гиперцикл ω с базой l, высотой h, центром S. Серой заливкой выделена внутренняя относительно ω часть плоскости $\widehat{H}$ с абсолютной овальной линией γ.

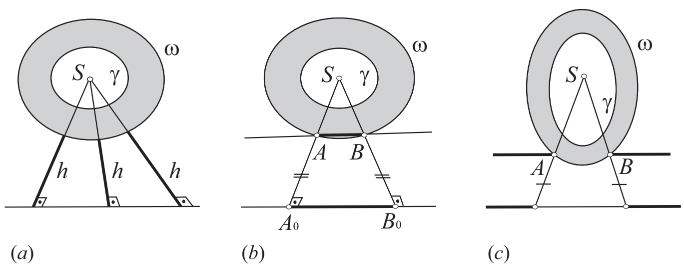

Рис. 2. (a) Гиперцикл $\omega(l, h)$, (b) эллиптические хорды AB гиперцикла $\omega(l, h)$, (c) гиперболическая хорда AB гиперцикла $\omega(l, h)$.

Каждая точка прямой l удалена от центра S гиперцикла $\omega(l,h)$ на расстояние $i\pi\rho/2$. Следовательно, гиперцикл является множеством всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от точки S на расстояние $r = i\pi\rho/2 - h$. Комплексное число r назовем *радиусом* гиперцикла ω.

Изображение гиперцикла плоскости $\widehat{H}$ как траектории движения точек на проективной плоскости с фундаментальным коническим сечением приведено в [18, с. 247, черт. 148], а термин «гиперцикл» в [18] использован на плоскости Лобачевского для линии, образованной множеством точек, удаленных на одинаковое расстояние от несобственной точки, т. е. в принятом нами смысле для линии плоскости $\widehat{H}$.

Найдем каноническое уравнение гиперцикла. Из семейства U^* всех канонических реперов первого типа плоскости $\widehat{H}$ выберем однопараметрическое подсемейство U_1^* таких реперов $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, координатная прямая A_1A_2 которых совпадает с базой l гиперцикла ω. Реперы семейства U_1^* назовем *присоединенными* реперами гиперцикла ω. Третья координатная вершина A_3 каждого присоединенного репера совпадает с центром S гиперцикла.

Применяя формулу (2), получим *каноническое* уравнение гиперцикла ω в реперах семейства U_1^*:

$$x_1^2 + x_2^2 - \operatorname{cth}^2\frac{h}{\rho}x_3^2 = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) определяет невырожденную линию второго порядка, имеющую две общие мнимо сопряженные касательные с абсолютом. По виду уравнения (10) определяем, что гиперцикл симметричен относительно своей базы, относительно своего центра и относительно каждой прямой, проходящей через его центр (такие прямые назовем *осями* гиперцикла).

Пусть A, B — некоторые точки гиперцикла ω. Если прямая AB гиперболическая, то отрезок AB (рис. 2(b)) назовем *гиперболической хордой* гиперцикла ω. Если прямая AB эллиптическая, то каждый из отрезков, заключенных между точками A, B (рис. 2(c)), назовем *эллиптической хордой* гиперцикла ω.

Хорду AB и полуплоскость между прямыми SA, SB, содержащую внутреннюю относительно ω часть прямой AB, назовем *соответствующими* друг другу. Полуплоскость, соответствующую хорде AB, будем также называть *центральным углом гиперцикла, опирающимся на хорду* AB, и обозначать через ASB.

Заметим, что только внутренняя относительно гиперцикла эллиптическая хорда принадлежит соответствующей ей полуплоскости.

4. Теорема о длине хорды гиперцикла

Теорема 1. *На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Длина a гиперболической хорды гиперцикла $\omega(l,h)$, соответствующей центральному углу величиной α, $\alpha \in (0;\pi)$, определена равенством*

$$\operatorname{ch}\frac{a}{\rho} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho} - 1. \tag{11}$$

2. *Длина a внутренней относительно гиперцикла $\omega(l,h)$ эллиптической хорды, соответствующей центральному углу величиной α, $\alpha \in (0;\pi)$, определена равенством*

$$\cos\frac{a}{\rho} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть центральный угол ASB величиной α опирается на внутреннюю относительно гиперцикла $\omega(l,h)$ (10) часть прямой AB. Из семейства U_1^* присоединенных реперов гиперцикла ω выберем репер R^*, координатная прямая A_1A_3 которого проходит через точку A. В репере R^* точку A можно задать координатами $\left(1:0:\operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right)$.

I. Пусть $\alpha \neq \pi/2$. Точке B присвоим координаты $(b_1:b_2:b_3)$. Тогда оси гиперцикла, проходящие через точки A и B, имеют координаты

$$AA_3(0:1:0), \quad BA_3(b_2:-b_1:0).$$

По построению $\widehat{AA_3B}=\alpha$, поэтому по формуле (5)

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\right)^2. \tag{13}$$

Координаты $(b_1:b_2:b_3)$ точки B удовлетворяют уравнению (10) гиперцикла ω:

$$b_1^2+b_2^2-\operatorname{cth}^2\frac{h}{\rho}b_3^2=0. \tag{14}$$

Из равенств (13), (14) находим координаты

$$\left(\cos\alpha:\delta\sin\alpha:\epsilon\operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right), \quad \delta=\pm1,\ \epsilon=\pm1, \tag{15}$$

четырех точек: B, B_1, B', B_1', где B_1 — точка, симметричная точке B относительно оси AA_3, B' и B_1' — точки, симметричные соответственно точкам B и B_1 относительно центра A_3 гиперцикла.

Определим значения чисел δ, ϵ в координатах (15) точки B.

При $\alpha\neq\pi/2$ прямая BB_1 не проходит через точку A_3 и, следовательно, числа δ в координатах точек B, B_1 различные. Предположим, что $\delta=1$, $\epsilon=\epsilon_1$ для точки B и $\delta=-1$, $\epsilon=\epsilon_2$ — для B_1. Тогда прямая BB_1 имеет координаты

$$\left((\epsilon_1+\epsilon_2)\sin\alpha:(\epsilon_1-\epsilon_2)\cos\alpha:-\sin2\alpha\operatorname{cth}\frac{h}{\rho}\right). \tag{16}$$

В силу симметричности точек B, B_1 относительно оси AA_3 гиперцикла точка $N=AA_3\cap BB_1$ внутренняя относительно ω. Вершина A_1 репера, принадлежащая оси AA_3, лежит на базе гиперцикла, следовательно, является внешней относительно гиперцикла. Поэтому A_1 не принадлежит прямой BB_1 и, стало быть, в координатах (16) $\epsilon_1=\epsilon_2$.

Координаты (15) точек B, B_1, B' и координаты прямой BB_1 можно записать в виде

$$\begin{gathered} B\left(\cos\alpha:\sin\alpha:\epsilon_1\operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right), \quad B_1\left(\cos\alpha:-\sin\alpha:\epsilon_1\operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right), \\ B'\left(\cos\alpha:\sin\alpha:-\epsilon_1\operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right), \quad BB_1\left(\epsilon_1\operatorname{th}\frac{h}{\rho}:0:-\cos\alpha\right). \end{gathered} \tag{17}$$

Пусть $K=BB_1\cap AB'$. При $\alpha<\pi/2$ $(\alpha>\pi/2)$ (рис. 3(a), (b)) пара точек B, B_1 разделяет (не разделяет) на гиперцикле ω [12] пару точек A, B'. Это означает, что точка K является внутренней (внешней) относительно ω. Точка N является внутренней относительно ω при любом значении α. Таким образом,

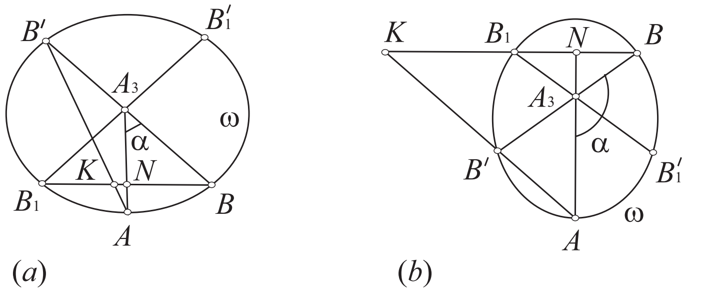

Рис. 3. Расположение точек B, B_1, N, K при (a) $\alpha < \pi/2$, (b) $\alpha > \pi/2$.

при $\alpha < \pi/2$ ($\alpha > \pi/2$) пара точек N, K не разделяет (разделяет) пару точек B, B_1, т. е.

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow (NKBB_1) > 0 \quad \left(\alpha > \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow (NKBB_1) < 0\right). \tag{18}$$

Применяя координаты (17), находим в репере R^* координаты точек

$$N\left(\cos\alpha : 0 : \epsilon_1 \operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right),$$

$$K\left(\cos\alpha(\cos\alpha+\epsilon_1) : \sin\alpha(\cos\alpha-\epsilon_1) : \epsilon_1 \operatorname{th}\frac{h}{\rho}(\cos\alpha+\epsilon_1)\right)$$

и число $(NKBB_1)$:

$$(NKBB_1) = \frac{\epsilon_1}{\cos\alpha}. \tag{19}$$

Условия (18), (19) при любом значении α определяют равенство $\epsilon_1 = 1$.

Итак, точка B имеет в репере R^* координаты $\left(\cos\alpha : \sin\alpha : \operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right)$.

Координаты

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}\frac{h}{\rho} : \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}\frac{h}{\rho} : -\cos\frac{\alpha}{2}\right) \tag{20}$$

гиперболической (эллиптической) прямой AB согласно соответствующему условию (6) удовлетворяют неравенству

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho} - 1 > 0 \quad \left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho} - 1 < 0\right). \tag{21}$$

По формулам (2), (3) для гиперболической и соответственно эллиптической прямой AB находим

$$\operatorname{ch}^2\frac{|AB|}{\rho} = \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho} - 1\right)^2, \tag{22}$$

$$\cos^2\frac{|AB|}{\rho} = \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho} - 1\right)^2. \tag{23}$$

Если прямая AB (20) гиперболическая, то на основании условия (22)

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho} - 1 > 0.$$

Поэтому для действительного числа a, длины гиперболического отрезка AB, справедлива формула (11).

Для эллиптической прямой AB проведем следующие рассуждения. Пусть величина α_0, $\alpha_0 \in (0;\pi)$, определена равенством

$$\sin\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{h}{\rho}}. \tag{24}$$

Тогда для эллиптической хорды AB гиперцикла ω, соответствующей центральному углу величиной α_0, в силу равенства (23)

$$\cos\frac{|AB|}{\rho} = 0,$$

следовательно, $|AB| = \pi\rho/2$. Таким образом, α_0 — тот угол, при котором внутренняя и внешняя относительно ω хорды эллиптической прямой AB равны. Согласно равенству (24) $\alpha_0 < \pi/2$.

Далее рассмотрим два случая: $\alpha < \alpha_0$ и $\alpha > \alpha_0$.

Пусть $\alpha < \alpha_0$ $(\alpha > \alpha_0)$. Тогда

$$\sin\frac{\alpha}{2} < \sin\frac{\alpha_0}{2} \quad \left(\sin\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\alpha_0}{2}\right).$$

Учитывая равенство (24), для $\alpha < \alpha_0$ $(\alpha > \alpha_0)$ получаем

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ch}^2\,\frac{h}{\rho} - 1 < 0 \quad \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ch}^2\,\frac{h}{\rho} - 1 > 0\right). \tag{25}$$

Покажем, что при $\alpha < \alpha_0$ $(\alpha > \alpha_0)$ имеет место неравенство

$$\frac{a}{\rho} < \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{a}{\rho} > \frac{\pi}{2}\right). \tag{26}$$

Выберем на плоскости $\widehat{H}$ некоторый квадрант β с основанием A_1A_2 (рис. 4). В силу автополярности координатного трехвершинника $A_1A_2A_3$ относительно абсолюта величина квадранта β равна $\pi/2$. Построим поляру d точки A относительно абсолюта. По свойству взаимности поляритета прямая d пройдет через координатную вершину A_2, полюс прямой AA_3 относительно γ. Расстояние от точки A до любой собственной для $\widehat{H}$ точки прямой d равно $\pi\rho/2$.

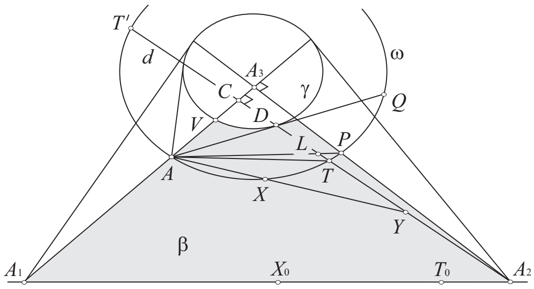

Рис. 4. Хорды гиперцикла.

Точку пересечения с абсолютом квазиотрезка A_1A_3, содержащего точку A, обозначим через V. По построению

$$(AVA_1A_3) > 0. \tag{27}$$

В поляритете относительно абсолюта точки A, V, A_1, A_3 переходят соответственно в прямые d, A_2V, A_2A_3, A_2A_1. Поэтому на основании неравенства (27)

$$(d(A_2V)(A_2A_3)(A_2A_1)) > 0$$

и, следовательно, $(CVA_3A_1) > 0$, где $C = d \cap A_1A_3$.

Таким образом, точка C лежит на луче A_3V плоскости Лобачевского.

Пусть точка $D = d \cap \gamma$ принадлежит замыканию квадранта β, тогда луч A_2D принадлежит β. Точку пересечения луча A_2D с гиперциклом ω обозначим через T, ее ортогональную проекцию на прямую A_1A_2 — через T_0, вторую точку пересечения прямой d с гиперциклом ω — через T', а вторую точку пересечения параболической прямой AD с ω — через Q. Точка T принадлежит поляре d точки A, следовательно, $AT = \pi\rho/2$. Поэтому хорда AT соответствует центральному углу AA_3T величиной α_0.

Выберем ту дугу AQ гиперцикла ω, которая пересекает квадрант β по дуге AP, принадлежащей β, где $P = A_2A_3 \cap \omega$. Точка T разбивает дугу AQ гиперцикла ω на две дуги: AT и TQ.

Если точка X принадлежит дуге AT (TQ), то ее ортогональная проекция X_0 на прямую A_1A_2 принадлежит (не принадлежит) отрезку A_1T_0 основания A_1A_2 квадранта β. Поэтому по лемме из разд. 2 величина α центрального угла AA_3X, опирающегося на дугу AX, полностью принадлежащую дуге AT, меньше (больше) величины α_0 угла AA_3T.

Условие принадлежности точки X, где $X \in AQ$, дуге AT (TQ) равносильно условию: пара точек A, X не разделяет (разделяет) на ω [8] пару точек T, T' в системе точек A, X, T, T'. Поэтому в случае $X \in AT$ $(X \in TQ)$ точка $Y = AX \cap TT'$ является внешней (внутренней) относительно ω. Таким образом, при $X \in AT$ $(X \in TQ)$ внутренний относительно ω отрезок AX (AY) принадлежит отрезку AY (AX).

Рис. 4 соответствует случаю $X \in AT$.

Учитывая, что $AY = AT = \pi\rho/2$, получаем, что при условии $X \in AT$ $(X \in TQ)$ длина внутреннего относительно гиперцикла ω отрезка прямой AX меньше (больше) $\pi\rho/2$.

Таким образом, при $\alpha < \alpha_0$ $(\alpha > \alpha_0)$ выполняется первое (второе) неравенство из (24).

На основании выражения (23) и неравенств (25), (26) при $\alpha \neq \pi/2$ для длины a внутренней относительно гиперцикла ω эллиптической хорды AB справедлива формула (12).

II. В частном случае, при $\alpha = \pi/2$, точки в парах B, B_1' и B_1, B' совпадут. Точку B поместим на прямую A_2A_3 и присвоим ей в репере R^* координаты $\left(0 : 1 : \operatorname{th}\frac{h}{\rho}\right)$. По формулам (2), (3) для точек A, B гиперболической и соответственно эллиптической прямой выполняются равенства

$$\operatorname{ch}\frac{|AB|}{\rho} = \operatorname{sh}^2\frac{h}{\rho}, \quad \cos^2\frac{|AB|}{\rho} = \operatorname{sh}^4\frac{h}{\rho}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям п. I доказательства теоремы, проведенным для $\alpha \neq \pi/2$, для $\alpha = \pi/2 > \alpha_0$ получим формулы

$$\operatorname{ch}\frac{a}{\rho} = \operatorname{sh}^2\frac{h}{\rho}, \quad \cos\frac{a}{\rho} = -\operatorname{sh}^2\frac{h}{\rho}, \tag{28}$$

определяющие длину a соответственно гиперболической и внутренней эллиптической хорд гиперцикла ω.

На рис. 4 случаю $\alpha = \pi/2$ соответствует хорда AP гиперцикла ω: $AP > AL = \pi\rho/2$.

При $\alpha = \pi/2$ формулы (11), (12) принимают вид соответствующих формул (28).

Теорема доказана.

5. Следствия теоремы о длине хорды гиперцикла

1. При $\alpha = 2\pi/n$ формулы (11), (12) определяют длину ребра вписанного в гиперцикл $\omega(l, h)$ правильного n-угольника [15] гиперболического, эллиптического типов соответственно.

2. В истории пятого постулата Евклида особую роль играет четырехугольник Саккери (или четырехугольник Хайяма) — двупрямоугольник с равными боковыми ребрами, с помощью которого была опровергнута «гипотеза тупого угла». На плоскости $\widehat{H}$ можно построить аналогичные четырехугольники, причем различных типов. Теорема 1 позволяет доказать свойство эллиптического четырехугольника Саккери плоскости $\widehat{H}$, которое в дальнейшем будет использовано при построении разбиений данной плоскости. Сформулируем и докажем это свойство в теореме 4. Предварительно определим эллиптический четырехугольник Саккери плоскости $\widehat{H}$ и докажем теоремы 2, 3.

Пусть A, B — точки эллиптической прямой m; A_0, B_0 — ортогональные проекции точек A, B на эллиптическую прямую l, отличную от прямой m. Простую замкнутую двустороннюю ломаную ABB_0A_0 назовем *эллиптическим двупрямоугольником* плоскости $\widehat{H}$, звенья ломаной, отрезки, циклически соединяющие точки A, B, B_0, A_0, — *ребрами* двупрямоугольника ABB_0A_0, ребро A_0B_0, ортогональное смежным с ним ребрам, — *основанием*, а ребра, смежные с основанием, — *боковыми ребрами* данного двупрямоугольника.

Эллиптический двупрямоугольник с равными боковыми ребрами будем называть *эллиптическим четырехугольником Саккери* плоскости $\widehat{H}$.

Теорема 2. *На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ действительного радиуса кривизны ρ длина $\bar{a}$ внешней относительно гиперцикла $\omega(l, h)$ эллиптической хорды, соответствующей центральному углу величиной α, $\alpha \in (0; \pi)$, определена равенством*

$$\cos\frac{\bar{a}}{\rho} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{h}{\rho} - 1. \tag{29}$$

Доказательство. Длина всей эллиптической прямой плоскости $\widehat{H}$ равна $\pi\rho$. Согласно формуле (12) для длины $\bar{a}$ ($\bar{a} = \pi\rho - a$) внешней относительно ω эллиптической хорды AB выполняется равенство (29), что и требовалось доказать.

Теорема 3. *На плоскости $\widehat{H}$ длина внутренней (внешней) относительно гиперцикла эллиптической хорды больше (меньше) длины ее ортогональной проекции на базу гиперцикла.*

Доказательство. Пусть некоторая внутренняя (внешняя) относительно гиперцикла $\omega(l,h)$ эллиптическая хорда AB соответствует центральному углу величиной α, а отрезок A_0B_0 является ортогональной проекцией этой хорды на прямую l. Проецирующие прямые, ортогональные прямой l, проходят через центр гиперцикла, следовательно, отрезок A_0B_0 является основанием полуплоскости, определенной осями гиперцикла ω, проходящими через точки A, B. По лемме разд. 2 длина a_0 отрезка A_0B_0 равна $\alpha\rho$. Поэтому

$$\cos\frac{a_0}{\rho} = \cos\alpha. \tag{30}$$

По теореме 1 длина a внутренней эллиптической хорды AB гиперцикла ω определена формулой (12). Согласно равенствам (12), (30) для $a \in (0;\pi\rho)$, $a_0 \in (0;\pi\rho)$, $\rho > 0$, получаем условие

$$\cos\frac{a}{\rho} < \cos\frac{a_0}{\rho}.$$

Следовательно,

$$a > a_0. \tag{31}$$

Внешняя относительно ω хорда AB длиной $\bar{a}$ ($\bar{a} = \pi\rho - a$) ортогонально проецируется в дополнительный к A_0B_0 отрезок прямой l, длина $\bar{a}_0$ которого определена равенством $\bar{a}_0 = \pi\rho - a_0$. Согласно условию (31) выполняется неравенство $\bar{a} < \bar{a}_0$. Теорема доказана.

Теорема 4. *В эллиптическом четырехугольнике Саккери плоскости $\widehat{H}$ длина противолежащего основанию ребра больше длины основания.*

Доказательство. Пусть ABB_0A_0 — эллиптический четырехугольник Саккери с основанием A_0B_0 на прямой l (рис. 2(b)). По определению четырехугольника Саккери ребра AA_0, BB_0 ортогональны прямой l и имеют равные длины. Значит, точки A, B удалены от прямой l на расстояние h, где $h = |AA_0| = |BB_0|$. Следовательно, точки A, B принадлежат гиперциклу ω с базой l и высотой h. База гиперцикла принадлежит полностью внешней относительно данного гиперцикла области плоскости $\widehat{H}$. Поэтому точка пересечения прямых AB и A_0B_0 внешняя относительно ω. Следовательно, в простой замкнутой ломаной ABB_0A_0 ребро ξ между точками A, B является внутренней хордой гиперцикла ω. Точки A, B на прямой l определяют два отрезка. Обозначим через ζ ортогональную проекцию ребра ξ на l, дополнение отрезка ζ до прямой l — через $\bar{\zeta}$. Предположим, что основанием данного эллиптического четырехугольника Саккери является отрезок $\bar{\zeta}$. Тогда ломаная ABB_0A_0, составленная из отрезков ξ, $\bar{\zeta}$, AA_0, BB_0, гомеоморфна прямой l. Пришли к противоречию, так как по определению эллиптического четырехугольника Саккери ломаная ABB_0A_0 двусторонняя. Таким образом, основанием эллиптического четырехугольника Саккери является проекция ζ ребра ξ на прямую l. По теореме 3 длина отрезка ζ больше длины отрезка ξ, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969.

2. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955.

3. *Ромакина Л. Н.* Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 393–407.

4. *Sitter W. de.* On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis // Proc. Royal Acad. Amsterdam. 1917. V. 19, N 2. P. 1217–1225.

5. *Coxeter H. S. M.* A geometrical background for de Sitter's world // Amer. Math. Mon. 1943. V. 50, N 4. P. 217–228.

6. *Ромакина Л. Н.* Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. мат. журн. 2013. Т. 13, № 1. С. 127–147.

7. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.

8. *Розенфельд Б. А., Замаховский М. П.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. М.: МЦНМО, 2003.

9. *Ромакина Л. Н.* Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сб. науч. тр. Механика. Математика. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 2010. Т. 12. С. 69–72.

10. *Ромакина Л. Н.* Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n-контуром // Теория относительности, гравитация и геометрия / Междунар. конф. «Petrov 2010 anniversary symposium on general relativity and gravitation» (Казань, 1–6 ноября 2010 г.) Казань: Казанск. ун-т, 2010. С. 227–232.

11. *Ромакина Л. Н.* Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 9. С. 83–116.

12. *Ромакина Л. Н.* Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, № 3. С. 14–26.

13. *Ромакина Л. Н.* Конечные замкнутые 5-контуры расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, № 1. С. 38–49.

14. *Ромакина Л. Н.* Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 37–44.

15. *Romakina L. N., Besshaposhnikova L. S.* Regular polygons, inscribed in hypercycles of a hyperbolic plane of positive curvature // «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях»: Тез. докл. междунар. конф., посвященной 50-летию механико-математического факультета. 17–22 апреля 2011 г. Харьков: Изд-во ФЛП А. П. Вировец; Изд. группа «Апостроф», 2011. V. 12. P. 135.

16. *Ромакина Л. Н.* Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Саратов: ООО Изд-во «Науч. книга», 2008.

17. *Ромакина Л. Н.* Определение лучей, отрезков и квазиотрезков различного типа прямых при построении классических неевклидовых геометрий на моделях Кэли — Клейна // Межд. конф. «62-е Герценовские чтения»: Сб. науч. тр. 2009. С. 103–109.

18. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. М.; Л: ОНТИ, 1936.

Статья поступила 20 ноября 2011 г.

Ромакина Людмила Николаевна
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410028
romakinaln@mail.ru