Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.554

АЛГЕБРЫ ЛИ В СИММЕТРИЧЕСКИХ МОНОИДАЛЬНЫХ КАТЕГОРИЯХ

Д. А. Румынин

Аннотация. Изучаются алгебры, определенные тождествами в симметрических моноидальных категориях, в частности алгебры Ли. Примеры таких алгебр появляются при изучении инвариантов узлов и инвариантов Виттена — Розанского. Основным результатом является доказательство гипотезы Вестбури для К3-поверхности: существует гомоморфизм из универсальной простой алгебры Вожеля в алгебру Ли, описывающую инварианты Виттена — Розанского К3-поверхности. Строится язык, необходимый для обсуждения и решения этой проблемы, и формулируется девять новых задач.

Ключевые слова: тензорная категория, алгебра Ли, К3-поверхность, инварианты Виттена — Розанского.

В 1996 г. Делинь выдвинул гипотезу о серии исключительных алгебр Ли [1]. Вместе с гипотезой он предложил возможный подход к ее решению: должен существовать некоторый объект, специализирующийся во все исключительные алгебры Ли. В 1999 г. под влиянием этой гипотезы Вожель предложил такой объект [2]. Этот объект, названный универсальной алгеброй Вожеля $\mathfrak{g}_V$, специализируется не только в исключительные, но и во все простые (комплексные конечномерные) алгебры Ли, и даже в некоторые супералгебры Ли. Изучению алгебры Вожеля посвящен ряд современных исследований [3–5].

Целью данной работы является описание еще одной специализации $\mathfrak{g}_V$. В частной беседе Вестбури спросил автора, специализируется ли $\mathfrak{g}_V$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}_X$, построенную Капрановым [6] по неприводимому голоморфному симплектическому многообразию X с целью интерпретации инвариантов Виттена — Розанского [7]. *Гипотезой Вестбури* мы называем утверждение о существовании такой специализации и доказываем его для К3-поверхностей. В общем случае гипотеза Вестбури остается открытой.

Значительная часть данной работы посвящена развитию языка, на котором можно обсуждать такие задачи. При этом мы не стремимся к наибольшей общности и не применяем язык операд, использованный Вайнтробом и Хиничем [8], предпочитая более элементарный язык в духе Савона [9], надеясь, что это привлечет более широкую аудиторию и окажется полезным в ряде других исследований.

Начнем с краткого описания содержания статьи. Разд. 1 включает все необходимые сведения о категориях. В разд. 2 обсуждаем алгебры в категориях, а также размышляем над применением этих алгебр в теории тождеств. В разд. 3

Работа выполнена при финансовой поддержке Института Макса Планка (Бонн) и фонда «Династия».

изучаем алгебры Ли в категориях, формулируем три понятия простоты и строим универсальную простую алгебру Вожеля $\mathfrak{g}_V$. Разд. 4 посвящен алгебрам Ли, связанным с инвариантами Виттена — Розанского, а также доказательству гипотезы Вестбури для K3-поверхностей.

Автор искренне признателен Б. Вестбури за формулировку гипотезы и его интерес к работе и А. Кузнецову за продуктивные дискуссии о стабильности касательного расслоения на K3-поверхности. Автор также благодарит А. Баранова, В. Каца, Д. Панюшева, А. Рослого и Д. Савона за интересные обсуждения и полезную информацию.

1. Категории

1.1. Тензорные категории. *Тензорная категория над коммутативным кольцом* $\mathbb{K}$ определяется как $\mathbb{K}$-линейная[1)] симметрическая моноидальная категория $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbb{I}, \mathbf{l}, \mathbf{r}, \mathbf{c})$, где $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ — бифунктор тензорного произведения, $\mathbf{a}_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ — преобразование ассоциативности, $\mathbf{c}_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ — симметрическое преобразование коммутативности, $\mathbb{I} \in \mathscr{C}$ — единичный объект моноидальной категории, $\mathbf{l}_A : \mathbb{I} \otimes A \to A$ и $\mathbf{r}_A : A \otimes \mathbb{I} \to A$ — левое и правое преобразования унитарности. Все эти структуры согласованы: тензорное произведение должно быть $\mathbb{K}$-билинейным на морфизмах, а естественный гомоморфизм $\mathbb{K} \to \mathrm{end}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}) = \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, \mathbb{I})$ — изоморфизмом колец. По мере возможностей следуем терминологии Джояля и Стрита [10], но, к сожалению, это не всегда возможно. Например, их «тензорные категории» — это просто моноидальные категории, в то время как наши тензорные категории $\mathbb{K}$-линейные и симметрические.

Обратим внимание читателя на тот факт, что от $\mathscr{C}$ не требуется быть абелевой или аддитивной. Конечно, аддитивности легко добиться, пополнив категорию относительно конечных прямых сумм и нулевого объекта, но неабелевость является важным отличием от других «тензорных категорий», появляющихся в литературе. В этом смысле наши тензорные категории близки к категориям Вайнтроба и Хинича [8], за одним исключением: мы дополнительно предполагаем, что $\mathbb{K} \to \mathrm{end}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I})$ — изоморфизм. Это предположение легко обойти.

Предложение 1. *Рассмотрим симметрическую моноидальную аддитивную категорию* $\mathscr{C} = (\mathscr{C}, \otimes, \mathbf{a}, \mathbb{I}, \mathbf{l}, \mathbf{r}, \mathbf{c})$. *Тогда кольцо* $\mathbb{K}_{\mathscr{C}} = \mathrm{end}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I})$ *коммутативно, а категория* $\mathscr{C}$ *является тензорной категорией над* $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$.

Доказательство. Коммутативность кольца $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$ следует из рассуждения Хилтона — Экмана [11, предложение 6.2]. Каждое из множеств $\mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ обладает структурой $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$-$\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$-бимодуля с левым действием

$$\mathrm{end}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}) \times \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{hom}_C(\mathbb{I} \otimes X, \mathbb{I} \otimes Y) \cong \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$$

и правым действием

$$\mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \times \mathrm{end}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}) \to \mathrm{hom}_C(X \otimes \mathbb{I}, Y \otimes \mathbb{I}) \cong \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X, Y).$$

Действия эти совпадают, поскольку для каждых $\alpha \in \mathrm{end}_{\mathscr{C}}(\mathbb{I})$, $f \in \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$

1) Множества морфизмов должны быть $\mathbb{K}$-модулями, а композиции $\mathbb{K}$-билинейными, например, в случае $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ все это означает, что категория предаддитивна.

как αf, так и $f\alpha$ считываются с диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathbf{l}_X^{-1}"] \arrow[d, "="] & \mathbb{I}\otimes X \arrow[r, "\alpha\otimes f"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathbb{I},X}"'] & \mathbb{I}\otimes Y \arrow[r, "\mathbf{l}_Y"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathbb{I},Y}"] & Y \arrow[d, "="] \\
X \arrow[r, "\mathbf{r}_X^{-1}"] & X\otimes\mathbb{I} \arrow[r, "f\otimes\alpha"'] & Y\otimes\mathbb{I} \arrow[r, "\mathbf{r}_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

как две композиции из верхнего левого угла в правый нижний угол. Диаграмма коммутативна: коммутативность двух крайних квадратов — известный факт [10, предложение 2.1], в то время как коммутативность центрального квадрата следует из естественности преобразования коммутативности $\mathbf{c}$. Значит, $\alpha f = f\alpha$. Закончим доказательство, отметив, что $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$-билинейность композиций очевидна. $\square$

Тензорные категории повсеместны в современной математике, поэтому не будем сейчас приводить примеров — они появятся в процессе дальнейшего изложения.

1.2. Тензорные степени в тензорных категориях. Высшие тензорные степени объекта A некоторой тензорной категории над $\mathbb{K}$ определяются рекурсивно: $A^{\otimes 0} := \mathbb{I}$ и $A^{\otimes n} := A^{\otimes(n-1)} \otimes A$. Симметрическая группа S_n действует на объекте $A^{\otimes n}$ в том смысле, что имеется гомоморфизм полугрупп

$$S_n \to \mathrm{end}_{\mathscr{C}}(A^{\otimes n}, A^{\otimes n}), \quad \sigma \mapsto \tilde{\sigma}_A,$$

определяемый так. Используя цепь преобразований ассоциативности

$$\gamma_i : A^{\otimes n} \to A^{\otimes(i-1)} \otimes ((A\otimes A) \otimes A^{\otimes(n-i-1)}),$$

определим действие на транспозициях через

$$\widetilde{(i, i+1)}_A := \gamma_i^{-1} \circ (I \otimes (\mathbf{c}_{A,A}) \otimes I) \circ \gamma_i$$

и распространим его на всю группу: возможность продолжения легко следует из аксиом симметрической моноидальной категории. Таким образом, для каждой пары объектов A, B категории $\mathscr{C}$ на множестве $\hom_{\mathscr{C}}(A^{\otimes n}, B)$ возникает структура $\mathbb{K}S_n$-модуля.

1.3. Расширение кольца скаляров. По тензорной категории $\mathscr{C}$ над $\mathbb{K}$ и гомоморфизму коммутативных колец $\mathbb{F} \to \mathbb{K}$ и $\mathbb{F} \to \mathbb{K}'$ построим новую тензорную категорию $\mathscr{C}' = \mathscr{C} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}'$ над $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}'$. Она обладает тем же классом объектов, что и $\mathscr{C}$, но новыми множествами морфизмов $\hom_{\mathscr{C}'}(X, Y) := \hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}'$. Естественным образом определяются композиции $(f \otimes \alpha) \circ (g \otimes \beta) = fg \otimes \alpha\beta$, а все естественные преобразования переносятся на $\mathscr{C}'$. Все доказательства прозрачны: они остаются заинтересованному читателю в качестве упражнения.

1.4. Тензорные функторы. Рассмотрим тензорные категории $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ над коммутативным кольцом $\mathbb{K}$. Определим *тензорный функтор* $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ как тройку, состоящую из $\mathbb{K}$-линейного функтора $F_1 : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, естественного изоморфизма $F_{2,A,B} : FA \otimes FB \to F(A\otimes B)$ и изоморфизма $F_3 : \mathbb{I}_{\mathscr{D}} \to F\mathbb{I}_{\mathscr{C}}$. Вся эта структура должна удовлетворять известным аксиомам [10].

2. Алгебры

2.1. Алгебры. Можно обсуждать алгебры в категории $\mathscr{C}$ как над $\mathbb{K}$-линейной операдой, так и над $\mathbb{K}$-линейным пропом[2)] [8]. Напомним, что $\mathbb{K}$-*линейный проп* — это тензорная категория $\mathscr{P}$ над $\mathbb{K}$, удовлетворяющая следующим пяти условиям:

(1) объекты $\mathscr{P}$ образуют моноид $(\mathbb{N}, +)$, т. е. $n \otimes m = n + m$;

(2) $\mathscr{P}$ строгая, в этом контексте это значит, что $\mathbf{a}_{n,m,k} = I_{n+m+k}$, $\mathbf{l}_n = I_n$ и $\mathbf{r}_n = I_n$;

(3) для каждого объекта $n > 0$ задано вложение полугрупп $S_n \hookrightarrow \hom_{\mathscr{P}}(n, n)$, $\pi \mapsto \tilde{\pi}$;

(4) тензорное произведение любых $\pi \in S_n$, $\sigma \in S_m$ оказывается перестановкой $\tau \in S_{n+m}$:

$$\tilde{\pi} \otimes \tilde{\sigma} = \tilde{\tau}, \qquad \text{где } \tau(k) = \begin{cases} \pi(k), & \text{если } k \leq n, \\ \sigma(k-n) + n, & \text{если } k > n; \end{cases}$$

(5) преобразование коммутативности задается сдвигом $\mathbf{sh}_{n,m} \in S_{n+m}$:

$$\mathbf{c}_{n,m} = \widetilde{\mathbf{sh}}_{n,m}, \qquad \text{где } \mathbf{sh}_{n,m}(k) = \begin{cases} k + m, & \text{если } k \leq n, \\ k - n, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Алгебра в категории $\mathscr{C}$ над пропом $\mathscr{P}$ — это тензорный функтор $\mathscr{P} \to \mathscr{C}$. Такой уровень общности иногда бесполезен, потому что требует более или менее явного построения пропа. Выберем более элементарный подход. Под *сигнатурой* понимаем тройку $I = (I, h, t)$, где I — множество операций, а $h, t : I \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — функции валентности операций, так что, грубо говоря, операция $i \in I$ действует на $t(i)$ переменных, принимая при этом $h(i)$ значений. Определим *алгебру сигнатуры* I как тройку $(\mathscr{C}, A, (m_i, i \in I))$, где $\mathscr{C}$ — тензорная категория над коммутативным кольцом $\mathbb{K}$, A — объект категории $\mathscr{C}$, а $m_i \in \hom_{\mathscr{C}}(A^{\otimes t(i)}, A^{\otimes h(i)})$ — семейство морфизмов. Для фиксированных $\mathbb{K}$ или $\mathscr{C}$ разумно говорить о $\mathbb{K}$-алгебрах или $\mathscr{C}$-алгебрах. Сигнатуру удобно задавать списком, перечисляя сначала количество элементов в I, а затем все пары $(t(i), h(i))$, подразумевая, что $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, т. е. k-я пара задает валентности k-й операции m_k.

Поясним связь между этими двумя понятиями алгебры. Проп $\mathscr{P}$ допускает порождающее множество морфизмов $I = \{i \mid i \in \hom_{\mathscr{P}}(h(i), t(i))\}$. Алгебра $F : \mathscr{P} \to \mathscr{C}$ над пропом $\mathscr{P}$ задает алгебру $(\mathscr{C}, F_1(1), (F_1(i), i \in I))$ сигнатуры $I = (I, h, t)$, определенной порождающим множеством. В обратном направлении алгебра $(\mathscr{C}, A, (m_i, i \in I))$ сигнатуры $I = (I, h, t)$ может задать, а может и не задать алгебру над $\mathscr{P}$. Она всегда задает алгебру над свободным пропом $\mathscr{P}(I)$. Исходный проп $\mathscr{P}$ является фактором свободного пропа $\mathscr{P}(I)$, и для задания алгебры над $\mathscr{P}$ наша алгебра должна удовлетворять некоторым аксиомам, точная природа которых определена пропом $\mathscr{P}$. Таким образом, проп обеспечивает неявный способ задания аксиом алгебры, но зачастую это более удобно делать в явном виде.

В частном случае алгебры A сигнатуры $[1 : (2, 1)]$ аксиомы являются полилинейными тождествами. Рассмотрим свободную неассоциативную алгебру $F = \mathbb{K}\{x_1, \ldots\}$ от счетного числа переменных и ее подмножество F_n полилинейных элементов степени n, линейных по определенным переменным, скажем

[2)] PROP — аббревиатура английского «product and permutation category», введенная в употребление МакЛэйном.

$x_1, \ldots, x_n$. Естественное отображение «подстановки»

$$\psi_A : F_n \to \hom_{\mathscr{C}}(A^{\otimes n}, A)$$

— гомоморфизм $\mathbb{K}$-модулей, определенный рекурсивно на мономах:

$$\psi(x_1) = I_A, \quad \psi(x_1 x_2) = m_1,$$

$$\psi(v(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) w(x_{\sigma(k+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})) = m_1 \circ (\psi(v) \otimes \psi(w)) \circ \gamma \circ \widetilde{\sigma^{-1}}_A,$$

где $v \in F_k,\ w \in F_{n-k},\ \sigma \in S_n$ и $\gamma : A^{\otimes n} \to A^{\otimes k} \otimes A^{\otimes (n-k)}$ — композиция преобразований ассоциативности, затем распространенный на линейные комбинации через $\psi\bigl(\sum\limits_i \alpha_i v_i\bigr) = \sum\limits_i \alpha_i \psi(v_i)$. Говорим, что A *удовлетворяет полилинейному тождеству* f, если $\psi_A(f) = 0$.

Определим *алгебру Ли* как алгебру сигнатуры $[1 : (2, 1)]$, удовлетворяющую тождествам Якоби и антикоммутативности:

$$(x_1 x_2) x_3 + (x_2 x_3) x_1 + (x_3 x_1) x_2 \quad \text{и} \quad x_1 x_2 + x_2 x_1,$$

которые переписываются в терминах морфизмов в тензорной категории как

$$m_1 \circ (m_1 \otimes I) \circ (\tilde{1} + \widetilde{(2,3,1)} + \widetilde{(3,1,2)}) = 0, \quad m_1 \circ (\tilde{1} + \widetilde{(1,2)}) = 0.$$

Если $\mathscr{C}$ — категория $\mathbb{K}$-модулей и $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$, то приходим к обычному определению алгебры Ли над $\mathbb{K}$. Если $\frac{1}{2} \notin \mathbb{K}$, то антикоммутативность слабая: требуем $xy + yx = 0$, но из этого не следует, что $x^2 = 0$.

Определим *ассоциативную алгебру* как алгебру сигнатуры $[2 : (2, 1), (0, 1)]$, удовлетворяющую тождеству ассоциативности $(x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$, а также аксиомам левой и правой единиц. Эти аксиомы не записываются в терминах отображения ψ_A, поэтому прибегаем к терминам морфизмов в тензорной категории:

$$m_1 \circ (m_1 \otimes I) = m_1 \circ (I \otimes m_1) \circ \mathbf{a}_{A,A,A}, \quad m_1 \circ (m_2 \otimes I) = \mathbf{l}_A, \quad m_1 \circ (I \otimes m_2) = \mathbf{r}_A.$$

Определим *метрический объект* как алгебру сигнатуры $[2 : (0, 2), (2, 0)]$ такую, что обе операции коммутативны: $m_2 = m_2 \circ \mathbf{c}_{A,A}$, $m_1 = \mathbf{c}_{A,A} \circ m_1$, а A является двойственным объектом к A в смысле моноидальных категорий, иными словами, выполнено тождество

$$I_A = \mathbf{r}_A \circ (I_A \otimes m_2) \circ \mathbf{a}_{A,A,A} \circ (m_1 \otimes I_A) \circ \mathbf{l}_A^{-1}.$$

Заметим, что в этом случае спаривание m_2 «невырожденное». Если $(A^*, u \in \hom(A \otimes A^*, \mathbb{I}), c \in \hom(\mathbb{I}, A^* \otimes A))$ — какой-то другой двойственный объект, то морфизм

$$A \xrightarrow{\mathbf{l}_A^{-1}} \mathbb{I} \otimes A \xrightarrow{c \otimes I} (A^* \otimes A) \otimes A \xrightarrow{\mathbf{a}_{A^*,A,A}} A^* \otimes (A \otimes A) \xrightarrow{I \otimes m_2} A^* \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{\mathbf{r}_{A^*}} A^*$$

является каноническим изоморфизмом. В п. 2.2 определим казимировы алгебры Ли и метрические алгебры Ли, следуя Вайнтробу и Хиничу [8].

2.2. Представления. *Представлением* алгебры Ли $(\mathscr{C}, \mathfrak{g}, m)$ назовем пару (M, ρ), где M является объектом категории $\mathscr{C}$, а ρ принадлежит $\hom_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g} \otimes M, M)$ и удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\rho \circ (m \otimes I_M) = \rho \circ (I_{\mathfrak{g}} \otimes \rho) \circ \mathbf{a}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g},M} - \rho \circ (I_{\mathfrak{g}} \otimes \rho) \circ \mathbf{a}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g},M} \circ (\mathbf{c}_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}} \otimes I_M) \in \hom_{\mathscr{C}}((\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \otimes M, M).$$

Аналогично обычному случаю алгебр Ли в векторных пространствах представления образуют тензорную категорию $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})$. Морфизмы $\hom_{\mathfrak{g}}(M, N)$ — это те и только те морфизмы из $\hom_{\mathscr{C}}(M, N)$, которые коммутируют с действием $\mathfrak{g}$. Тензорным произведением в новой категории является тензорное произведение в $\mathscr{C}$ со стандартным действием:

$$\rho_{M\otimes N} = (\rho_M \otimes I_N)\circ \mathbf{a}^{-1}_{\mathfrak{g},M,N} + (I_M\otimes \rho_N)\circ \mathbf{a}_{M,\mathfrak{g},N}\circ(\mathbf{c}_{\mathfrak{g},M}\otimes I_M)\circ \mathbf{a}^{-1}_{\mathfrak{g},M,N} \\ \in \hom_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g}\otimes(M\otimes N), M\otimes N).$$

Все естественные преобразования наследуются из $\mathscr{C}$. Сведем вместе все необходимые факты в следующем предложении, доказательство которого очевидно и оставлено заинтересованному читателю в качестве упражнения.

Предложение 2. *Рассмотрим $\mathscr{C}$-алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Категория $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})$ является тензорной категорией над кольцом $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$ с единичным объектом $\mathbb{I}_{\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})} = \mathbb{I}_{\mathscr{C}}$, где действие нулевое. Лиево умножение алгебры $\mathfrak{g}$ является морфизмом в $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})$, так что $\mathfrak{g}$ оказывается $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})$-алгеброй Ли.*

Естественно поинтересоваться, какие тензорные категории получаются итерацией этой конструкции: можно рассматривать представления $\mathfrak{g}$ в $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})$ и т. д. Ответ на этот вопрос довольно прозаичен: легко проверить, что при условии существования конечных прямых сумм в $\mathscr{C}$ категория представлений $\mathfrak{g}$ в $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})$ канонически эквивалентна категории представлений полупрямого произведения $\mathfrak{g}\ltimes\mathfrak{g}_a$ в $\mathscr{C}$, где $\mathfrak{g}_a$ — присоединенное представление $\mathfrak{g}$, рассматриваемое как алгебра с нулевым лиевым умножением.

Определим *казимирову алгебру Ли* как такую $\mathscr{C}$-алгебру сигнатуры $[2 : (2,1),(0,2)]$, что m_1 задает структуру алгебры Ли, а m_2 является коммутативным морфизмом в категории $\mathfrak{g}$-модулей.

Аналогично определим *метрическую алгебру Ли* как $\mathscr{C}$-алгебру сигнатуры $[3 : (2,1),(0,2),(2,0)]$ такую, что $(\mathfrak{g}, m_1)$ является $\mathscr{C}$-алгеброй Ли, а $(\mathfrak{g}, m_2, m_3)$ — метрическим объектом в $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{g})$.

2.3. Гомоморфизмы. Естественным образом возникают два разных понятия гомоморфизма алгебр одной сигнатуры. Определим *гомоморфизм из* $(\mathscr{C}, A, m_i)$ *в* $(\mathscr{C}, B, m'_i)$ как морфизм $\varphi\in\hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, коммутирующий со всеми операциями алгебры, другими словами, требуется, чтобы все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes h(i)} & \xrightarrow{\varphi^{\otimes h(i)}} & B^{\otimes h(i)} \\ {\scriptstyle m_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m'_i} \\ A^{\otimes t(i)} & \xrightarrow[\varphi^{\otimes t(i)}]{} & B^{\otimes t(i)} \end{array}$$

были коммутативны для всевозможных i.

Во избежание недоразумений используем термин «специализация» для второго понятия гомоморфизма. Определим *специализацию из* $(\mathscr{C}, A, m_i)$ *в* $(\mathscr{D}, B, m'_i)$ как тройку $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, в которой $\psi_1 : \mathbb{K}_{\mathscr{C}} \to \mathbb{K}_{\mathscr{D}}$ — гомоморфизм колец, $\psi_2 : \mathscr{C}\otimes_{\mathbb{K}_{\mathscr{C}}}\mathbb{K}_D \to \mathscr{D}$ — тензорный функтор, а ψ_3 — гомоморфизм из $\psi_2(A)$ в B. Специализация, для которой ψ_3 — изоморфизм, называется *изоспециализацией.*

Отметим, что можно рассматривать три разных типа гомоморфизмов (или специализаций) между метрическими алгебрами Ли: гомоморфизм алгебр Ли, гомоморфизм казимировых алгебр Ли и гомоморфизм метрических алгебр Ли. Разница между ними лишь в операциях, которые они сохраняют.

2.4. Тождества алгебр в категориях. Многообразия алгебр — тема активных исследований в алгебре [12]. Стоит ли изучать многообразия алгебр в категориях? В этом пункте проведем некоторые первоначальные наблюдения и сформулируем несколько вопросов.

На первый взгляд, по крайней мере для $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{K}$, многообразия алгебр в категории мало чем отличаются от многообразий обычных алгебр. Действительно, легко проверить, что тождества $\mathscr{C}$-алгебры образуют множество полилинейных элементов некоторого T-идеала (так называются идеалы, замкнутые относительно подстановок) свободной алгебры $\mathbb{K}\{x_1, \dots\}$. Например, следующая теорема об энгелевых тождествах немедленно следует из той же самой теоремы для обычных алгебр Ли [13, теорема 6.4.1].

Теорема 3. *Рассмотрим тензорную категорию $\mathscr{C}$ над $\mathbb{Q}$-алгеброй $\mathbb{K}$. Если $\mathscr{C}$-алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет линеаризованному тождеству Энгеля, то $\mathfrak{g}$ удовлетворяет и линеаризованной нильпотентности.*

Несмотря на это, представляется интересным понять естественные примеры $\mathscr{C}$-алгебр и, в частности, исследовать их тождества. Например, жесткий объект X тензорной категории $\mathscr{C}$ обладает *внутренней алгеброй эндоморфизмов* $E_X = X \otimes X^*$, которая является ассоциативной $\mathscr{C}$-алгеброй. Тождества E_X в свободной ассоциативной алгебре $\mathbb{K}\langle x_1, x_2 \dots\rangle$ формируют T-идеал $I(E_X) \triangleleft \mathbb{K}\langle x_1, x_2 \dots\rangle$, который интересно изучить [12].

Проблема 1. *Найти минимальную степень элементов $I(E_X)$.*

Жесткий объект X в категории векторных пространств — это n-мерное векторное пространство, и в этом случае E_X является алгеброй матриц размера $n \times n$, а минимальная степень ее ассоциативного тождества равна $2n$ согласно теореме Амицура — Левицкого [14]. Если $\mathscr{C}$ — категория векторных суперпространств (определим их как суперрасслоения на точке, см. разд. 4.1), то X должно быть (n, k)-мерным векторным суперпространством, а E_X — матричной супералгеброй, минимальная степень ассоциативного тождества которых неизвестна. Есть, однако, гипотеза, что она равна $2(nk + n + k) - \min\{n, k\}$ [15].

Одной из причин интереса к тождествам матричных супералгебр является тот факт, что в нулевой характеристике они порождают все первичные многообразия ассоциативных алгебр [16]. Насколько наивно ожидать, что алгебры E_X порождают все многообразия?

Проблема 2. *Найти пример коммутативной $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{K}$ и такого T-идеала в $\mathbb{K}\langle x_1, \dots\rangle$, который не является идеалом тождеств E_X никакого жесткого объекта X никакой тензорной категории $\mathscr{C}$ над $\mathbb{K}$.*

Завершим этот раздел объяснением категорного аналога грассмановой оболочки, используемой для изучения тождеств супералгебр. Определим *функтор глобальных сечений* $\Gamma : \mathscr{C} \to \mod(\mathbb{K}_{\mathscr{C}})$ как $\Gamma(A) := \hom_{\mathscr{C}}(\mathbb{I}, A)$. Глобальные сечения $\Gamma(A)$ алгебры A в категории $\mathscr{C}$ являются $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$-алгеброй в категории $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$-модулей. Следующее предложение очевидно.

Предложение 4. *Рассмотрим тензорную категорию $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$-алгебру A и ассоциативную коммутативную $\mathscr{C}$-алгебру C. Тогда $\Gamma(A \otimes C)$ является $\mathrm{mod}(\mathbb{K}_{\mathscr{C}})$-алгеброй той же сигнатуры, как и A, а все тождества A выполняются в $\Gamma(A \otimes C)$.*

Например, алгебра Грассмана $G_\infty := \mathbb{K}\langle x_1, x_2 \dots\rangle/(x_ix_j + x_jx_i)$ от счетного числа порождающих является ассоциативной коммутативной алгеброй в категории векторных суперпространств $\mathscr{C}$. Глобальные сечения $\Gamma(A \otimes G_\infty)$ называются *грассмановой оболочкой супералгебры* A. Тождества $\Gamma(A\otimes G_\infty)$ совпадают с тождествами A в $\mathscr{C}$. Возможно ли провести этот прием в произвольной категории?

Проблема 3. *Рассмотрим кополную (т. е. замкнутую относительно произвольных прямых сумм) тензорную категорию $\mathscr{C}$ с расщепленными идемпотентами*[3]*. Существует ли такая коммутативная ассоциативная алгебра G в $\mathscr{C}$, что для любой $\mathscr{C}$-алгебры A все тождества $\Gamma(A \otimes G)$ выполнены в A?*

3. Простые алгебры Ли

3.1. Квазипростые алгебры Ли. Следуя Вожелю [17, 2], назовем алгебру Ли $(\mathscr{C}, \mathfrak{g}, m_1)$ *квазипростой*, если структура алгебры Ли расширяется до структуры метрической алгебры Ли $(\mathscr{C}, \mathfrak{g}, m_1, m_2, m_3)$, а естественное отображение $\mathbb{K}_\mathscr{C} \to \hom_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ является изоморфизмом. В п. 3.2 обсудим, как это понятие связано с обычной простотой.

3.2. Простые алгебры Ли. В абелевой тензорной категории $\mathscr{C}$ возможно говорить о подобъектах, фактор-объектах, ядрах и т. д. обычным образом. В частности, есть понятие простой алгебры Ли. Но абелевость категории вовсе не требуется для определения простоты, хотя и неясно, насколько интересно это понятие. Также неясно, насколько интересна такая простота в других классах алгебр.

Напомним, что морфизм $f \in \hom_\mathscr{C}(X, Y)$ называется *мономорфизмом*, если он сокращается слева, другими словами, если из $fa = fb$ следует $a = b$ для всех $a, b \in \hom_\mathscr{C}(W, X)$. Назовем $\mathscr{C}$-алгебру Ли $\mathfrak{g}$ *простой*, если $\mathfrak{g} \not\cong 0$ (отметим, что если нулевой объект существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма) и каждый гомоморфизм алгебр Ли $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ или является мономорфизмом, или нулевой. Обратим внимание на небольшое отличие от обычных простых алгебр Ли: стандартное определение традиционно исключает из простых одномерную алгебру Ли, в то время как наше определение этого не делает.

В общем случае нет никакой связи между простыми и квазипростыми алгебрами Ли. Рассмотрим коммутативное кольцо $\mathbb{K}$, $1/2 \in \mathbb{K}$, не являющееся полем. В нем есть собственный идеал I. Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ (в категории $\mathbb{K}$-модулей) квазипроста, потому что форма следа $m_2(X\otimes Y) := \mathrm{Tr}(XY)$ задает метрическую структуру, коформа которой

$$m_3(\alpha) := \alpha\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\frac12&0\\0&-\frac12\end{pmatrix}\right)$$

не проста, так как фактор-гомоморфизм $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}/I)$ не является ни нулевым, ни мономорфизмом.

Приведем еще один пример квазипростой непростой алгебры Ли. Рассмотрим множество X простых конечномерных комплексных алгебр Ли и его групповую коалгебру $C = \mathbb{C}X$. Напомним, что C-комодуль — это X-градуированное

[3] Каждый идемпотент $e \in \hom_\mathscr{C}(X, X)$ является проекцией $X \xrightarrow{\cong} Y \oplus Z \to Y \hookrightarrow X$.

векторное пространство $M = \bigoplus_{x\in X} M_x$. C-комодули образуют тензорную категорию $\mathscr{C}$ со стандартным тензорным копроизведением в качестве категорного тензорного произведения: $M \otimes N := \bigoplus_{x\in X} (M_x \otimes_{\mathbb{C}} N_x)$. Алгебра $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\mathfrak{h}\in X} \mathfrak{h}$ является метрической $\mathscr{C}$-алгеброй Ли относительно прямых сумм умножений, форм и коформ

$$\bigoplus_{\mathfrak{h}\in X} m_{\mathfrak{h}} : \oplus(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}) \to \oplus\mathfrak{h}, \qquad \bigoplus_{\mathfrak{h}\in X} m_{\mathfrak{h}} : \oplus(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}) \to C, \qquad \bigoplus_{\mathfrak{h}\in X} m_{\mathfrak{h}} : C \to \oplus(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}).$$

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ квазипроста, но если в X не меньше двух элементов, то не проста, потому что каждая градуированная компонента $\mathfrak{h}$ является собственным идеалом алгебры $\mathfrak{g}$ и задает фактор-гомоморфизм.

С другой стороны, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ является простой алгеброй Ли в категории вещественных векторных пространств, но она не квазипроста, потому что $\hom_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \neq \mathbb{R}$. Тем не менее в некоторых случаях между простотой и квазипростотой возникают взаимоотношения.

Теорема 5. *Рассмотрим категорию $\mathscr{C}$ векторных пространств над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики. В ней квазипростые $\mathscr{C}$-алгебры Ли — это в точности конечномерные простые*[4] *алгебры Ли.*

Доказательство. Конечномерная простая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ квазипроста, потому что форма Киллинга невырожденная, а $\mathbb{K} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ является изоморфизмом в силу леммы Шура и алгебраической замкнутости $\mathbb{K}$.

Обратно, пространство симметрических инвариантных форм $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ является подпространством $(\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \cong \hom_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathbb{K}$, поэтому одномерно. Простота $\mathfrak{g}$ немедленно вытекает из теоремы Баджо и Бенаяди [18]. $\square$

Было бы интересно найти еще какие-нибудь категории, где выполняется аналог теоремы 5 или квазипростые алгебры Ли поддаются классификации. Сформулируем два точных вопроса.

Проблема 4. *Рассмотрим аффинную групповую схему G над полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и ее категорию рациональных G-модулей $\mathscr{C}$. Описать простые и квазипростые $\mathscr{C}$-алгебры Ли.*

Чтобы немного разобраться с этим вопросом, рассмотрим абсолютно неприводимый конечномерный G-модуль V как $\mathscr{C}$-алгебру Ли с нулевым умножением. Согласно нашим определениям V всегда проста, а квазипростота V эквивалентна тому, что $V \cong V^*$.

Проблема 5. *Рассмотрим категорию $\mathscr{C}$ векторных суперпространств*[5] *над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Является ли квазипростая $\mathscr{C}$-алгебра Ли конечномерной простой супералгеброй Ли?*

Конечномерные простые супералгебры Ли классифицированы Кацем [19]. Простые алгебры Ли и простые супералгебры типов $A(m,n)$, $n \neq m$, $B(m,n)$, $C(n)$, $D(m,n)$, $m-n\neq 1$, $F(4)$ и $G(3)$ обладают невырожденными формами Киллинга [19, теорема 1]. Следовательно, все они являются квазипростыми $\mathscr{C}$-алгебрами Ли. Оставшиеся простые супералгебры Ли типов $A(n,n)$, $D(n+1,n)$,

[4] Наше определение простой алгебры включает в себя одномерную алгебру.

[5] Она эквивалентна категории рациональных C_2-модулей как моноидальная, но не как тензорная категория.

$P(n)$, $Q(n)$ и $D(2,1,\alpha)$, а также простые супералгебры картановского типа имеют нулевую форму Киллинга [19, предложение 2.4.1], хотя на них может быть задана и другая инвариантная форма, отличная от формы Киллинга, как, насколько нам известно, происходит в типах $Q(n)$ и $D(2,1,\alpha)$. Приведем некоторые наблюдения по поводу поставленного вопроса.

Предложение 6. *Рассмотрим квазипростую алгебру Ли* $\mathfrak{g}$ *в категории векторных суперпространств над любым полем* $\mathbb{K}$. *Тогда*

(1) $\mathfrak{g}$ *совершенна,*

(2) *центр* $\mathfrak{g}$ *равен нулю,*

(3) *любой минимальный идеал в* $\mathfrak{g}$ *абелев.*

Доказательство. Рассмотрим минимальный идеал I. Его ортогональное дополнение $I^{\perp}$ также является идеалом. Стало быть, пересечение $I \cap I^{\perp}$ равно либо нулю, либо всему I. Если $I \cap I^{\perp} = 0$, то $\mathfrak{g} = I \oplus I^{\perp}$, что ведет к нетривиальному идемпотенту в $\mathbb{K} = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$. Следовательно, $I \cap I^{\perp} = I$, и $I \subseteq I^{\perp}$. Это означает, что $([x,y],a) = (x,[y,a]) = 0$ для всех $x, y \in I$, $a \in \mathfrak{g}$. Поскольку форма невырожденная, $[x,y] = 0$, и I абелев.

Заметим, что $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp} = \{a \in \mathfrak{g} \mid \forall x, y \in \mathfrak{g}\ ([x,y],a) = (x,[y,a]) = 0\} = \{a \in \mathfrak{g} \mid \forall y \in \mathfrak{g}\ [y,a] = 0\} = Z(\mathfrak{g})$. Отсюда немедленно заключаем, что $\mathfrak{g}$ совершенен, а $Z(\mathfrak{g}) = 0$. Действительно, в противном случае существует ненулевая билинейная форма α на $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Расширим ее до формы $\tilde{\alpha}$ на $\mathfrak{g}$. Форма $\tilde{\alpha}$ инвариантная ($\tilde{\alpha}([x,y],z) = 0 = \tilde{\alpha}(x,[y,z])$), вырожденная и ненулевая. Это противоречит одномерности $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^{*\mathfrak{g}}$. $\square$

Предложение 6 вместе с критериями Картана [20, 4.3, 5.1] дают альтернативное доказательство теоремы 5. Рассмотрим $\mathfrak{g}$ как супералгебру с нулевой нечетной частью, в частности, предложение 6 применимо. Так как $\mathfrak{g}$ неразрешима, ее форма Киллинга не равна нулю. Стало быть, форма Киллинга отличается от метрики умножением на скаляр, что влечет невырожденность формы Киллинга. По критерию Картана $\mathfrak{g}$ полупроста, а ее простота следует из $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}$. Этот аргумент не работает для супералгебр из-за отсутствия критериев Картана.

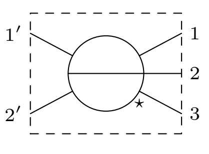
3.3. Универсальная метрическая алгебра Ли. Универсальная метрическая алгебра Ли возникает в теории инвариантов Васильева [21, 2]. Соответствующая симметрическая моноидальная категория $\mathscr{C}$ — это проп с $\mathbb{Q}$-векторным пространством диаграмм Якоби (известным как пространство иероглифов) в качестве множества морфизмов $\hom_{\mathscr{C}}(m,n)$ [21]. Напомним, что (m,n)-диаграмма Якоби — это компактная кривая X такая, что

(1) границей X является множество $\{1, 2, \ldots, m, 1', 2', \ldots, n'\}$,

(2) X допускает конечное число трехвалентных особых точек, иными словами, точек x, обладающих такой окрестностью U, что $U \setminus \{x\}$ гомеоморфна несвязному объединению трех прямых,

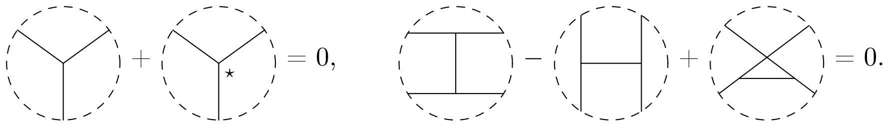
(3) для каждой трехвалентной особой точки x задан циклический порядок на связных компонентах $U \setminus \{x\}$.

Вот пример диаграммы Якоби:



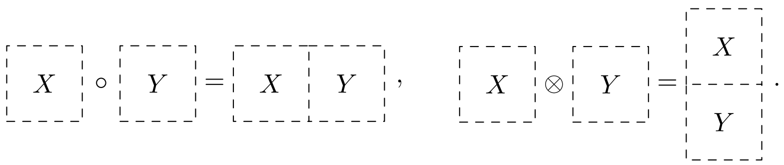
.

Внешняя граница, обозначенная пунктиром, не имеет особого значения. На диаграмме есть пять трехвалентных особых точек, на четырех из них выбран стандартный (против часовой стрелки) порядок, а на последней, отмеченной звездой $\star$, — противоположный (по часовой стрелке) порядок. Точка трансверсального пересечения в середине не имеет никакого значения: на самом деле это две различные точки, случайно совпавшие после иммерсии в плоскость (или, попросту, рисунка). Векторное пространство диаграмм Якоби $\hom_{\mathscr{C}}(m,n)$ определяется как фактор-пространство $\mathbb{Q}$-линейной оболочки всех (m,n)-диаграмм Якоби относительно AS- и IHX-соотношений:

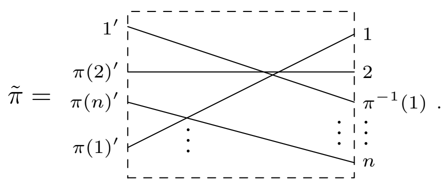


Пунктирные окружности ограничивают окрестности в диаграммах Якоби X_1, X_2 для первого соотношения и Y_1, Y_2, Y_3 — для второго, так что диаграммы в каждом соотношении идентичны, за исключением этих окрестностей. Соотношения читаются как $X_1 + X_2 = 0$ и $Y_1 - Y_2 + Y_3 = 0$.

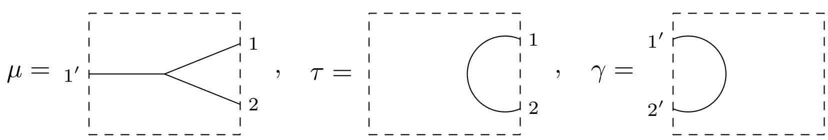
Композиция и тензорное произведение морфизмов определяются методом «укладки коробок»:



Иначе говоря, тензорное произведение морфизмов — это несвязное объединение, а композиция — склейка соответствующих частей границы. Симметрическая группа S_n вкладывается в $\hom(n,n)$ таким образом, что $\tilde{\pi}$ является объединением n интервалов, связывающих k с $\pi(k)'$:



$\mathscr{C}$-алгебра $\mathfrak{g}_M = (1, \mu, \tau, \gamma)$ с операциями



является метрической алгеброй Ли [21, предложение 2.4]. Читатель легко убедится в этом. Тождества Якоби и антикоммутативность следуют из AS- и IHX-соотношений. Аксиомы метрического объекта, а также инвариантность формы и коформы легко видны на иллюстрации. Более тонким является свойство универсальности этой метрической алгебры Ли [21, предложение 2.5], которое формулируем отдельным предложением.

Предложение 7. *Для любых коммутативной $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{K}$ и метрической $\mathbb{K}$-алгебры Ли $(\mathscr{D}, \mathfrak{g}, m, t, c)$ существует единственная специализация $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \mathfrak{g}_M \to \mathfrak{g}$ такая, что*

(1) $\psi_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}$ — *структура $\mathbb{Q}$-алгебры на $\mathbb{K}$,*

(2) $\psi_2 = (\psi_{21}, \psi_{22}, \psi_{23}) : \mathscr{C} \otimes \mathbb{K} \to \mathscr{D}$ — *тензорный функтор, определенный на объектах через $\psi_{21}(n) = \mathfrak{g}^{\otimes n}$ и заданный единственным образом на морфизмах следующими условиями:*

(a) $\psi_{21}(\mu) = m$,

(b) $\psi_{21}(\tau) = t$,

(c) $\psi_{21}(\gamma) = c$,

(d) $\psi_{22,n,m} : \mathfrak{g}^{\otimes n} \otimes \mathfrak{g}^{\otimes m} \to \mathfrak{g}^{\otimes (n+m)}$ — *композиция преобразований ассоциативности в $\mathscr{D}$,*

(e) $\psi_{23} = I_{\mathbb{I}}$ — *тождественное отображение объекта $\mathbb{I}_{\mathscr{D}}$,*

(3) $\psi_3 = I_{\mathfrak{g}}$ — *тождественное отображение объекта $\mathfrak{g}$.*

Специализация ψ — пример изоспециализации. Ее частью является функтор $\psi_2 : \mathscr{C} \otimes \mathbb{K} \to \mathscr{D}$, превращающий $\mathfrak{g}$ в алгебру над пропом $\mathscr{C} \otimes \mathbb{K}$. На языке пропов можно считать $\mathscr{C} \otimes \mathbb{K}$ универсальной метрической алгеброй Ли над $\mathbb{K}$, поскольку $\mathscr{C} \otimes \mathbb{K}$-алгебры, по-существу, то же, что и метрические $\mathbb{K}$-алгебры Ли [21, следствие 2.2].

В оставшейся части раздела будет показано, что $\mathfrak{g}_M$ не является квазипростой. Рассмотрим $\hom^k_{\mathscr{C}}(n, m)$, $\mathbb{Q}$-линейную оболочку всех тех диаграмм из $\hom_{\mathscr{C}}(n, m)$, у которых в точности k связных компонент. Поскольку AS- и IHX-соотношения не меняют числа связных компонент, пространства $\hom^k_{\mathscr{C}}(n, m)$ для различных k пересекаются по нулю, а все пространство морфизмов $\hom_{\mathscr{C}}(n, m)$ распадается в прямую сумму

$$\hom_{\mathscr{C}}(n, m) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \hom^k_{\mathscr{C}}(n, m).$$

Стоит обратить внимание на то, что $\hom^0_{\mathscr{C}}(n, m) \neq 0$ в том и только в том случае, если $n = m = 0$: это ненулевое пространство натянуто на пустую диаграмму. Тензорные произведения сохраняют эту градуировку, но композиции, вообще говоря, нет. Перечислим основные свойства этой градуировки.

Предложение 8. *Выполнены следующие утверждения:*

(1) $\hom^k_{\mathscr{C}}(n, m) \otimes \hom^s_{\mathscr{C}}(n, m) \subseteq \hom^{k+s}_{\mathscr{C}}(n, m)$ *для всех k, s, n, m;*

(2) $\hom^k_{\mathscr{C}}(0, m) \circ \hom^s_{\mathscr{C}}(n, 0) \subseteq \hom^{k+s}_{\mathscr{C}}(n, m)$ *для всех k, s, n, m;*

(3) *относительно вышеописанной градуировки кольцо скаляров $\mathbb{K}_{\mathscr{C}} = \hom_{\mathscr{C}}(0, 0)$ является градуированной алгеброй, изоморфной симметрической алгебре пространства $\hom^1_{\mathscr{C}}(0, 0)$;*

(4) *относительно вышеописанной градуировки каждое пространство $\hom_{\mathscr{C}}(n, m)$ является градуированным $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$-модулем.*

Доказательство. Тензорным произведением морфизмов является их несвязное объединение. Стало быть, число компонент тензорного произведения — это сумма чисел компонент множителей, что доказывает (1). Аналогичное рассуждение дает (2). Утверждение (4) непосредственно вытекает из (1).

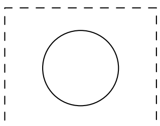
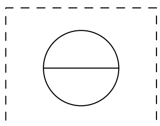
Из утверждения (1) следует, что $\hom_{\mathscr{C}}(0, 0)$ является градуированной коммутативной алгеброй. Таким образом, существует естественный гомоморфизм $\varphi : S\big(\hom^1_{\mathscr{C}}(0, 0)\big) \to \hom_{\mathscr{C}}(0, 0)$ градуированных алгебр, который сюръективен, потому что любая диаграмма является произведением своих компонент.

Покажем, что φ инъективнен. Рассмотрим всевозможные связные диаграммы Якоби без границы $x_1, x_2 \dots$ до наложения AS- и IHX-соотношений. Существуют естественные гомоморфизмы градуированных алгебр φ_1, φ_2 такие, что диаграмма

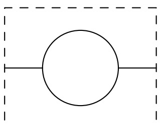
$$\begin{tikzcd} S(\mathrm{hom}^1_{\mathscr{C}}(0,0)) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(0,0) \\ \mathbb{Q}[x_1, x_2 \dots] \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Ядром гомоморфизма φ_1 является идеал I_1, порожденный всеми выражениями $y_1 + y_2$, возникающими из AS-соотношений, и $y_1 - y_2 + y_3$, возникающими из IHX-соотношений, в которых диаграммы y_1, y_2 и y_3 связны. Аналогично ядром гомоморфизма φ_2 является идеал I_2, порожденный всеми выражениями $z_1 + z_2$, возникающими из AS-соотношений, и $z_1 - z_2 + z_3$, возникающими из IHX-соотношений, в которых диаграммы z_1, z_2 и z_3 уже не обязательно связны. Оба соотношения оперируют на одной компоненте, т. е. если $z_1 + z_2$ является AS-соотношением, то $z_1 = x_1 z$ и $z_2 = x_2 z$, где x_i является компонентой, подверженной AS-соотношению, а z — объединением остальных компонент. Стало быть, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2)z \in I_1$. Аналогично $z_1 - z_2 + z_3 = (x_1 - x_2 + x_3)z \in I_1$ для всех IHX-соотношений. Отсюда следует, что $I_1 = I_2$ и гомоморфизм φ инъективен. $\square$

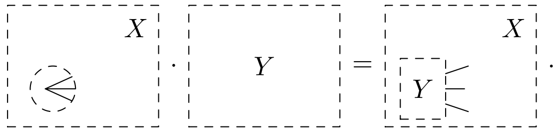
Поскольку связные диаграммы Якоби порождают векторное пространство $\mathrm{hom}^1_{\mathscr{C}}(0,0)$, среди них можно выбрать базис $y_1, y_2, \dots$. Отсюда следует, что кольцо скаляров $\mathbb{K}_{\mathscr{C}} = \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(0,0)$ изоморфно алгебре многочленов $\mathbb{Q}[y_1, y_2 \dots]$ от выбранных связных диаграмм, например,

$\delta =$  , $\theta =$  $, \dots \in \mathrm{hom}^1_{\mathscr{C}}(0,0),$

в то время как $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_M}(\mathfrak{g}_M) = \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(1,1)$ — градуированный $\mathbb{K}_{\mathscr{C}}$-модуль. Гомоморфизм $\mathbb{K}_{\mathscr{C}} \to \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(1,1)$ — действие на единицу $v \mapsto v \otimes I_1$. Поскольку $I_1 \in \mathrm{hom}^1_{\mathscr{C}}(1,1)$ и $\mathrm{hom}^0_{\mathscr{C}}(0,0) = \mathbb{Q}$, любая связная нетождественная диаграмма из $\mathrm{hom}^1_{\mathscr{C}}(1,1)$ не лежит в образе отображения $\mathbb{K}_{\mathscr{C}} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{g}_M}(\mathfrak{g}_M)$. В частности, следующий элемент ϕ не лежит в образе:

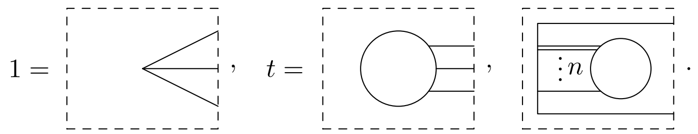
$\varphi =$  $\in \mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(1,1).$

3.4. Кольцо Вожеля Λ. Симметрическая группа S_n действует на векторном пространстве $\mathrm{hom}^k_{\mathscr{C}}(n,0)$ перестановкой «входных» граничных точек. Определим кольцо Вожеля Λ как векторное пространство косых инвариантов $\mathrm{hom}^1_{\mathscr{C}}(3,0)^{S_3,\varepsilon}$ относительно характера знака перестановки ε группы S_3. Умножения в Λ определяется вставкой одной диаграммы в любую трехвалентную особую точку второй диаграммы:



Заметим, что связность и косоинвариантность элементов $\hom^1_{\mathscr{C}}(3,0)$ играют ключевую роль, обеспечивая корректность определения произведения. Зафиксировав трехвалентную особую точку, имеем шесть способов вставить туда диаграмму из $\hom^1_{\mathscr{C}}(3,0)$. Косоинвариантность устраняет эту зависимость. Если две особые точки связаны ребром, то нетрудно убедиться, что вставка в каждую из этих точек дает один и тот же результат. Стало быть, связность устраняет зависимость вставки от выбора особой точки. Все это доказано Вожелем [17, предложение 3.2]. Там же установлено, что вставка определяет структуру Λ-модуля на линейной оболочке связных диаграмм с непустым множеством трехвалентных особых точек $\hom^s_{\mathscr{C}}(m,n) \subseteq \hom^1_{\mathscr{C}}(m,n)$.

В то время как ассоциативность кольца Λ очевидна, коммутативность требует тонкого рассуждения [17, предложение 4.8]. Отметим, что Вожель работает над произвольным коммутативным кольцом коэффициентов R и доказывает тождество $12xy = 12yx$ в Λ_R. В нашем случае $1/12 \in R = \mathbb{Q}$ и, следовательно, кольцо Λ коммутативно. Приведем некоторые элементы кольца Λ:



Отметим, что $x_1 = 2t$ и $x_2 = t^2$ [2].

На кольце Λ имеется естественная градуировка: Λ_n является линейной оболочкой диаграмм с ровно $2n+1$ трехвалентными особыми точками. Ряд Пуанкаре градуированного кольца Λ неизвестен.

Кольцо Λ тесно связано с некоторой подалгеброй $\widetilde{\Lambda} = \mathbb{Q}[\sigma_1] \oplus \omega\mathbb{Q}[z_1,z_2,z_3]^{S_3}$ алгебры симметрических многочленов $\mathbb{Q}[z_1,z_2,z_3]^{S_3}$, где $\omega = (\sigma_1+z_1)(\sigma_1+z_2)(\sigma_1+z_3) = \sigma_3 + \sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^3$, а σ_1, σ_2, σ_3 — элементарные симметрические функции. Кнейсслер находит функции $\chi_n \in \widetilde{\Lambda}$, определенные рекурсивно:

$$\chi_0 = 0, \quad \chi_1 = 2\sigma_1, \quad \chi_2 = \sigma_1^2,$$

$$\chi_{n+3} = \sigma_1\chi_{n+2} - \sigma_2\chi_{n+1} + \sigma_3\chi_n + \frac{\sigma_2\sigma_1^{n+1}}{2} - \frac{\sigma_3\sigma_1^n}{2} - \sigma_3(2\sigma_1)^n,$$

которые задают гомоморфизм градуированных алгебр [22]

$$\varphi : \widetilde{\Lambda} \to \Lambda, \quad \varphi(\chi_n) = x_n.$$

Вожель строит многочлен $\pi \in \widetilde{\Lambda}$ с $\varphi(\pi) = 0$ и выдвигает гипотезу, что $\widetilde{\Lambda}/(\pi) \cong \Lambda$ [17].

На простой комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеется каноническая инвариантная невырожденная форма (форма Киллинга) $K : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, что определяет каноническую изоспециализацию $\psi : \mathfrak{g}_M \to \mathfrak{g}$. В свою очередь, эта изоспециализация задает канонический гомоморфизм колец $\Theta_{\mathfrak{g}} : \Lambda \to \mathbb{C}$, который разумно назвать *характером Вожеля алгебры* $\mathfrak{g}$. Поясним, откуда он берется [17, 2]. Элемент $X \in \Lambda$ задает $\mathfrak{g}$-инвариантное отображение $\psi_2(X) : \wedge^3\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, а пространство таких отображений одномерно, откуда следует, что $\psi_2(X) = \alpha\psi_2(1_\Lambda)$ для некоторого комплексного числа α.

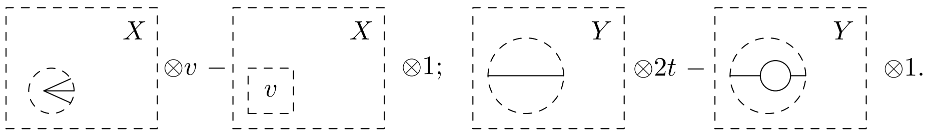
Предложение 9. *В обозначениях предыдущего раздела отображение $\Theta_{\mathfrak{g}}(X) = \alpha$ является гомоморфизмом колец.*

Доказательство. Линейность отображения $\Theta_{\mathfrak{g}}$ очевидна. Пусть $\widetilde{Y} \in \hom_{\mathscr{C}}(3,3)$ — результат удаления из Y особой вершины вместе с окрестностью. Тогда произведения в кольце Вожеля представляются композициями $XY = X \circ \widetilde{Y}$, $Y = 1_\Lambda \circ \widetilde{Y}$, откуда следует, что

$$\psi_2(XY) = \psi_2(X) \circ \psi_2(\widetilde{Y}) = \Theta_{\mathfrak{g}}(X)\psi_2(1_\Lambda) \circ \psi_2(\widetilde{Y}) = \Theta_{\mathfrak{g}}(X)\psi_2(Y)$$

и окончательно $\Theta_{\mathfrak{g}}(XY) = \Theta_{\mathfrak{g}}(X)\Theta_{\mathfrak{g}}(Y)$. $\square$

3.5. Универсальная алгебра Вожеля. Вожель нашел способ соединить характер $\Theta_{\mathfrak{g}} : \Lambda \to \mathscr{C}$ и и изоспециализацию алгебры Ли $\psi : \mathfrak{g}_M \to \mathfrak{g}$ в единую структуру, в некотором смысле принуждая кольцо Λ к действию на категории $\mathscr{C}$ [2]. Новая тензорная категория $\mathscr{C}'$ является фактор-категорией $\mathscr{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$ относительно соотношений Вожеля:



Иными словами, $\mathscr{C}'$ — проп с морфизмами $\hom_{\mathscr{C}'}(m,n) := \hom_{\mathscr{C}}(m,n) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda / I_{m,n}$, где $I_{m,n}$ является Λ-линейной оболочкой всех $X_1 \otimes v - X_2 \otimes 1$, $Y_1 \otimes 2t - Y_2 \otimes 1$ с $v \in \Lambda$, а X_1, X_2 — диаграммами, отличными друг от друга, как в первом соотношении, и Y_1, Y_2 — диаграммами, отличными друг от друга, как во втором соотношении.

Теорема 10. (1) *$\mathscr{C}'$ является тензорной категорией над $\Lambda[\delta]$.*
(2) *$\mathfrak{g}_V = (1, \mu \otimes 1, \tau \otimes 1, \gamma \otimes 1)$ является квазипростой $\mathscr{C}'$-алгеброй Ли.*

Доказательство. Заметим, что тензорное произведение и композиция классов морфизмов

$$(f + I_{n,m}) \circ (g + I_{k,n}) = fg + I_{k,m}, \quad (f + I_{m,n}) \otimes (g + I_{m',n'}) = f \otimes g + I_{m+m',n+n'}$$

однозначно определены. Чтобы в этом убедиться, достаточно установить, что совокупность подпространств $I_{n,m}$ образует тензорный идеал, иными словами,

$$f \circ I_{k,n} \subseteq I_{k,m} \supseteq I_{n,m} \circ g, \quad h \otimes I_{m,n} \subseteq I_{m+m',n+n'} \supseteq I_{m,n} \otimes h.$$

Благодаря Λ-линейности, можно предполагать, что $f \in \hom_{\mathscr{C}}(n,m)$, $g \in \hom_{\mathscr{C}}(k,n)$ и $h \in \hom_{\mathscr{C}}(m',n')$. Рассуждение, используемое в предложении 8, основано на локальном характере соотношений. Оно проходит и здесь. Рассмотрим $X_1 \otimes v - X_2 \otimes 1 \in I_{k,n}$, где диаграммы X_1 и X_2 связаны первым соотношением Вожеля, $f \circ X_1$ и $f \circ X_2$ также связаны первым соотношением Вожеля и $(f \otimes 1) \circ (X_1 \otimes v - X_2 \otimes 1) \in I_{k,m}$. Аналогично для второго соотношения Вожеля и тензорных произведений. Таким образом, $\mathscr{C}'$ является тензорной категорией.

Для вычисления скаляров напомним, что линейная оболочка связных диаграмм с непустым множеством трехвалентных особых точек $\hom^s_{\mathscr{C}}(n,m)$ является Λ-модулем [17, предложение 3.2]. Из предложения 8 вытекает, что

$$\mathbb{K}_{\mathscr{C}} = \hom_{\mathscr{C}}(0,0) \cong S\big(\hom^1_{\mathscr{C}}(0,0)\big) = \mathbb{Q}[\delta] \otimes_{\mathbb{Q}} S\big(\hom^s_{\mathscr{C}}(0,0)\big),$$

поскольку δ — единственная связная диаграмма из $\hom^1_{\mathscr{C}}(0,0)$ без особых точек. Элемент θ является свободным порождающим Λ-модуля $\hom^s_{\mathscr{C}}(0,0)$ [17, следствие 4.6], стало быть, $\mathbb{K}_{\mathscr{C}} \cong \mathbb{Q}[\delta] \otimes_{\mathbb{Q}} S(\Lambda \cdot \theta)$. Пусть $I'_{0,0}$ — Λ-оболочка первых соотношений Вожеля внутри $I_{0,0}$. Поскольку первое соотношение Вожеля накладывает Λ-линейность на $S(\Lambda \cdot \theta)$, то

$$\hom_{\mathscr{C}}(0,0) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda / I'_{0,0} \cong \mathbb{Q}[\delta] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{Sym}_{\Lambda}(\Lambda \cdot \theta)/(\theta - 2t\delta) \cong \Lambda[\delta].$$

Очевидно, что второе соотношение Вожеля не имеет никакого дальнейшего эффекта и

$$\mathbb{K}_{\mathscr{C}'} = \hom_{\mathscr{C}}(0,0) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda / I_{0,0} = \hom_{\mathscr{C}}(0,0) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda / I'_{0,0} \cong \Lambda[\delta],$$

что завершает доказательство первого утверждения. Тот факт, что $\mathfrak{g}_V$ оказывается метрической алгеброй Ли, легко следует из того, что $\mathfrak{g}_M$ является метрической алгеброй Ли. Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_M}(\mathfrak{g}_M) = \hom_{\mathscr{C}}(1,1) \cong \mathbb{K}_{\mathscr{C}} \otimes_{\mathbb{Q}} \big(\hom^c_{\mathscr{C}}(1,1) \oplus (\hom^c_{\mathscr{C}}(0,1) \otimes_{\mathbb{Q}} \hom^c_{\mathscr{C}}(1,0))\big)\\ \cong \mathbb{K}_{\mathscr{C}} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}I_1 \oplus \Lambda \cdot \phi),\end{aligned}$$

поскольку ϕ — свободный порождающий Λ-модуля $\hom^s_{\mathscr{C}}(1,1)$ [17, следствие 4.6], в то время как $\hom^c_{\mathscr{C}}(0,1) = 0$, $\hom^c_{\mathscr{C}}(1,0) = 0$ [17, предложение 4.3]. Следующее вычисление завершает доказательство:

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_V}(\mathfrak{g}_V) = \hom_{\mathscr{C}'}(1,1) \cong \mathbb{K}_{\mathscr{C}} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}I_1 \oplus \Lambda \cdot \phi) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda / I_{1,1}\\ \cong \mathbb{K}_{\mathscr{C}'} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}I_1 \oplus \Lambda \cdot \phi)/(\phi - 2tI_1) \cong \mathbb{K}_{\mathscr{C}'}. \quad \square\end{aligned}$$

Назовем $\mathscr{C}$-алгебру Ли $\mathfrak{g}$ *V-простой*, если она квазипроста и ее специализация $\mathfrak{g}_M \to \mathfrak{g}$ продолжается до специализации $\mathfrak{g}_V \to \mathfrak{g}$.

Ясно, что частью данного определения является гомоморфизм колец $\Theta_{\mathfrak{g}} : \Lambda[\delta] \to \mathbb{K}_{\mathscr{C}}$, удовлетворяющий соотношениям Вожеля. Существование такого гомоморфизма в общей категории не выяснено. Вожель приводит категорный критерий V-простоты квазипростой алгебры Ли [2], но он имеет лишь ограниченное применение. V-простота квазипростой супералгебры Ли устанавливается даже без этого критерия непосредственным построением гомоморфизма $\Theta_{\mathfrak{g}}$, определенным в конце п. 3.4 (отметим, пользуясь случаем, что $\Theta_{\mathfrak{g}}(\delta) = \dim_{\mathscr{C}} \mathfrak{g}$) [2]. В разд. 4 используем эту же стратегию явного построения гомоморфизма колец, в то время как условия категорного критерия Вожеля не выполняются. Любопытно отметить, что все известные квазипростые алгебры Ли оказываются V-простыми, поэтому представляет интерес следующий вопрос.

Проблема 6. *Всякая ли квазипростая $\mathscr{C}$-алгебра Ли в тензорной категории $\mathscr{C}$ является V-простой?*

Напоследок объясним связь между плоскостью Вожеля и кольцом Вожеля. Под *плоскостью Вожеля* обычно понимается взвешенная проективная плоскость $\mathbb{P}^2_{1,2,3} = \mathbb{P}^2/S_3$ [23, 4]. Простой комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ ставится в соответствие точка[6] $(\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{P}^2_{1,2,3}(\mathbb{C})$, где α, β, γ — ненулевые собственные значения оператора Казимира на симметрическом квадрате присоединенного представления $S^2(\mathfrak{g})$. Поскольку оператор Казимира изменяется на скаляр при

[6] Ландсберг и Манивель [23] следуют Вожелю [2] и ставят другую точку: $((2\delta - \alpha) : (2\delta - \beta) : (2\delta - \gamma))$.

изменении инвариантной формы, тройка $(\alpha : \beta : \gamma)$ определена тоже с точностью до скаляра. У этой конструкции возникает трудность с исключительными по Делиню алгебрами Ли [1]. У алгебр типов A_2, D_4, E_n, F_4 или G_2 таких собственных значений только два: α и β, но есть разумный способ определить $\gamma := 5\delta - \alpha - \beta$, где δ — собственное значение оператора Казимира на присоединенном представлении, поскольку тождество $\alpha + \beta + \gamma = 5\delta$ выполнено в неисключительных алгебрах Ли. Более серьезную трудность представляет A_1, у которой только одно собственное значение α. Ей ставится в соответствие вся прямая $\beta + \gamma = 5\delta - \alpha$.

Рассмотрим V-простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над кольцом $\mathbb{K}$ с характером Вожеля $\Theta_{\mathfrak{g}} : \Lambda[\delta] \to \mathbb{K}$. Гомоморфизмы градуированных колец

$$\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3] \hookleftarrow \mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3} \hookleftarrow \widetilde{\Lambda} \xrightarrow{\varphi} \Lambda$$

дают гомоморфизм $\widetilde{\Theta}_{\mathfrak{g}} := \Theta_{\mathfrak{g}} \circ \varphi : \widetilde{\Lambda} \to \mathbb{K}$. Кольца $\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3}$ и $\widetilde{\Lambda}$ имеют общее кольцо частных $\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3}[\omega^{-1}] = \widetilde{\Lambda}[\omega^{-1}]$, поэтому если $\widetilde{\Theta}_{\mathfrak{g}}(\omega)$ обратим в $\mathbb{K}$, то определен градуированный гомоморфизм

$$\widehat{\Theta}_{\mathfrak{g}} : \mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3} \to \mathbb{K}, \quad \widehat{\Theta}_{\mathfrak{g}}(f) = \frac{\widetilde{\Theta}_{\mathfrak{g}}(f\omega)}{\widetilde{\Theta}_{\mathfrak{g}}(\omega)}.$$

Примерами алгебр с неопределенным $\widehat{\Theta}_{\mathfrak{g}}$ являются $\mathfrak{sl}_2$ и K3-поверхности в разд. 4. В обоих случаях $\widetilde{\Theta}_{\mathfrak{g}}(\omega) = 0$. Другим следствием обратимости $\widetilde{\Theta}_{\mathfrak{g}}(\omega)$ является то, что $\mathbb{K}^\times$-орбита $[\widehat{\Theta}_{\mathfrak{g}}]$ есть точка взвешенной плоскости $\mathbb{P}^2_{1,2,3}$ над кольцом $\mathbb{K}$. Напомним, что мультипликативная группа кольца $\mathbb{K}^\times$ действует на множестве $\hom(\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3}, \mathbb{K})$ через градуировку кольца $\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3}$:

$$(\alpha \cdot \Theta)(x_n) = \Theta(\alpha^{-n} x_n)$$

для $\alpha \in \mathbb{K}^\times$, $x_n \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3}_n$, $\Theta \in \hom(\mathbb{Q}[z_1, z_2, z_3]^{S_3}, \mathbb{K})$ и множество $\mathbb{K}$-точек $\mathbb{P}^2_{1,2,3}(\mathbb{K})$ является подмножеством множества орбит. Заметим, что $\widehat{\Theta}_{\mathfrak{g}}$ зависит от метрической алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Иной выбор метрики связан скаляром $\alpha \in \mathbb{K}^\times$, и дает гомоморфизм $\alpha \cdot \widehat{\Theta}_{\mathfrak{g}}$. Значит, орбита $[\widehat{\Theta}_{\mathfrak{g}}] \in \mathbb{P}^2_{1,2,3}(\mathbb{K})$ зависит только от алгебры Ли, но не от ее метрической структуры.

4. Инварианты Виттена — Розанского

4.1. Категория векторных суперрасслоений. На голоморфном многообразии X живет некоторая тензорная категория, играющая решающую роль в подходе Капранова к инвариантам Виттена — Розанского [6, 24]. Мы строим немного меньшую категорию, чем у Капранова. Разницу обсудим после объяснения конструкции.

Объектами в категории векторных суперрасслоений $\mathrm{SV}(X)$ являются локально свободные когерентные пучки $\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_1$. Тензорное произведение определяется обычным образом:

$$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_0 = (\mathscr{F}_0 \otimes \mathscr{G}_0) \oplus (\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{G}_1), \quad (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})_1 = (\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{G}_0) \oplus (\mathscr{F}_0 \otimes \mathscr{G}_1).$$

Локально свободный когерентный пучок $\mathscr{F}$ ведет к двум объектам: четному $\mathscr{F}^+ = \mathscr{F} \oplus 0$ и нечетному $\mathscr{F}^- = 0 \oplus \mathscr{F}$. Единичным объектом является четное тривиальное линейное расслоение $\mathscr{O}_X^+$. Преобразование коммутативности на $\mathrm{SV}(X)$ — обычная суперперестановка:

$$\tau(v_i \otimes w_j) = (-1)^{ij} w_j \otimes v_i,$$

где v_i, w_i — однородные элементы степеней i и j, т. е. локальные сечения $\mathscr{F}_i$ и $\mathscr{G}_j$ соответственно.

Множества морфизмов немного необычны:

$$\hom_{\mathrm{SV}(X)}(\mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_1, \mathscr{G}_0 \oplus \mathscr{G}_1) = \bigoplus_{i,j,n} \mathrm{Ext}^{(i-j)+2n}(\mathscr{F}_i, \mathscr{G}_j).$$

В качестве композиции морфизмов выступает кап-произведение расширений, а тензорное произведение двух морфизмов $f = (f_n)$ и $g = (g_n)$ определяется как $(f \otimes g)_n = f_n \otimes g_n$.

Категория $\mathrm{SV}(X)$ является полной подкатегорией 2-периодической производной категории $D^2(X)$ когерентных пучков на X [25]. Суперрасслоению $\mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_1$ соответствует комплекс $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\mathscr{F}_0[2n] \oplus \mathscr{F}_1[2n+1])$ с нулевыми дифференциалами.

В литературе рассматриваются и «бóльшие» категории. Например, можно добавить морфизмов, учитывая все расширения:

$$\hom_{\mathrm{SV}_1(X)}(\mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_1, \mathscr{G}_0 \oplus \mathscr{G}_1) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ext}^*(\mathscr{F}_i, \mathscr{G}_j),$$

что приводит к категории $\mathrm{SV}_1(X)$, содержащей $\mathrm{SV}(X)$ как подкатегорию с теми же объектами, но большими множествами морфизмов. Категория $\mathrm{SV}_1(X)$ является полной подкатегорией развернутой производной категории $\widehat{D}(X)$, объекты и тензорные произведения которой такие же, как и в $D^b(X)$, а морфизмы учитывают все расширения:

$$\hom_{\widehat{D}(X)}(\mathscr{F}_*, \mathscr{G}_*) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \hom_{D^b(X)}(\mathscr{F}_*, \mathscr{G}_*[n]).$$

В настоящей работе все эти категории не играют особой роли, так как все необходимые объекты и морфизмы для теоремы Капранова содержатся в $\mathrm{SV}(X)$.

4.2. Классы Атьи. На многообразии X рассмотрим касательный пучок $\mathscr{T}_X$ и пучок $\mathscr{D}_X^{<n}$ дифференциальных операторов с голоморфными коэффициентами порядка, ограниченного n. Имеется точная последовательность $\mathscr{O}_X - \mathscr{O}_X$-бимодулей:

$$0 \to \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{D}_X^{<2} \longrightarrow \mathscr{T}_X \to 0.$$

Заметим, что правые и левые действия $\mathscr{O}_X$ на $\mathscr{O}_X$ и $\mathscr{T}_X$ совпадают, а на $\mathscr{D}_X^{<2}$ они действуют по-разному. Рассмотрев тензорное умножение на локально свободный когерентный пучок $\mathscr{F}$, получим новую точную последовательность

$$0 \to \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{D}_X^{<2} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{T}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F} \to 0.$$

Эта последовательность является расширением, которое и задает класс Атьи

$$A_{\mathscr{F}} \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{T}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}, \mathscr{F}) \subseteq \hom_{\mathrm{SV}(X)}(\mathscr{T}_X^- \otimes \mathscr{F}, \mathscr{F}).$$

Заметим, что стандартный класс Атьи на самом деле $-A_{\mathscr{F}}$ [6]. Следующая теорема, по существу, доказана Капрановым [6], но читателю стоит посмотреть и на более поздние обзоры [21, 24].

Теорема 11. (1) $\mathfrak{g}_X = (\mathrm{SV}(X), \mathscr{T}_X^-, A_{\mathscr{T}_X})$ *является алгеброй Ли.*

(2) *Любое суперрасслоение* $\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 \oplus \mathscr{F}_1$ *является представлением алгебры* $\mathfrak{g}_X$ *относительно действия* $A_{\mathscr{F}}$.

(3) *Если многообразие* X *допускает глобальную голоморфную симплектическую форму* ς, *то* $\mathfrak{g}_X$ *является метрической алгеброй Ли с формой* ς.

Доказательство. Доказательство Капранова устанавливает эту теорему в большей категории $\mathrm{SV}_1(X)$ [6]. Нам достаточно заметить, что во время доказательства Капранов оперирует либо четными, либо нечетными расширениями, так что в действительности теорема доказана в $\mathrm{SV}(X)$. Заметим, что ς кососимметрична, а $\mathscr{T}_X^-$ нечетен, следовательно, ς симметрична в $\mathrm{SV}(X)$. $\square$

Разница между $\mathrm{SV}(X)$ и $\mathrm{SV}_1(X)$ выглядит косметической, тем не менее она окажется существенной для вопроса квазипростоты.

4.3. Квазипростота. Через $S^n\mathscr{F}$ (или $T^n\mathscr{F}$, или $\Lambda^n\mathscr{F}$) обозначим n-ю симметрическую (тензорную или внешнюю соответственно) степень локально свободного когерентного пучка $\mathscr{F}$. Сделаем несколько общих замечаний, перед тем как разбираться с квазипростотой $\mathfrak{g}_X$. Во-первых, $H^m(X, \mathscr{F}) = 0$ для всех $m > \dim_{\mathbb{C}} X$ [26, следствие 4.39]. Во-вторых, для голоморфного симплектического многообразия X пучок эндоморфизмов касательного расслоения раскладывается[7)] в прямую сумму

$$\mathrm{End}(\mathscr{T}_X) \cong T^2\mathscr{T}_X \cong S^2\mathscr{T}_X \oplus \Lambda^2\mathscr{T}_X \cong S^2\mathscr{T}_X \oplus (\mathscr{L}_X \oplus \mathscr{O}_X),$$

где отображение $\mathscr{O}_X \to \Lambda^2\mathscr{T}_X$ расщепляется морфизмом следа, в частности, на открытом $U \subseteq X$

$$\mathscr{L}_X(U) = \{F \in \Lambda^2\mathscr{T}_X(U) \subseteq \mathrm{End}(\mathscr{T}_X(U)) \mid \mathrm{Tr}(F) = 0\}.$$

Теорема 12. *Рассмотрим голоморфное симплектическое многообразие* X. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}_X$ *квазипроста тогда и только тогда, когда* $H^{2*}(X, S^2\mathscr{T}_X \oplus \mathscr{L}_X) = 0$.

Доказательство. Напомним скаляры категории $\mathrm{SV}(X)$:

$$\mathbb{K}_{\mathrm{SV}(X)} = \mathrm{End}_{\mathrm{SV}(X)}(\mathscr{O}_X^+) = \mathrm{Ext}^{2*}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X) = H^{2*}(X, \mathscr{O}_X).$$

Естественность классов Атьи означает, что каждый морфизм из $\mathrm{SV}(X)$ является гомоморфизмом представлений алгебры $\mathfrak{g}_X$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathfrak{g}_X}(\mathfrak{g}_X) = \mathrm{Ext}^{2*}(\mathscr{T}_X, \mathscr{T}_X) &= H^{2*}(T^2\mathscr{T}_X)\\ &= H^{2*}(X, S^2\mathscr{T}_X) \oplus H^{2*}(X, \mathscr{L}_X) \oplus H^{2*}(X, \mathscr{O}_X),\end{aligned}$$

а естественный гомоморфизм $\mathbb{K}_\mathrm{S}\mathrm{V}(X) \to \hom_{\mathfrak{g}_X}(\mathfrak{g}_X, \mathfrak{g}_X)$ оказывается тождественным отображением на третьей компоненте. $\square$

Четные когомологии K3-поверхностей легко контролировать, что резко отличается от общего поведения симметрических плюриродов $Q_n(X) := H^0(X, S^n\mathscr{T}_X^*)$, не являющихся топологическими инвариантами комплексного многообразия X [26]. Ключевое рассуждение в доказательстве следующей теоремы объяснено А. Кузнецовым.

[7)] Это соответствует разложению $T^2L(\omega_1) \cong L(2\omega_1) \oplus L(\omega_2) \oplus L(0)$ представлений $sp(n)$.

Теорема 13. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_X$ является квазипростой в случае* К3*-поверхности X.*

Доказательство. Благодаря теореме 12 и тому факту, что для поверхности $\mathscr{L}_X = 0$, достаточно убедиться, что $H^0(X, S^2\mathscr{T}_X) = 0$. Предположим от противного, что $H^0(X, S^2\mathscr{T}_X) \neq 0$. Тогда имеются два глобальных сечения пучка $\operatorname{End}(\mathscr{T}_X) \cong T^2\mathscr{T}_X = \Lambda^2\mathscr{T}_X \oplus S^2\mathscr{T}_X$: кососимметрическое тождественное отображение $I \in \operatorname{End}(\mathscr{T}_X)$ и некоторое ненулевое симметрическое сечение $S \in \operatorname{End}(\mathscr{T}_X)$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ определитель $\det(I + \lambda S)$ является глобальной функцией на X, стало быть, константой, и можно выбрать такое значение $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, что $\det(I + \lambda_0 S) = 0$. Значит, ранг отображения $S' := I + \lambda_0 S$ равен 1 в общей точке.

Кроме того, поскольку I кососимметрична, а S симметрична, S' не обращается в нуль ни в какой точке, поэтому ранг равен 1 в каждой точке. Мы доказали, что образ S' является обратимым пучком $\mathscr{L}$. Покажем, что $\mathscr{L}$ должен быть тривиальным.

Если X не алгебраическая, то любое линейное расслоение на X тривиально. Если X — алгебраическая К3-поверхность, то $\mathscr{T}_X$ полустабилен [27] (см. также [28, гл. 7.4]) и $\mu_H(\mathscr{L}) \le \mu_H(\mathscr{T}_X) = 0$ для любого обильного дивизора H. Двойственное к естественному отображению $\mathscr{T}_X \to \mathscr{L}$ является вложением $\mathscr{L}^* \hookrightarrow \mathscr{T}_X^* \cong \mathscr{T}_X$, отсюда $-\mu_H(\mathscr{L}) = \mu_H(\mathscr{L}^*) \le \mu_H(\mathscr{T}_X) = 0$. Следовательно, $\mathscr{L} \cdot H = \mu_H(\mathscr{L}) = 0$ для любого обильного дивизора H, и мы доказали, что $\mathscr{L}$ тривиально.

Тривиальность $\mathscr{L}$ влечет существование ненулевого глобального сечения у $\mathscr{L}$ и $\mathscr{T}_X$, что противоречит известному факту $H^0(X, \mathscr{T}_X) = 0$. $\square$

4.4. V-простота. Специализация $\mathrm{RW} : \mathfrak{g}_M \to \mathfrak{g}_X$ называется *инвариантами Виттена — Розанского* (или *системой весов*) голоморфного симплектического многообразия X. Она вычисляется (более или менее явно) для многих конкретных X [21]. Через $\varsigma \in H^0(X, \Lambda^2\mathscr{T}^*)$ обозначим голоморфную симплектическую форму на X, через $\overline{\varsigma} \in H^0(X, \Omega^{0,2})$ — ее сопряженную форму, а через $[\bar\varsigma] \in H^2(X, \mathscr{O}_X)$ — класс, соответствующий ς относительно естественного изоморфизма $H^0(X, \Omega^{0,2}) \cong H^2(X, \mathscr{O}_X)$. Используя ς, получаем естественное вложение $\Lambda^{n+m}\mathscr{T}_X^* \hookrightarrow \hom(T^n\mathscr{T}_X, T^m\mathscr{T}_X)$, в котором для $\gamma \in \hom_{\mathscr{C}}\bigl(\mathfrak{g}_M^{\otimes n}, \mathfrak{g}_M^{\otimes m}\bigr)$ с k особыми трехвалентными точками[8)] имеет место

$$\mathrm{RW}_2(\gamma) \in H^k(X, \Lambda^{n+m}\mathscr{T}_X^*) \hookrightarrow H^k(X, \hom(T^n\mathscr{T}_X, T^m\mathscr{T}_X)) \hookrightarrow \hom_{\mathrm{SV}(X)}\bigl(\mathfrak{g}_X^{\otimes n}, \mathfrak{g}_X^{\otimes m}\bigr).$$

В частности, для К3-поверхности X заключаем, что $RW_2(\gamma) = 0$, если γ имеет по крайней мере три трехвалентные особые точки. Среди диаграмм с $RW_2(\gamma) \neq 0$ нужны значения [21]

$$\mathrm{RW}_2(\delta) = -2, \quad \mathrm{RW}_2(\phi) = -24[\bar\varsigma], \quad \mathrm{RW}_2(\theta) = 48[\bar\varsigma] \in H^2(X, \mathscr{O}_X).$$

Теорема 14. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}_X$ V-простая в случае* К3*-поверхности X.*

Доказательство. По теореме 13 алгебра Ли $\mathfrak{g}_X$ квазипроста и

$$\operatorname{End}_{\mathfrak{g}_X}(\mathfrak{g}_X) \cong H^{2*}(X, \mathscr{O}_X) = \mathbb{C}[z]/(z^2), \qquad \text{где } z = [\bar\varsigma] \in H^2(X, \mathscr{O}_X).$$

[8)] Заметим, что число $k + n + m$ всегда четно.

Гомоморфизм градуированных колец

$$\Theta_X : \Lambda \to \mathbb{C}[z]/(z^2), \quad \Theta_X(t) = -24z,$$

однозначно определен, потому что $\Lambda_0 = \mathbb{Q}$ и $\Lambda_1 = \mathbb{Q}t$. Утверждаем, что гомоморфизм Θ_X определяет необходимую специализацию. Действительно, большая часть определяющих соотношений $\mathscr{C}'$ выполнена в $\mathrm{SV}(X)$ по тривиальной причине: обе стороны равны нулю. Оставшиеся соотношения[9)] $\theta = 2t\delta$ и $\phi = 2tI$ выполнены, поскольку обе стороны равны $48z$ и $-24z$ соответственно. $\square$

Теорема 14 доказывает гипотезу Вестбури для K3-поверхностей. Вестбури выдвинул гипотезу для любого компактного неприводимого голоморфного симплектического многообразия Y. Завершаем работу, точно формулируя эту гипотезу серией вопросов. Квазипростота алгебры $\mathfrak{g}_Y$ может быть установлена по теореме 12 и сводится к следующему вопросу.[10)]

Проблема 7. *Какие из компактных неприводимых голоморфных симплектических многообразий Y удовлетворяют $H^{2*}(Y, S^2\mathscr{T}_Y \oplus \mathscr{L}_Y) = 0$?*

Если $\dim_{\mathbb{C}} Y = n$, то скаляры категории $\mathrm{SV}(Y)$ легко описываются: $\mathbb{K}_{\mathrm{SV}(Y)} \cong H^{2*}(Y, \mathscr{O}_Y) = \mathbb{C}[z]/(z^n)$, где $z = [\bar{\varsigma}] \in H^2(Y, \mathscr{O}_Y)$. Таким образом, V-простота $\mathfrak{g}_Y$ сводится к некоторым явным тождествам инвариантов Виттена — Розанского.

Проблема 8. *Существует ли гомоморфизм градуированных колец $\Theta_Y : \Lambda \to \mathbb{C}[z]/(z^n)$, продолжающийся до специализации $\mathfrak{g}_V \to \mathfrak{g}_Y$?*

Было бы любопытно, если бы эти гомоморфизмы оказались согласованы для различных Y или по крайней мере для схем Гильберта.

Проблема 9. *Существует ли V-простая алгебра Ли $\mathfrak{g}_H$ над $\mathbb{C}[z]$, которая специализируется во все $\mathfrak{g}_{X^{[n]}}$ для всех X и n, где $X^{[n]}$ — схема Гильберта n точек на* K3-*поверхности X, таким образом, что специализация $\mathfrak{g}_M \to \mathfrak{g}_{X^{[n]}}$ факторизуется как $\mathfrak{g}_M \to \mathfrak{g}_H \to \mathfrak{g}_{X^{[n]}}$?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deligne P.* La série exceptionnelle de groupes de Lie // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1996. V. 322, N 4. P. 321–326.
2. *Vogel P.* Universal Lie algebra // preprint, http://people.math.jussieu.fr/ vogel/A299.ps.gz.
3. *Landsberg J., Manivel L.* A universal dimension formula for complex simple Lie algebras // Adv. Math. 2006. V. 201, N 2. P. 379–407.
4. *Mkrtchyan R., Sergeev A., Veselov A.* Casimir values for universal Lie algebra // preprint, arXiv:1105.0115.
5. *Westbury B.* *R*-matrices and the magic square // J. Phys. A. 2003. V. 36, N 7. P. 1947–1959.
6. *Kapranov M.* Rozansky–Witten invariants via Atiyah classes // Compositio Math. 1999. V. 115, N 1. P. 71–113.
7. *Rozansky L., Witten E.* Hyper-Kähler geometry and invariants of 3-manifolds // Sel. Math., New Ser. 1997. V. 3. P. 401–458.
8. *Hinich V., Vaintrob A.* Cyclic operads and algebra of chord diagrams, // Sel. Math., New Ser. 2002. V. 8, N 2. P. 237–282.

[9)] Это ясно и из общих соображений: применяя форму к $\phi = 2tI$, получаем $\theta = 2t\delta$.

[10)] Д. Савон сообщил нам ответ на проблему 7: поверхности. Поскольку $H^2(Y, \Omega^2) = H^2(Y, \mathscr{O}_Y) \oplus H^2(Y, \mathscr{L}_Y)$, многообразие Y с положительным ответом на проблему 7 должно удовлетворять $h^{2,2}(Y) = 1$. Если $\dim(Y) > 2$, то, используя три кэлеровы структуры Y, нетрудно построить два линейно независимых класса в $H^2(Y, \Omega^2)$, в частности $h^{2,2}(Y) > 1$.

9. *Sawon J.* When is a Lie algebra not a Lie algebra? // Proc. IXth Oporto meeting on geometry. 2000. http://www.math.ist.utl.pt/~jmourao/om/omix/proc.html.

10. *Joyal A., Street R.* Braided tensor categories // Adv. Math. 1993. V. 102, N 1. P. 20–78.

11. *Kelly G., Laplaza M.* Coherence for compact closed categories // J. Pure Appl. Algebra. 1980. V. 19. P. 193–213.

12. *Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю.* Тождества // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 18. С. 117–240. (Итоги науки и техники).

13. *Кострикин А. И.* Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986; 1990.

14. *Amitsur A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. V. 1. P. 449–463.

15. *Самойлов Л. М.* Аналог теоремы Амицура — Левицкого для матричных супералгебр // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 620–625.

16. *Kemer A.* Ideals of identities of associative algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Transl. Math. Monogr.; 87).

17. *Vogel P.* Algebraic structures on modules of diagrams // J. Pure Appl. Algebra. 2011. V. 215, N 6. P. 1292–1339.

18. *Bajo I., Benayadi S.* Lie algebras admitting a unique quadratic structure // Comm. Algebra. 1997. V. 25, N 9. P. 2795–2805.

19. *Kac V.* Lie superalgebras // Adv. Math. 1977. V. 26, N 1. P. 8–96.

20. *Хамфрис Д. Е.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.

21. *Nieper-Wiıkirchen M.* Chern numbers and Rozansky–Witten invariants of compact hyper-Kähler manifolds. Singapore: World Sci. Publ. Co. Inc., 2004.

22. *Kneissler J.* On spaces of connected graphs. II. Relations in the algebra Λ. Knots in Hellas'98, V. 3 (Delphi) // J. Knot Theory Ramifications. 2001. V. 10, N 5. P. 667–674.

23. *Roberts J., Willerton S.* On the Rozansky–Witten weight systems // Algebr. Geom. Topol. 2010. V. 10, N 3. P. 1455–1519.

24. *Kapustin A.* Topological field theory, higher categories, and their applications // Proc. Int. Congress Math. V. III. New Dehly: Hindustan Book Agency, 2010. P. 2021–2043.

25. *Voisin C.* Hodge theory and complex algebraic geometry. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.

26. *Брюкман П.* Тензорные дифференциальные формы на алгебраических многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35. С. 1008–1036.

27. *Miyaoka Y.* Deformations of a morphism along a foliation and applications // Algebraic geometry: Proc. Symp. Pure Math. (Bowdoin, 1985). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1987. V. 46. P. 245–268.

28. *Huybrechts D.* Lectures on K3 surfaces // preprint, http://www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/K3Global.pdf.

Статья поступила 16 мая 2012 г.

Румынин Дмитрий Анатольевич (Dmitri Rumynin)
Department of Mathematics, University of Warwick,
Coventry, CV4 7AL, UK
`D.Rumynin@warwick.ac.uk`