Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 519.216.22+517.54

О МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ С САМОПОДОБНОЙ СТРУКТУРОЙ

Н. С. Аркашов, В. А. Селезнев

Аннотация. Построена модель случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой, параметризуемых числовой прямой. Построенная модель объясняет, в частности, возникающую нелинейность по времени среднего квадрата так называемых аномальных процессов переноса.

Ключевые слова: самоподобные множества, случайное блуждание, аномальный перенос, диффузия, мера Хаусдорфа, размерность Хаусдорфа.

1. Введение и постановка задачи

В основе работ, посвященных аномальным процессам переноса на самоподобных структурах (см., например, [1–4]), лежит случайное блуждание на множествах, представляющих эти структуры. Мы рассматриваем класс таких реализаций самоподобных структур, для которых минимальная размерность Хаусдорфа всех путей, соединяющих любые две точки реализации, одна и та же. В дальнейшем будем говорить о некотором произвольном множестве из обозначенного класса реализаций. Через d обозначим размерность Хаусдорфа этого множества, а через d_0 — минимальную размерность Хаусдорфа множества всех путей, соединяющих две какие-нибудь точки на этом множестве.

Сформулируем условия, которые в целом ряде работ по физике аномальных процессов переноса (см., например, [1, 5]) предполагаются выполненными для частицы, блуждающей по самоподобному множеству. Частица блуждает по некоторым структурным элементам самоподобного множества с размерностью Хаусдорфа d, при этом траектория, по которой движется частица, параметризуется числовой прямой и имеет размерность d_0. Для частицы, начинающей блуждание из начала координат, средний квадрат расстояния до начала координат в момент времени n ведет себя пропорционально n^{1/d_0} при $n \to \infty$, а вероятность возвращения частицы в начало координат в момент времени n — пропорционально $n^{-k/2}$ при $n \to \infty$, где $k = d/d_0$. Отметим, что k понимается как число степеней свободы множества, по которому происходит блуждание. Заметим, что перечисленные условия представлены в [1]. В [1], а также в [4–6] ставился вопрос о математическом обосновании моделей аномальных процессов переноса.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 13–01–00661) и гранта №2.1.1(2013) Новосибирского гос. технического университета.

© 2013 Аркашов Н. С., Селезнев В. А.

Отвечая на поставленный вопрос, в настоящей работе мы строим математическую модель случайного блуждания на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой, реализующую указанные условия. Суть этой модели в следующем. При параметризации множеств числовой прямой мы рассматриваем последовательность сумм независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с соответствующим числом моментов, представляющую случайное блуждание на этой прямой. После топологического вложения в евклидово пространство для множеств канторовского типа средний квадрат расстояния от блуждающей точки до начала координат в момент времени n ведет себя пропорционально n^{α}, $\alpha > 1$, а для множеств типа кривой Коха — пропорционально $n^{\alpha}, \alpha < 1$.

2. Самоподобные множества, параметризуемые числовой прямой

Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. *Диаметром* непустого множества $A \subseteq X$ называется величина $\operatorname{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$, диаметр пустого множества полагаем равным нулю.

Открытым покрытием множества A называется любой не более чем счетный набор открытых множеств $\{A_i\}$ такой, что $A \subseteq \bigcup\limits_i A_i$.

Пусть $d \geq 0$ и $\varepsilon > 0$. Определим величину

$$\mu^d_\varepsilon(A) = \inf\Big\{\sum_i (\operatorname{diam}(A_i))^d : A \subseteq \bigcup_i A_i,\ \sup_i \operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon\Big\},$$

где инфимум берется по всем открытым покрытиям множества A. Величина $\mu^d_\varepsilon(A)$ возрастает при уменьшении ε, поэтому $\mu^d_\varepsilon(A)$ имеет предел при $\varepsilon \to 0$. Положим

$$\mu^d(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu^d_\varepsilon(A).$$

Величина $\mu^d(A)$ называется *d-мерной мерой Хаусдорфа множества* A (см. [7, с. 58; 8, с. 165]).

Определим хаусдорфову размерность, для этого сформулируем теорему (см., например, [8, 9]).

Теорема 1. *Для любого множества A существует такое $d_h \in [0, +\infty]$, что $\mu^d(A) = 0$ при всех $d > d_h$ и $\mu^d(A) = +\infty$ при всех $d < d_h$.*

Число d_h, определенное в предыдущей теореме, называется *хаусдорфовой размерностью* множества A. Хаусдорфову размерность множества A будем обозначать через $\dim(A)$.

Борелевскую σ-алгебру множеств в X будем обозначать через $\mathscr{B}$. Следующие теоремы 2 и 3 используются в дальнейшем для нахождения размерности Хаусдорфа (см. [8]).

Теорема 2. *Сужение хаусдорфовой меры μ^d на $\mathscr{B}$ является борелевской мерой.*

Отображение $T : X \to X$ назовем *преобразованием подобия с коэффициентом* r, если $\rho(T(x), T(y)) = r\rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

Теорема 3. *Пусть $T : X \to X$ — преобразование подобия с коэффициентом r, пусть также d — действительное положительное число. Тогда $\mu^d(T(A)) = r^d \mu(A)$ для всех $A \subseteq X$.*

Преобразование подобия $T : X \to X$ называется *сжимающим*, если коэффициент этого преобразования r принадлежит $(0, 1)$.

Пусть T_i, $i = 0, \dots, m$, — сжимающие преобразования подобия с коэффициентом r, где m — некоторое фиксированное целое значение, превосходящее 0. Через $\mathscr{K}$ обозначим множество всех непустых компактных подмножеств пространства X. Для набора отображений $\{T_0, \dots, T_m\}$ зададим оператор Хатчинсона $H : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$, сопоставляющий каждому непустому компактному множеству A непустое компактное множество

$$H(A) = \bigcup_{i=0}^{m} T_i(A).$$

Неподвижную точку оператора Хатчинсона H обозначим через A_0 (доказательство существования и единственности неподвижной точки оператора Хатчинсона в $\mathscr{K}$ можно найти, например, в [9, теорема 9.1; 10, п. 3.1]).

Итак, имеем непустое компактное множество A_0, обладающее свойством

$$A_0 = \bigcup_{i=0}^{m} T_i(A_0). \tag{1}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда множество A_0 состоит по крайней мере из *двух различных элементов*.

Обозначим через x_0 и x_m неподвижные точки преобразований T_0 и T_m соответственно. Далее будем считать, что (см. [10])

$$T_i(x_0) = T_{i-1}(x_m) \tag{2}$$

для всех $i = 1, \dots, m$. Будем также считать, что

$$T_i(A_0) \cap T_j(A_0) = \begin{cases} \{T_{i'}(x_0)\} & \text{при } |i-j| = 1, \\ \varnothing & \text{при } 0 < |i-j| \neq 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $i' = \max(i, j)$.

Через T^n, $n = 1, 2, \dots,$ будем обозначать n-кратную композицию преобразований $T \circ \dots \circ T$, под T^0 будем понимать тождественное отображение X на X.

Определим последовательность множеств A_j, $j = 0, 1, \dots,$ положив $A_j = T_0^{-j}(A_0)$. Кроме того, определим преобразования $T_i^{(j)} := T_0^{-j} \circ T_i \circ T_0^j$, $j = 0, 1, 2, \dots.$ Заметим, что отображение $T_0^{(j)}$ совпадает с T_0 для всех $j = 0, 1, 2, \dots.$

Непосредственно из определения A_j и $T_i^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots,$ $i = 0, 1, \dots, m$, следует, что

$$T_0^{(j)}(A_j) = A_{j-1}, \quad T_0^{(j)} \circ T_{i_1}^{(j)} \circ \dots \circ T_{i_k}^{(j)}(A_j) = T_{i_1}^{(j-1)} \circ \dots \circ T_{i_k}^{(j-1)}(A_{j-1}), \tag{4}$$

где $j \geq 1$, $k \geq 1$ и $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\}$. Соотношения (4) назовем *условиями согласования*. Из определения множеств A_j, преобразований $T_i^{(j)}$ и равенства (1) вытекает, что

$$A_j = \bigcup_{i=0}^{m} T_i^{(j)}(A_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots. \tag{5}$$

Заметим, что множества A_j, $j = 0, 1, 2, \dots,$ удовлетворяющие (5), называются *самоподобными* (см., например, [8]).

Введем в рассмотрение множество $E = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$. Из (4) и (5) вытекает, что $A_{i-1} \subseteq A_i$ при всех $i = 1, 2, \dots$.

Замечание 1. Размерность Хаусдорфа множества E совпадает с размерностью множества A_0, это следует из того, что $\dim(E) = \sup\limits_{i=0,1,\dots} \dim(A_i)$ (см., например, [8]) и $\dim(A_0) = \dim(A_j)$ для всех $j \geq 1$. Совпадение размерностей Хаусдорфа множеств A_j, $j = 0, 1, \dots$, выводится из первого равенства в условии 4, теоремы 3 и определения размерности Хаусдорфа. Более того, предполагая, что $0 < \mu^{\dim(A_0)}(A_0) < \infty$, из теорем 2 и 3 сразу получаем, что $\dim(A_j) = -\ln(m+1)/\ln r$, $j = 0, 1, \dots$.

Отметим также следующий факт. Пусть $S : X \to X$ — некоторое изометрическое преобразование, тогда $\dim(S(E)) = \dim(E)$ — это непосредственно следует из определения размерности Хаусдорфа и теоремы 3. Кроме того, $\dim(E \cup S(E)) = \dim(E)$, так как для любых борелевских A и B выполняется равенство $\dim(A \cup B) = \max\{\dim(B), \dim(A)\}$ (см., например, [8, теорема 6.1.7]).

Замечание 2. Рассмотрим классическую кривую Коха в квадрате $[0,1] \times [0,1]$, обозначим ее буквой C_0. Эта кривая является одним из примеров связного самоподобного множества. Множество C_0 определяется четырьмя преобразованиями подобия (см., например, [10, с. 13]): $T_0(x) = \frac{1}{3}A_0 x + b_0$, $T_1(x) = \frac{1}{3}A_1 x + b_1$, $T_2(x) = \frac{1}{3}A_2 x + b_2$, $T_3(x) = \frac{1}{3}A_3 x + b_3$, для которых $C_0 = \bigcup\limits_{i=0}^{3} T_i(C_0)$, где

$$A_0 = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

— ортогональные матрицы и $b_0 = (0,0)^t$, $b_1 = (1/3, 0)^t$, $b_2 = (1/2, \sqrt{3}/6)^t$, $b_3 = (2/3, 0)^t$, где верхний индекс t означает операцию транспонирования. Для C_0 и преобразований T_0, T_1, T_2 и T_3 выполняется условие (3). Приведем в явном виде координаты точек пересечения: $T_0(C_0) \cap T_1(C_0) = \{(1/3, 0)\}$, $T_1(C_0) \cap T_2(C_0) = \{(1/2, \sqrt{3}/6)\}$, $T_2(C_0) \cap T_3(C_0) = \{(2/3, 0)\}$. С учетом того, что неподвижными точками преобразований T_1 и T_3 являются точки $(0,0)$ и $(1,0)$ соответственно, легко проверяется выполнение условия (2).

Размерность Хаусдорфа кривой Коха равна $d = \ln 4/\ln 3$ (см., например, [4, 8, 9]).

Преобразования $T_i^{(j)}$, $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2, \dots$, определим следующим образом: $T_i^{(j)}(x) = \frac{1}{3}A_i x + 3^j b_i$. Последовательность множеств C_j, $j \geq 0$, естественно определяется через начальное множество C_0:

$$C_j = \{3^j \cdot (x, y) : (x, y) \in C_0\}.$$

Непосредственно проверяется, что для преобразований $T_i^{(j)}$, $i = 0, \dots, 3$, и множеств C_j, $j \geq 0$, выполняется условие согласования (4).

В дальнейшем, рассматривая композицию преобразований $T_i \circ T_j$, для краткости будем опускать знак композиции $\circ$ и писать $T_i T_j$.

Для каждого множества A_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, определим символьное пространство Σ на $m+1$ элементах $\{0, 1, \dots, m\}$ как множество всех бесконечных последовательностей $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$, $\sigma_k \in \{0, 1, \dots, m\}$, $k = 1, 2, \dots$. Расстояние d между $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$ определяется таким образом:

если $\sigma_1 \neq \tau_1$, то $d(\sigma,\tau) = 1$; если $\sigma_1 = \tau_1, \dots, \sigma_k = \tau_k$ и $\sigma_{k+1} \neq \tau_{k+1}$ для некоторого $k \geq 1$, то $d(\sigma,\tau) = r^k$ (здесь r — коэффициент подобия преобразований $T^{(j)}_{\sigma_1}, \dots, T^{(j)}_{\sigma_k}$); если $\sigma_k = \tau_k$ для всех $k \geq 1$, то $d(\sigma,\tau) = 0$.

Символьное пространство (Σ, d) является метрическим пространством (см., например, [8, 11]). Следующая теорема позволяет «кодировать» каждую точку из A_j некоторой последовательностью из символьного пространства (см. теорему 4.2.3 в [8]).

Теорема 4. *Для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ существует единственная непрерывная функция $\Phi_j : (\Sigma, d) \to (A_j, \rho)$ такая, что для любого $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots) \in \Sigma$ выполняется*

$$\Phi_j(\sigma) = T^{(j)}_{\sigma_1}(\Phi_j((\sigma_2, \sigma_3, \dots))).$$

Кроме того, $\Phi_j(\Sigma) = A_j$.

Определим соответствие $\Psi : [0, +\infty) \to E$ следующим образом. Любое $x \in [0, +\infty)$ можно представить в виде суммы $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}$, положим

$$\Psi(x) = \Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, \dots)).$$

Заметим, что значение x можно представить в виде указанной суммы неоднозначным образом.

Подчеркнем, что всюду в дальнейшем числовую прямую $\mathbb{R}$ и ее подмножества будем снабжать топологией, порожденной метрикой $\lambda(x, y) = |x - y|$.

В дальнейшем будем предполагать, что существует изометрическое преобразование $S : (X, \rho) \to (X, \rho)$ такое, что $S(E) \cap E$ — одноэлементное множество при этом $S(x_0) = x_0$.

Обозначим $S(A_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, через B_j . Каждое из множеств B_j самоподобно, поскольку выполняется равенство $B_j = \bigcup\limits_{i=0}^{m} ST^{(j)}_i S^{-1}(B_j)$. Через $S^{(j)}_i$ обозначим следующую композицию преобразований: $ST^{(j)}_i S^{-1}$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Отображения $S^{(j)}_i$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, 1, 2, \dots$, являются сжимающими преобразованиями подобия с коэффициентом r, поскольку S изометрическое.

Для преобразований $S^{(j)}_i$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, 1, 2, \dots$, и множеств B_j, $j = 0, 1, 2, \dots$, выполняется равенство (5), а также условия (2)–(4). С помощью преобразования S доопределим Ψ на $(-\infty, 0]$:

$$\Psi(x) = S(\Psi(-x)).$$

Введем обозначение: $E' = E \cup S(E)$.

Предложение 1. *Для каждого $x \in \mathbb{R}$ значение $\Psi(x)$ определяется однозначно, т. е. соответствие $\Psi : \mathbb{R} \to E'$ функционально.*

Более того, имеет место

Предложение 2. *Отображение Ψ является гомеоморфизмом пространства $(\mathbb{R}, \lambda)$ на пространство (E', ρ).*

Определим метрику на E' следующим образом:

$$f(x, y) = |\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)|, \quad x, y \in E'.$$

Метрику f будем в дальнейшем называть *внутренней метрикой* на E'.

Из предложения 2 следует, что рассматриваемое пространство (E', ρ) связно. Далее, рассмотрим случай несвязных самоподобных множеств.

Пусть T_i, $i = 0, \dots, m$, — сжимающие преобразования подобия с коэффициентом r, где m — фиксированное целое число, превосходящее 1. Рассмотрим непустое компактное множество A_0, удовлетворяющее (1). Будем считать, что $T_k(A_0) \cap T_l(A_0) = \varnothing$ для множества A_0 при всех $k \neq l$. Введем в рассмотрение последовательность непустых компактных множеств $\{A_j := T_0^{-j}(A_0), j = 0, 1, \dots\}$, а также преобразования $T_i^{(j)} := T_0^{-j} \circ T_i \circ T_0^j$, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Для множеств A_j и преобразований $T_i^{(j)}$ выполняется равенство (5) и условия согласования (4). Из (4) следует, что и для любого $j \geq 0$ имеет место соотношение $T_k^{(j)}(A_j) \cap T_l^{(j)}(A_j) = \varnothing$ при всех $k \neq l$.

Обратим внимание, что по-прежнему выполняется теорема 4, при этом отображение $\Phi_j : (\Sigma, d) \to (A_j, \rho)$, $j = 0, 1, \dots$, определяемое в этом теореме, является гомеоморфизмом (см. теорему 4.2.3 в [4]).

Как и раньше, через E обозначим объединение $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} A_j$. Пространство (E, ρ) несвязно относительно топологии, порожденной метрикой ρ.

Всюду в дальнейшем связность или несвязность пространства будет подразумеваться относительно топологии, порожденной метрикой ρ.

Замечание 3. Классическое множество Кантора на отрезке $[0, 1]$ числовой прямой, обозначим его буквой K_0, является одним из примеров несвязного самоподобного множества. Для множества K_0 существуют два преобразования подобия $T_0(x) = \frac{1}{3}x$ и $T_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ такие, что $K_0 = T_0(K_0) \cup T_1(K_0)$ и $T_0(K_0) \cap T_1(K_0) = \varnothing$. Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна $d = \ln 2 / \ln 3$ (см., например, [4, 8, 9]).

Определим последовательность множеств $K_j = \{3^j x : x \in K_0\}$, $j \geq 0$. На K_j зададим функции $T_0^{(j)} = \frac{1}{3}x$ и $T_1^{(j)} = \frac{1}{3}x + 2 \cdot 3^{j-1}$, $j \geq 0$. Для каждого $j \geq 0$ непосредственно проверяется, что $K_j = T_0^{(j)}(K_j) \cup T_1^{(j)}(K_j)$ и $T_0^{(j)}(K_j) \cap T_1^{(j)}(K_j) = \varnothing$ и, кроме того, выполняется условие согласования (4).

Определим соответствие $\Psi : [0, +\infty) \to E$. Всякое $x \in [0, +\infty)$ имеет представление в виде суммы $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m+1)^{i-j}$, полагаем

$$\Psi(x) = \Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, \dots)).$$

Будем так же, как и связном случае, предполагать, что существует изометрическое преобразование $S : (X, \rho) \to (X, \rho)$ такое, что $S(E) \cap E$ — одноточечное множество, при этом $S(x_0) = x_0$. По-прежнему $E \cup S(E)$ обозначаем через E'. С помощью преобразования S доопределим Ψ на $(-\infty, 0]$:

$$\Psi(x) = S(\Psi(-x)).$$

Будем говорить, что действительное число имеет *двойственное* $(m+1)$-ичное представление, если его можно представить в виде $(m+1)$-ичной дроби с периодом 0 и m.

Предложение 3. *Для всякого $x \in \mathbb{R}$, не имеющего двойственного $(m+1)$-ичного представления, значение $\Psi(x)$ определяется однозначно. Для всякого $x \in \mathbb{R}$, имеющего двойственное $(m+1)$-ичное представление, $\Psi(x)$ состоит из двух различных точек.*

Аналогично связному случаю определим $f : E' \times E' \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = |\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)|,$$

заметим, что f является псевдометрикой, поскольку убедились, что существуют точки $x, y \in E'$ такие, что $x \neq y$, но $\Psi^{-1}(x) = \Psi^{-1}(y)$. Псевдометрику f так же, как и в связном случае, будем называть *внутренней метрикой на* E'.

Исключим из рассмотрения рациональные дроби с периодом m, в этом случае соответствие Ψ станет однозначным, обозначим его через $\Psi^{(1)}$. Исключив из рассмотрения рациональные дроби с периодом нуль, кроме 0, получим также функциональное соответствие, которое обозначим через $\Psi^{(2)}$. В виде предложения 4 сформулируем следующие свойства непрерывности $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$.

Предложение 4. *Функции* $\Psi^{(1)}$ *и* $\Psi^{(2)}$, *действующие из* $(\mathbb{R}, \lambda)$ *в* (E', ρ), *непрерывны во всех точках действительной прямой, за исключением точек, имеющих двойственное* $(m+1)$*-ичное представление. В точках с двойственным* $(m+1)$*-ичным представлением* $\Psi^{(1)}$ *и* $\Psi^{(2)}$ *непрерывны справа и слева соответственно на промежутке* $[0, +\infty)$, *а также непрерывны слева и справа соответственно на промежутке* $(-\infty, 0]$.

Точки $x, y \in E'$ будем считать *неразличимыми*, если $f(x,y) = 0$. Образ $\Psi(z) = \{\Psi^{(1)}(z), \Psi^{(2)}(z)\}$, $z \in \mathbb{R}$ состоит, вообще говоря, из двух различных относительно метрики ρ точек, но относительно псевдометрики f эти точки неразличимы.

В дальнейшем говоря об отображении Ψ, будем подразумевать, что $\Psi(z)$ равно одному из значений $\Psi^{(1)}(z)$ или $\Psi^{(2)}(z)$.

Предложение 5. *Отображения* $\Psi^{-1} : (E', \rho) \to (\mathbb{R}, \lambda)$ *и* $\Psi : (\mathbb{R}, \lambda) \to (E', f)$ *непрерывны.*

Из теоремы 5, в частности, следует, что топологическое пространство (E', f) связно, поскольку образ связного пространства при непрерывном отображении связно.

При рассмотрении отрезка числовой прямой $[a, b]$ нам будет неважно, в каком порядке расположены его концы, т. е. $[a, b]$ и $[b, a]$ будут представлять одно и то же множество.

Предложение 6. *Пусть* $\mu^d(A_0) = 1$, *где* $d = \dim(A_0)$. *Тогда для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *выполняется равенство* $\mu^d(\Psi([x, y])) = |x - y|$.

3. Блуждание на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой

Рассмотрим случайное блуждание S_n, $n = 0, 1, \dots$, на действительной прямой. Значение S_n для каждого n определяется суммой $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $S_0 = 0$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные действительнозначные случайные величины.

Последовательность сумм S_n, $n = 0, 1, \dots$, индуцирует случайное блуждание на E', а именно: последовательность $\Psi(S_n)$, $n = 0, 1, \dots$, назовем *случайным блужданием на* E' (см. замечание 4).

Заметим, что в случае несвязанного пространства (E', ρ) образ $\Psi(S_n)$, $n = 0, 1, \dots$, может состоять из двух различных точек (относительно метрики ρ), но, как отмечалось выше, точки $\Psi^{(1)}(S_n)$ и $\Psi^{(2)}(S_n)$ неразличимы относительно внутренней метрики f. В качестве $\Psi(S_n)$ выбираем одно из значений $\Psi^{(1)}(S_n)$ или $\Psi^{(2)}(S_n)$ (безразлично какое). Если E' связное, то $\Psi^{(1)}$ совпадает с $\Psi^{(2)}$.

Теорема 5. *Пусть* $\{\xi_k,\, k = 1, 2, \dots, n\}$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, при этом* $\mathbf{E}|\xi_1|^{\max(2,2/d)} < \infty$*, где* $d = -\ln(m+1)/\ln r$*. Тогда если* $d \le 2$*, то выполняются следующие неравенства:*

$$d_1 n^{1/d} \le \mathbf{E}(\rho(\Psi(S_n), x_0))^2 \le d_2 n^{1/d}, \tag{6}$$

где d_1 *и* d_2 *— положительные константы, зависящие от распределения* ξ_1*.*

Если к тому же распределение ξ_1 *имеет нуль своей медианой, т. е.* $\mathbf{P}(\xi_1 \ge 0) = \mathbf{P}(\xi_1 \le 0) = 1/2$*, то* (6) *выполняется и при* $d > 2$*.*

Заметим, что, если $0 < \mu^{\dim(A_0)}(A_0) < \infty$, то $\dim(E') = -\ln(m+1)/\ln r$ (см. замечание 1).

Обратим внимание, что расстояние между $\Psi(S_n)$ и x_0 во внутренней метрике f пространства E' равно $f(\Psi(S_n), x_0) = |S_n|$, $n = 0, 1, \dots$, следовательно, $\mathbf{E}f^2(\Psi(S_n), x_0) = n$. В метрике ρ исходного пространства X средний квадрат расстояния от $\Psi(S_n)$ до x_0 «ведет себя» как $n^{1/d}$ при $n \to \infty$.

Отметим также, что если $\mu^d(A_0) = 1$, где $d = \dim(E')$, то из предложения 6 следует, что $\mu^d(\Psi([0, S_n])) = f(\Psi(S_n), x_0) = |S_n|$.

Предложение 7. *Пусть* $\dim(E') > 0$ *и* $\gamma : ([0,1], \lambda) \to (E', f)$ *— произвольное непрерывное отображение, образ которого состоит по крайней мере из двух различных точек. Тогда выполняется равенство* $\dim(E') = \dim(\gamma([0,1]))$*.*

Замечание 4. Сравним полученные нами результаты с тем, что анонсировалось во введении. Предполагая, что $0 < \dim(E') < +\infty$, из предложения 7 получаем, что число степеней свободы множества E' равно $k = 1$ (число степеней свободы понимается в смысле, определенном во введении). Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $S_0 = 0$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные радемахеровские случайные величины, т. е. $\mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \mathbf{P}(\xi_1 = 1) = 1/2$. Блуждание S_n, $n = 0, 1, \dots$, индуцирует случайное блуждание $\Psi(S_n)$ на E'. Аналогом целочисленной решетки на E' является множество $\{\Psi(n) :\ n \in \mathbb{Z}\}$. Вероятность попасть из точки $\Psi(n)$ в точки $\Psi(n \pm 1)$ равна $1/2$, при этом «длины» скачков равны $\mu^d(\Psi([n, n \pm 1])) = 1$, где $d = \dim(E')$ (здесь, конечно, предполагается, что $\mu^d(A_0) = 1$). «Структурными элементами», по которым происходит блуждание, о которых упоминалось во введении, являются множества $\Psi([n, n \pm 1])$, $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, $\Psi(S_n)$ представляет собой аналог симметричного блуждания по целочисленной решетке. Вероятность возвращения в начальную точку x_0 ведет себя пропорционально $n^{-1/2}$ при $n \to \infty$, это сразу следует из того факта, что $\mathbf{P}(\Psi(S_n) = x_0) = \mathbf{P}(S_n = 0)$, между тем в метрике ρ исходного пространства X средний квадрат расстояния от $\Psi(S_n)$ до x_0 «ведет себя» как $n^{1/d}$ при $n \to \infty$ (см. теорему 5).

4. Доказательство основных результатов

Лемма 1. *Для любой последовательности* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Sigma$ *выполняется равенство* $\Phi_j((0, \sigma_1, \sigma_2, \dots)) = \Phi_{j-1}(\sigma)$*, где* $j \ge 1$*.*

Доказательство. Пусть $(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma$ — произвольная последовательность. Из теоремы 4 и полноты пространства (X, ρ) следует, что

$$\Phi_j(i_1, i_2, \dots) = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)}(A_j),$$

но тогда из условий согласования (4) сразу вытекает утверждение леммы.

Прежде всего приведем доказательства утверждений для связного случая.

Лемма 2. *Для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ выполняется равенство $T_i^{(j)}(x_0) = T_{i-1}^{(j)}(x_m^{(j)})$ при всех $i = 1, \dots, m$, где $x_m^{(j)}$ — неподвижная точка преобразования $T_m^{(j)}$. Кроме того, если $|k-l| = 1$, то пересечение $T_k^{(j)}(A_j) \cap T_l^{(j)}(A_j)$ является одноточечным множеством, если $0 < |k-l| \neq 1$ — пустым множеством.*

Доказательство. Утверждение леммы сразу следует из условий согласования (4), а также условий (2) и (3).

Заметим, что прообразы $\Phi_j^{-1}(x_0)$ и $\Phi_j^{-1}(x_m^{(j)})$, $j \geq 0$, точек x_0 и $x_m^{(j)}$ состоят по крайней мере из одного элемента, а именно: $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ и $(m, m, \dots, m, \dots)$ соответственно. В следующей лемме покажем, что эти прообразы состоят ровно из одного элемента.

Лемма 3. *Для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ выполняются равенства $\Phi_j^{-1}(x_0) = \{(0, 0, \dots, 0, \dots)\}$, $\Phi_j^{-1}\big(x_m^{(j)}\big) = \{(m, m, \dots, m, \dots)\}$.*

Доказательство. Если предположить, что прообраз $\Phi_j^{-1}(x_0)$ состоит из хотя бы двух различных точек, то из леммы 2 следует, что $x_0 \in T_0^{(j)}(A_j) \cap T_1^{(j)}(A_j)$. Тогда имеет место равенство

$$x_0 = T_0^{(j)}\big(x_m^{(j)}\big) = T_1^{(j)}(x_0), \tag{7}$$

поэтому $x_0 = x_m^{(j)}$. Если $m \geq 2$, то последнее равенство противоречит лемме 2. Пусть $m = 1$. Рассмотрим произвольную точку $x \in A_j$. Существует последовательность $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ такая, что $\Phi_j(\sigma) = x$. Кроме того, рассмотрим последовательность $\tau_n = (\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0, 0, \dots)$, $n \geq 1$ (первые n символов последовательностей σ и τ_n совпадают). Из непрерывности $\Phi_j : (\Sigma, d) \to (A_j, \rho)$ выводим, что величину $\rho(\Phi_j(\sigma), \Phi_j(\tau_n))$ можно сделать сколь угодно малой при достаточно больших n. Из (7) следует, что $\Phi_j(\tau_n) = x_0$, т. е. любая точка из A_j сколь угодно близка к x_0, поэтому множество A_j состоит из одной точки x_0, но это противоречит тому, что A_j состоит из по крайней мере двух различных точек. Итак, первое равенство леммы доказано.

Докажем второе равенство в условии леммы. Предположим, что прообраз $\Phi_j^{-1}\big(x_m^{(j)}\big)$ состоит по крайней мере из двух различных точек. Тогда в силу леммы 2 выполняется равенство

$$x_m^{(j)} = T_{m-1}^{(j)}\big(x_m^{(j)}\big) = T_m^{(j)}(x_0),$$

откуда следует, что $x_0 = x_m^{(j)}$. Если $m \geq 2$, то приходим к противоречию с леммой 2. В случае, когда $m = 1$, аналогично получим, что A_j состоит ровно из одной точки x_0; противоречие с тем, что A_j состоит из хотя бы двух точек. Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что композиция преобразований $T_{i_1} \circ T_{i_2} \circ \dots \circ T_{i_l} \circ T$ совпадает с преобразованием T, когда $l = 0$.

Лемма 4. *Пусть $x \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_i^{(j)}(A_j)$, где $l \geq 0$, $i \geq 1$, $j \geq 0$. Тогда*

$$\Phi_j^{-1}(x) = \{(i_1, i_2, \dots, i_l, i-1, m, m, \dots, m, \dots), (i_1, i_2, \dots, i_l, i, 0, 0, \dots, 0, \dots)\}. \tag{8}$$

Пусть $x \in A_j$, $j \geq 0$, и не существует $i \geq 1$ и $l \geq 0$ таких, что

$$x \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i}^{(j)}(A_j).$$

Тогда $\Phi_j^{-1}(x)$ состоит ровно из одного элемента.

Доказательство. Прежде всего докажем (8) при $l = 0$. Предположим, что существует последовательность $\kappa = \{k_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ такая, что $\Phi_j(\kappa) = x$ и κ не совпадает ни с одной из последовательностей $(i-1, m, m, \dots, m, \dots)$ и $(i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Заметим, что $k_1 \notin \{i, i-1\}$, в противном случае получим противоречие с леммой 3. В силу условия (3) выводим, что либо $k_1 = i+1$, либо $k_1 = i-2$. Пусть выполняется первый случай. Тогда $x \in T_i^{(j)}(A_j) \cap T_{i+1}^{(j)}(A_j)$, стало быть, $x = T_i^{(j)}\big(x_m^{(j)}\big)$, с другой стороны, $x = T_i^{(j)}(x_0)$; противоречие с леммой 3. Аналогично получаем противоречие и в случае $k_1 = i-2$.

Докажем (8) при $l \geq 1$. Предположим, что существует последовательность $\kappa = \{k_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ такая, что $\Phi_j(\kappa) = x$ и κ не совпадает ни с одной из последовательностей $(i_1, i_2, \dots, i_l, i-1, m, m, \dots, m, \dots)$ и $(i_1, i_2, \dots, i_l, i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Пусть $k_1 \neq i_1$. Тогда с необходимостью возникают два случая: либо $k_1 = i_1 - 1$, либо $k_1 = i_1 + 1$. Пусть имеет место первый случай, тогда $x \in T_{i_1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1-1}^{(j)}(A_j)$, откуда $T_{i_1}^{(j)}(x_0) = x$, поэтому $x_0 = \Phi_j(i_2, \dots, i_l, i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Получили противоречие с леммой 3. Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть существует s такое, что $2 \leq s < l$ и $k_s \neq i_s$, но $k_j = i_j$ при всех $j < s$. Тогда $y = \big(T_{i_{s-1}}^{(j)}\big)^{-1} \dots \big(T_{i_1}^{(j)}\big)^{-1}(x) \in T_{i_s}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_s}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i}^{(j)}(A_j)$, с другой стороны, $\Phi_j(k_s, k_{s+1}, \dots) = y$. Обсуждаемая ситуация свелась к предыдущей. Получаем противоречие.

Пусть $k_s = i_s$ для всех $s = 1, \dots, l$. Рассмотрим

$$y = \big(T_{i_l}^{(j)}\big)^{-1} \dots \big(T_{i_1}^{(j)}\big)^{-1}(x) \in T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i}^{(j)}(A_j),$$

при этом $\Phi_j(y) = (k_{l+1}, k_{l+2}, \dots)$, где $(k_{l+1}, k_{l+2}, \dots)$ не совпадает ни с одной из последовательностей $(i-1, m, m, \dots, m, \dots)$ и $(i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, но эта ситуация также уже обсуждалась (см. выше); противоречие.

Пусть $x \in A_j$, $j \geq 0$, и не существует i и l таких, что

$$x \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i}^{(j)}(A_j).$$

Утверждение леммы в этом случае сразу вытекает из леммы 2. Лемма доказана.

Доказательство предложения 1. Прежде всего пусть x — произвольная точка из $[0, \infty)$. Рассмотрим представление $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}$, $j \geq 0$, у которого нет двойственного $(m+1)$-ичного представления. Тогда неоднозначность представления x в виде указанной суммы возникает в случае, когда $\sigma_1 = 0$, при этом $j \geq 1$. Но если $\sigma_1 = 0$, то из леммы 1 следует, что $\Phi_j((\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)) = \Phi_{j-1}((\sigma_2, \sigma_3, \dots))$. Отсюда, используя определение Ψ, получаем, что $\Psi(x)$ определяется однозначно.

Рассмотрим случай, когда x имеет двойственное $(m+1)$-ичное представление, т. е. x можно представить в виде $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}$, $j \geq 0$, где $\sigma_1 \dots \sigma_j \dots$ такие, что $\sigma_n = 0$ при всех n начиная с некоторого номера $l \geq 1$, а $\sigma_l \neq 0$. Воспользовавшись теоремой 4, получим

$$\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l, 0, 0, 0, \dots)) = T_{\sigma_1}^{(j)} T_{\sigma_2}^{(j)} \dots T_{\sigma_l}^{(j)}(x_0),$$

$$\Phi_j((\sigma_1,\dots,\sigma_l-1,m,m,m,\dots))=T^{(j)}_{\sigma_1}T^{(j)}_{\sigma_2}\dots T^{(j)}_{\sigma_l-1}(x^{(j)}_m).$$

Далее, используя лемму 2, выводим

$$\Phi_j((\sigma_1,\dots,\sigma_l,0,0,0,\dots))=\Phi_j((\sigma_1,\dots,\sigma_l-1,m,m,m,\dots)).$$

Стало быть, и в этом случае $\Psi(x)$ определяется однозначно.

Пусть x — произвольная точка из $(-\infty,0]$. Тогда $\Psi(x)=S(\Psi(-x))$. Уже доказано, что $\Psi(-x)$ определяется однозначно, поэтому и $\Psi(x)$ определено однозначно. Предложение доказано.

Для каждого $j=0,1,2,\dots$ определим расстояние d_j на Σ таким образом. Пусть $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$ и $\tau=\tau_1\tau_2\tau_3\dots$, тогда положим

$$d_j(\sigma,\tau)=\left|\sum_{i=1}^{\infty}(\sigma_i-\tau_i)/(m+1)^{i-j}\right|. \tag{9}$$

Лемма 5. *Для каждого $j=0,1,2,\dots$ отображение $\Phi_j:(\Sigma,d_j)\to(A_j,\rho)$ непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим $\nu_0=(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$. Прежде всего рассмотрим тот случай, когда не существует $k\geq 1$ такого, что $\alpha_j=0$ для всех $j\geq k$, и не существует $k\geq 1$ такого, что $\alpha_j=m$ для всех $j\geq k$. Но мы не исключаем случай, когда $\alpha_j=0$ для всех $j\geq 1$, а также когда $\alpha_j=m$ для всех $j\geq 1$. В силу теоремы 4 для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при всех $\beta\in\Sigma$, удовлетворяющих неравенству $d(\beta,\nu_0)<\delta$, выполняется $|\Phi_j(\beta)-\Phi_j(\nu_0)|<\varepsilon$. Существует целое число $k\geq 1$ такое, что $r^k\leq\delta$. В силу определения расстояния d для того чтобы выполнялось неравенство $d(\beta,\nu_0)\leq r^k$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы k первых компонент последовательностей ν_0 и β совпадали. Заметим, что существует $n\geq 1$ такое, что $\alpha_{j+n+k}>0$, и, кроме того, существует $n_1>n$ такое, что $\alpha_{j+n_1+k}<m$. Теперь рассмотрим множество всех последовательностей $\gamma\in\Sigma$, удовлетворяющих неравенству $d_j(\gamma,\nu_0)<1/(m+1)^{j+n_1+k}$. Используя определение расстояния d_j, получаем, что по крайней мере $j+n+k-1$ компонент последовательностей γ и α_0 совпадают, но так как $j+n+k-1\geq k$, то $|\Phi_j(\gamma)-\Phi_j(\nu_0)|<\varepsilon$.

Пусть последовательность ν_0 имеет вид $(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, где $\alpha_i=0$ для всех $i\geq l+1$ и $\alpha_l>0$ при некотором $l\geq 1$. Наряду с последовательностью ν_0 рассмотрим последовательность $\nu_1=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_l-1,m,m,\dots)$. Обратим внимание на то, что $\Phi_j(\nu_0)=\Phi_j(\nu_1)$, $j=0,1,2,\dots$. В силу теоремы 4 для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при всех $\beta,\gamma\in\Sigma$, удовлетворяющих неравенствам $d(\beta,\nu_0)<\delta$ и $d(\gamma,\nu_1)<\delta$, выполняются соотношения $|\Phi_j(\beta)-\Phi_j(\nu_0)|<\varepsilon$ и $|\Phi_j(\gamma)-\Phi_j(\nu_1)|<\varepsilon$ соответственно. Найдется целое число $k\geq 1$ такое, что $r^k\leq\delta$. В силу определения расстояния d для того чтобы выполнялись неравенства $d(\beta,\nu_0)\leq r^k$ и $d(\gamma,\nu_1)\leq r^k$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы k первых компонент последовательностей ν_0 и β и соответственно ν_1 и γ совпадали. Рассмотрим множество всех последовательностей $\theta\in\Sigma$, удовлетворяющих неравенству $d_j(\theta,\nu_0)<1/(m+1)^{l+k}$. Воспользовавшись определением d_j, а также предыдущим неравенством, получим, что хотя бы k первых компонент последовательности θ совпадают с соответствующими компонентами либо последовательности ν_0 либо ν_1, значит, $|\Phi_j(\theta)-\Phi_j(\nu_0)|<\varepsilon$. Аналогично рассматривается случай, когда ν_0 имеет вид $(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$, где $\alpha_i=m$ для всех $i\geq l+1$, $l\geq 1$ и $\alpha_l<m$. Лемма доказана.

Определим два множества Σ' и Σ''. Удалим из множества всех последовательностей Σ последовательности вида $(i_1, i_2, \dots)$, где существует $k \geq 1$ такое, что $i_j = m$ при всех $j \geq k$, за исключением последовательности, состоящей только из m: $(m, m, \dots, m, \dots)$. Полученное множество обозначим через Σ'. Удалим из множества всех последовательностей Σ последовательности вида $(i_1, i_2, \dots)$, где существует $k \geq 1$ такое, что $i_j = 0$ при всех $j \geq k$, за исключением последовательности, состоящей только из 0: $(0, 0, \dots, 0, \dots)$. Полученное множество обозначим через Σ''.

Лемма 6. *Для каждого* $j = 0, 1, 2, \dots$ *отображение* Φ_j*, действующее из* (Σ', d_j) *на* (A_j, ρ)*, а также отображение* Φ_j*, действующее из* (Σ'', d_j) *на* (A_j, ρ)*, является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Для каждого $j = 0, 1, 2, \dots$ определим множество

$$B_0^{(j)} = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \bigl(T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_i^{(j)}(A_j)\bigr)$$
$$\bigcup \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{0 \leq i_1, i_2, \dots, i_l \leq m} \bigcup_{i=1}^{m} \bigl(T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_i^{(j)}(A_j)\bigr) \right). \tag{10}$$

Покажем, что $\Phi_j^{-1} : (A_j, \rho) \to (\Sigma', d_j)$, $j \geq 0$, непрерывно. Пусть $z_0 \in A_j \setminus \bigl(B_0^{(j)} \cup \{x_0, x_m^{(j)}\}\bigr)$, тогда в силу определения $B_0^{(j)}$ получаем, что прообраз точки z_0 относительно отображения Φ_j состоит ровно из одной символьной последовательности: $\Phi_j^{-1}(z_0) = (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$. Покажем, что для любого $k \geq 1$ существует $\delta > 0$ такое, что $B_{z_0}^{\delta} = \{z \in A_j : \rho(z, z_0) < \delta\} \subseteq T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)}(A_j)$. Введем в рассмотрение следующие значения:

$$\delta_1 = \rho\Bigl(z_0, \bigcup_{s \neq i_k} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Bigr),$$
$$\delta_2 = \rho\Bigl(z_0, \bigcup_{s \neq i_{k-1}} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-2}}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Bigr),$$
$$\dots, \delta_{k-1} = \rho\Bigl(z_0, \bigcup_{s \neq i_2} T_{i_1}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Bigr),\ \delta_k = \rho\Bigl(z_0, \bigcup_{s \neq i_1} T_s^{(j)}(A_j)\Bigr). \tag{11}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$, заметим, что $\delta > 0$ в силу того, что $z_0 \notin B_0^{(j)}$. Исходя из построения δ, для любой точки z из множества A_j такой, что $\rho(z_0, z) < \delta$, получаем последовательно

$$z \in T_{i_1}^{(j)}(A_j),\ z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)}(A_j), \dots, z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)}(A_j).$$

Итак, $B_{z_0}^{\delta} \subseteq T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)}(A_j)$.

Снова рассмотрим $\Phi_j^{-1}(z_0) = (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$. Выберем произвольное $k \geq 1$. В силу того, что $z_0 \in A_j \setminus \bigl(B_0^{(j)} \cup \{x_0, x_m^{(j)}\}\bigr)$, можно выбрать $l \geq 1$ такое, что среди членов последовательности $i_{k+1}, \dots, i_{k+l}$ не все будут равны 0 или m одновременно. Рассмотрим произвольное $z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k+l}}^{(j)}(A_j)$. Докажем, что первые k значений $\Phi_j^{-1}(z)$ равны $i_1, i_2, \dots, i_k$, и только этим значениям. Если предположить, что существует натуральное n, не превосходящее k и такое, что $z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{n-1}}^{(j)} T_{i_n}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{n-1}}^{(j)} T_{p_n}^{(j)}(A_j)$, где

$p_n \neq i_n$, то с необходимостью $p_n = i_n - 1$ или $p_n = i_n + 1$. Пусть, скажем, $p_n = i_n - 1$. Из леммы 4 следует, что в этом случае $\Phi_j^{-1}(z) = \{(i_1, i_2, \dots, i_n - 1, m, m, \dots, m, \dots), (i_1, i_2, \dots, i_n, 0, 0, \dots, 0, \dots)\}$, но это противоречит тому, что $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+l}, \dots) \in \Phi_j^{-1}(z)$, поскольку, еще раз повторим, среди членов последовательности $i_{k+1}, \dots, i_{k+l}$ не все будут равны 0 или m одновременно. Аналогично приходим к противоречию в случае $p_n = i_n + 1$.

Докажем, что $z_0 \in A_j \setminus B_0^{(j)}$ является точкой непрерывности $\Phi_j^{-1} : (A_j, \rho) \to (\Sigma', d_j)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем k так, чтобы $1/(m+1)^k < \varepsilon$. Пусть $\Phi_j^{-1}(z_0) = (i_1, \dots, i_j, \dots, i_{j+k}, i_{j+k+1}, \dots, i_{j+k+l}, \dots)$, при этом $i_{j+k+1}, \dots, i_{j+k+l}$ не все равны 0 или m одновременно. Мы доказали что существует $\delta > 0$ такое, что $B_{z_0}^\delta \subseteq T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_j}^{(j)} T_{i_{j+1}}^{(j)} \dots T_{i_{j+k}}^{(j)} ... T_{i_{j+k+l}}^{(j)}(A_j)$. Воспользовавшись предыдущим рассуждением, получаем, что для любого $z \in B_{z_0}^\delta$ первые $j+k$ цифр $(m+1)$-ичного разложения $\Phi_j^{-1}(z)$ совпадают с соответствующими цифрами в $(m+1)$-ичном разложении числа $\Phi_j^{-1}(z_0)$, поэтому выполняется неравенство $\left|\Phi_j^{-1}(z) - \Phi_j^{-1}(z_0)\right| \leq 1/(m+1)^k < \varepsilon$. Аналогично доказывается, что и x_0, $x_m^{(j)}$ являются точками непрерывности.

Пусть $z_0 \in B_0^{(j)}$, тогда

$$\Phi_j^{-1}(z_0) = \{(i_1, i_2, \dots, i_k - 1, m, m, \dots), (i_1, i_2, \dots, i_k, 0, 0, \dots)\}, \tag{12}$$

где $k \geq 1$ и $i_k > 0$.

Рассмотрим множество

$$B = T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)} T_0^{(j)} T_0^{(j)} \dots T_0^{(j)}(A_j) \cup T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k-1}^{(j)} T_m^{(j)} T_m^{(j)} \dots T_m^{(j)}(A_j),$$

где $T_0^{(j)}$ и $T_m^{(j)}$ повторяются $l \geq 2$ раз. Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что $B_{z_0}^\delta = \{z \in A_j : \rho(z, z_0) < \delta\} \subseteq B$. Рассмотрим

$$\delta_1 = \rho\Big(z_0, \bigcup_{s \neq i_1} T_s^{(j)}(A_j)\Big), \quad \delta_2 = \rho\Big(z_0, \bigcup_{s \neq i_2} T_{i_1}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Big),$$

$$\dots, \delta_{k-1} = \rho\Big(z_0, \bigcup_{s \neq i_{k-1}} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-2}}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Big),$$

$$\delta_k = \rho\Big(z_0, \bigcup_{s \neq i_k, s \neq i_k - 1} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Big),$$

$$\delta_{k+1} = \rho\Big(z_0, \bigcup_{s \neq 0} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j) \cup \bigcup_{s \neq m} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k-1}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Big),$$

$$\dots, \delta_{k+l} = \rho\Big(z_0, \bigcup_{s \neq 0} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k}^{(j)} T_0^{(j)} \dots T_0^{(j)} T_s^{(j)}(A_j) \cup \bigcup_{s \neq m} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k-1}^{(j)} T_m^{(j)} \dots T_m^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)\Big).$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_{k+l}\}$. В силу (12) получим, что $\delta > 0$. Исходя из построения δ, для любой точки z из множества A_j такой, что $\rho(z_0, z) < \delta$, получаем последовательно

$$z \in T_{i_1}^{(j)}(A_j), \quad z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)}(A_j), \dots,$$

$$z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k}^{(j)} T_0^{(j)} \dots T_0^{(j)}(A_j) \cup T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k-1}^{(j)} T_m^{(j)} \dots T_m^{(j)}(A_j).$$

Итак, $B^{\delta}_{z_0} \subseteq B$.

Рассмотрим произвольную точку $z \in B$. Используя лемму 4, выводим, что первые $k+l-1$ значений $\Phi_j^{-1}(z)$ могут быть либо $(i_1, i_2, \dots, i_k - 1, m, \dots, m)$, либо $(i_1, i_2, \dots, i_k, 0, \dots, 0)$, где m и 0 соответственно повторяются $l-1$ раз. Далее, используя определение метрики d_j, получаем, что $z_0 \in B_0^{(j)}$ является точкой непрерывности.

Совершенно аналогично доказывается, что $\Phi_j^{-1} : (A_j, \rho) \to (\Sigma'', d_j)$, $j \geq 0$, непрерывно.

Непрерывность отображений $\Phi_j : (\Sigma', d_j) \to (A_j, \rho)$ и $\Phi_j : (\Sigma'', d_j) \to (A_j, \rho)$ следует из леммы 5. Лемма доказана.

Доказательство предложения 2. Докажем непрерывность отображения $\Psi : ([0, +\infty), \lambda) \to (E, \rho)$. Пусть x — произвольная точка из $[0, +\infty)$. Рассмотрим $(m+1)$-ичное представление x:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}. \tag{13}$$

Если x нельзя представить в виде конечной $(m+1)$-ичной дроби, то указанное представление (13) единственно. Если $j \geq 1$ в (13), то считаем, что $\sigma_1 \neq 0$. Тогда непрерывность Ψ в x сразу следует из непрерывности отображения $\Phi_j : (\Sigma, d_j) \to (A_j, \rho)$ (см. лемму 5) в точке $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots) \in \Sigma$. Обратим внимание на то, что непрерывность в точке 0 также сразу вытекает из непрерывности отображения $\Phi_0 : (\Sigma, d_0) \to (A_0, \rho)$.

Пусть все σ_i равны нулю начиная с некоторого $l \geq 2$ и $\sigma_{l-1} > 0$, т. е. x имеет представление в виде конечной $(m+1)$-ичной дроби (мы исключаем случай, когда $x = 0$). Если в представлении (13) берется $j \geq 1$, то σ_1 мы считаем отличным от нуля. Непрерывность справа и слева в точке x вытекает из непрерывности $\Phi_j : (\Sigma', d_j) \to (A_j, \rho)$ и $\Phi_j : (\Sigma'', d_j) \to (A_j, \rho)$ соответственно. Непрерывность $\Psi : ((-\infty, 0], \lambda) \to (S(E), \rho)$ следует из того, что для любого $x \in (-\infty, 0]$ выполняется равенство $\Psi(x) = S \circ \Psi(-x)$.

Покажем, что Ψ является взаимно однозначным отображением $\mathbb{R}$ на E'. Из определения отображения Ψ, а также из теоремы 4 следует, что $\Psi([0, +\infty)) = E$, кроме того, поскольку для всех $x \in (-\infty, 0]$ выполняется равенство $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$, имеем соотношение $\Psi((-\infty, 0]) = S(E)$. Следовательно, $\Psi(\mathbb{R}) = E'$.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $x, y \in [0, +\infty)$, при этом $x < y$. Предположим, что $\Psi(x) = \Psi(y)$. Рассмотрим $(m+1)$-ичные представления для x и y:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i/(m+1)^{i-j}.$$

Тогда из определения Ψ следует, что

$$\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots)) = \Phi_j((\tau_1, \dots, \tau_j, \dots)).$$

Но из теоремы 4 и леммы 4 вытекает, что одна из последовательностей $(\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots)$ или $(\tau_1, \dots, \tau_j, \dots)$ имеет вид $(i_1, i_2, \dots i_k, 0, 0, 0, \dots)$, а другая — $(i_1, i_2, \dots, i_k - 1, m, m, m, \dots)$, $i_k > 0$, $k \geq 1$, откуда получаем противоречие с тем, что $x \neq y$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}$ — две произвольные различные точки. Тогда доказательство того, что $\Psi(x) \neq \Psi(y)$, сводится к предыдущему случаю (когда $x, y \in [0, +\infty)$)

с помощью равенства $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$, которое выполняется для всех $x \in (-\infty, 0]$.

Установим непрерывность $\Psi^{-1} : (E, \rho) \to ([0, +\infty), \lambda)$. Пусть x_0 — произвольная точка множества E. Из определения E следует существование $j \geq 0$ такого, что $x_0 \in A_j$. Возьмем произвольное $\gamma > 0$ и рассмотрим γ-окрестность точки x_0 на E: $U_\gamma = \{x \in E : \rho(x, x_0) < \gamma\}$. Из того, что множество A_0 содержит по крайней мере две различные точки, выводим, что $c := \mathrm{diam}(A_0) > 0$, поэтому $\mathrm{diam}(A_j) = c/r^j$ (см. первое равенство в условии согласования (4), т. е. $\mathrm{diam}(A_j) \to +\infty$ при $j \to +\infty$). Следовательно, существует $k \geq j$ такое, что $U_\gamma \subseteq A_k$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и попытаемся найти $0 < \delta < \gamma$ такое, что для всех $x \in E$ таких, что $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется неравенство $|\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(x_0)| < \varepsilon$. Отображения $\Phi_k^{-1} : (A_k, \rho) \to (\Sigma', d_k)$ и $\Phi_k^{-1} : (A_k, \rho) \to (\Sigma'', d_k)$ непрерывны, поэтому существует $0 < \delta < \gamma$ такое, что для всех $x \in E$ таких, что $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется $d_k\bigl(\Phi_k^{-1}(x), \Phi_k^{-1}(x_0)\bigr) < \varepsilon$, осталось заметить, что $d_k\bigl(\Phi_k^{-1}(x), \Phi_k^{-1}(x_0)\bigr) = |\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(x_0)|$.

Пусть $x \in S(E)$, тогда $\Psi^{-1}(x) = -\Psi^{-1} \circ S^{-1}(x)$. Из этого представления следует непрерывность Ψ^{-1} на $S(E)$. Предложение доказано.

Введем обозначения:

$$b = \min_{x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(1)}(A_1)} \rho(x, x_0), \tag{14}$$

$$B = \max_{x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(1)}(A_1)} \rho(x, x_0). \tag{15}$$

Заметим, что $b > 0$, поскольку $x_0 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(1)}(A_1)$ (см. первое равенство в лемме 3).

Лемма 7. *Для любого* $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(k)}(A_k)$, $k \geq 1$, *выполняется соотношение* $br^{-k+1} \leq \rho(x, x_0) \leq Br^{-k+1}$.

Доказательство. Из условий согласования (4) следует, что если

$$x \in \bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(k)}(A_k),$$

то $T_0^{(k)}(x) \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(k-1)}(A_{k-1})$. Далее, пользуясь тем, что x_0 — неподвижная точка преобразования $T_0^{(k)}$, получаем

$$\rho\bigl(x_0, T_0^{(k)}(x)\bigr) = \rho\bigl(T_0^{(k)}(x_0), T_0^{(k)}(x)\bigr) = r\rho(x_0, x).$$

Следовательно, для любого $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(k)}(A_k)$ имеет место равенство $\rho(x_0, x) = r^{-1}\rho\bigl(x_0, T_0^{(k)}(x)\bigr)$ из которого следует утверждение леммы.

Лемма 8. *Для любого* $x \in \bigcup_{i=1}^{m} T_0^{-k} \circ T_i(A_0)$, $k \le 0$, *выполняется соотношение* $br^{-k+1} \le \rho(x, x_0) \le Br^{-k+1}$.

Доказательство. Пусть $k = 0$ и $x \in \bigcup_{i=1}^{m} T_i(A_0)$, тогда существует $y \in \bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(1)}(A_1)$ такое, что $T_0^{(1)}(y) = x$. Пользуясь тем, что x_0 — неподвижная точка преобразования $T_0^{(1)}$, получаем $\rho(x_0, x) = \rho\big(x_0, T_0^{(1)}(y)\big) = \rho\big(T_0^{(1)}(x_0), T_0^{(1)}(y)\big) = r\rho(x_0, y)$, поэтому $\rho(x_0, x) = r\rho(x_0, y)$. Последнее равенство влечет утверждение леммы для случая $k = 0$. Пусть $k < 0$. В этом случае $T_0^k(x) \in \bigcup_{i=1}^{m} T_i(A_0)$. Тогда существует $y \in \bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(1)}(A_1)$ такое, что $\rho\big(x_0, T_0^k(x)\big) = r\rho(x_0, y)$, кроме того, выполняются равенства $\rho\big(x_0, T_0^k(x)\big) = \rho\big(T_0^k(x_0), T_0^k(x)\big) = r^k\rho(x_0, x)$. Следовательно, $\rho(x_0, x) = r^{-k+1}\rho(x_0, y)$, откуда получаем утверждение леммы.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$.

Лемма 9. *Пусть* $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$ *— некоторая последовательность действительных чисел. Тогда для любого натурального* n *выполняются неравенства*

$$br|Z_n|^{1/d} \le \rho(\Psi(|Z_n|), x_0) \le B|Z_n|^{1/d},$$

где $d = -\ln(m+1)/\ln r$.

Доказательство. Если $Z_n = 0$, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай, когда $|Z_n| > 0$. Существует целое k такое, что

$$(m+1)^{k-1} \le |Z_n| < (m+1)^k,$$

значение k в этом случае равно $[\log_{m+1}|Z_n|]+1$ (здесь через $[z]$ обозначена целая часть числа z). Кроме того, в силу определения отображения Ψ если $k \ge 1$, то $\Psi(|Z_n|) \in A_k$, более того,

$$\Psi(|Z_n|) \in \bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(k)}(A_k). \tag{16}$$

Подробнее остановимся на соотношении (16). Заметим, что $T_0^{(k)}(A_k) = A_{k-1}$ (см. (4)), кроме того, $|Z_n|$ имеет ровно k $(m+1)$-ичных знаков в целой части. Следовательно, в силу определения Ψ получим $\Psi(|Z_n|) \notin A_{k-1} \setminus (A_k \cap A_{k-1})$, стало быть, выполняется (16).

Если $k \le 0$, то $1 \le |Z_n|(m+1)^{-k+1} < m+1$. Поэтому из определения Ψ, теоремы 4 и леммы 1 следует, что $\Psi(|Z_n|) = T_0^{-k+1}(\Psi(|Z_n|(m+1)^{-k+1}))$. Заметим, что $\Psi(|Z_n|(m+1)^{-k+1}) \in \bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(1)}(A_1)$ (см. соотношение (16)), поэтому $\Psi(|Z_n|) \in T_0^{-k+1}\left(\bigcup_{i=1}^{m} T_i^{(1)}(A_1)\right)$ или $\Psi(|Z_n|) \in T_0^{-k}\left(\bigcup_{i=1}^{m} T_0 \circ T_i^{(1)}(A_1)\right)$. Используя условия согласования (4), получаем

$$\Psi(|Z_n|) \in \bigcup_{i=1}^{m} T_0^{-k} \circ T_i(A_0).$$

Из лемм 7 и 8 выводим неравенство

$$br^{-[\log_{m+1}|Z_n|]} \le \rho(\Psi(|Z_n|), x_0) \le Br^{-[\log_{m+1}|Z_n|]}. \tag{17}$$

Из (17) получаем утверждение леммы.

Перейдем к доказательству утверждений для несвязного случая.

Доказательство предложения 3. Рассмотрим случай $x \in [0,+\infty)$. Прежде всего пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}$, $j \geq 0$, не имеет двойственного $(m+1)$-ичного представления. Неоднозначность представления x в виде указанной суммы возникает в случае, когда $\sigma_1 = 0$, при этом $j \geq 1$. Но из леммы 1 следует, что $\Phi_j((\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)) = \Phi_{j-1}((\sigma_2, \sigma_3, \dots))$. Отсюда, используя определение Ψ, получаем, что $\Psi(x)$ определяется однозначно.

Пусть x имеет двойственное $(m+1)$-ичное представление, т. е. x можно представить в виде $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}$, $j \geq 0$, где $\sigma_1 \dots \sigma_j \dots$ такие, что $\sigma_n = 0$ при всех n начиная с некоторого номера $l \geq 1$, а $\sigma_l \neq 0$. Тогда $\Psi(x)$ состоит из ровно двух различных точек, а именно

$$\Psi(x) = \{\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l, 0, 0, 0, \dots)), \Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l - 1, m, m, m, \dots))\},$$

причем в случае, когда $j \geq 1$, опять в силу леммы 1 можно считать, что $\sigma_1 \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда $x \in (-\infty, 0]$. Если x не имеет двойственного $(m+1)$-ичного представления, то $\Psi(x)$ определяется однозначно, это следует из того, что $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$. Если x имеет двойственное $(m+1)$-ичное представление, то $\Psi(-x)$ состоит из ровно двух точек, поэтому $\Psi(x)$ состоит из двух различных точек, так как $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$. Предложение доказано.

Доказательство предложения 4. Непрерывность справа и слева функций $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ в точках с двойственным $(m+1)$-ичным представлением, непрерывность этих функций в точках, не имеющих двойственного $(m+1)$-ичного представления сразу следует из непрерывности $\Phi_j : (\Sigma, d) \to (A_j, \rho)$, $j \geq 0$, и определения метрики d.

Покажем, например, что $\Psi^{(1)}$ непрерывна справа на $[0, +\infty)$ в точках с двойственным $(m+1)$-ичным представлением. Пусть $x \geq 0$ такая точка. Для любого натурального n можно подобрать δ так, что все точки из $[x, x+\delta)$ имеют n первых совпадающих $(m+1)$-ичных знаков, но это означает, что соответствующие этим точкам символьные последовательности можно сделать сколь угодно близкими в смысле метрики d. Осталось воспользоваться определением Ψ и непрерывностью $\Phi_j : (\Sigma, d) \to (A_j, \rho)$, $j \geq 0$.

Покажем, что $\Psi^{(1)}$ непрерывна слева на $(-\infty, 0]$ в точках с двойственным $(m+1)$-ичным представлением. Пусть $x \in (-\infty, 0]$, тогда выполняется равенство $\Psi^{(1)}(x) = S(\Psi^{(1)}(-x))$ (см. определение Ψ), из последнего равенства вытекает непрерывность слева в точке x. Предложение доказано.

Доказательство предложения 5. Покажем, что Φ_j^{-1} является непрерывным отображением пространства (A_j, ρ) на пространство (Σ, d_j) (метрика d_j определяется в (9)). Отметим, что Φ_j^{-1} является непрерывным отображением (A_j, ρ) на (Σ, d), где на символьном пространстве рассматривается метрика d. Возьмем произвольную точку $x_0 \in A_j$. Для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, x_0) < \delta$, выполняется $d(\Psi^{-1}(x), \Psi^{-1}(x_0)) < \varepsilon$. Из определения метрики d следует, что для любого натурального N при достаточно малом ε первые N символов в последовательностях $\Psi^{-1}(x)$ и $\Psi^{-1}(x_0)$ совпадают, но это означает, что и $d_j(\Psi^{-1}(x), \Psi^{-1}(x_0))$ можно сделать сколь угодно малым. Из доказанной непрерывности Φ_j^{-1}, а также из определения Ψ следует непрерывность

$\Psi^{-1} : (E, \rho) \to ([0, +\infty), \lambda)$. Пусть $x \in S(E)$, тогда $\Psi^{-1}(x) = -\Psi^{-1} \circ S^{-1}(x)$, из этого представления вытекает непрерывность Ψ^{-1} на $S(E)$.

Вторая часть предложения, т. е. то, что отображение $\Psi : (\mathbb{R}, \lambda) \to (E', f)$ непрерывно, сразу следует из определения метрики f. Предложение доказано.

Доказательство предложения 6. В случае, если A_0 несвязное, будем считать, что Ψ совпадает с $\Psi^{(1)}$. Это нисколько не ограничивает общности, поскольку $\Psi(\mathbb{R})$ и $\Psi^{(1)}(\mathbb{R})$ отличаются лишь на счетное множество точек.

Прежде всего докажем предложение для неотрицательных x, y. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(m+1)^i}$, $n \geq 1$, $0 \leq \alpha_i \leq m$ и $y = x + \frac{1}{(m+1)^n}$. Покажем, что

$$\mu^d(\Psi([x, y))) = 1/(m+1)^n. \tag{18}$$

Действительно, из построения Ψ следует, что $\Psi([x, y)) = T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_n}(A_0)$, но тогда из предложения 3 получаем равенство $\mu^d(\Psi([x, y))) = r^{nd}$. Осталось вспомнить, что $d = -\ln(m+1)/\ln r$.

Рассмотрим произвольный промежуток $[x, y)$. Его можно представить в виде объединения не более чем счетного числа попарно не пересекающихся промежутков вида $\left[x + \frac{k}{(m+1)^n}, x + \frac{k+1}{(m+1)^n}\right)$, $k = 0, 1, \dots,$ $n = 0, 1, \dots.$ Осталось воспользоваться счетной аддитивностью меры μ^d на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}$ и соотношением (18).

Докажем предложение для неположительных x, y. В силу определения Ψ имеем $\Psi([x, y)) = S(\Psi((-y, -x]))$, где S — изометрическое преобразование, тем самым, представленный случай свелся к предыдущему.

Пусть $x < 0$ и $y > 0$, тогда $\Psi([x, y)) = \Psi([x, 0]) \cup \Psi([0, y))$, следовательно, этот случай свелся к двум предыдущим. Предложение доказано.

Доказательство следующих трех лемм полностью аналогично доказательству лемм 7–9.

Лемма 10. *Для любого* $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(k)}(A_k)$, $k \geq 1$, *выполняется соотношение* $br^{-k+1} \leq \rho(x, x_0) \leq Br^{-k+1}$.

Лемма 11. *Для любого* $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_0^{-k} \circ T_i(A_0)$, $k \leq 0$, *выполняется соотношение* $br^{-k+1} \leq \rho(x, x_0) \leq Br^{-k+1}$.

Лемма 12. *Пусть* $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$ — *некоторая последовательность действительных чисел. Тогда для любого натурального* n *выполняются неравенства*

$$br|Z_n|^{1/d} \leq \rho(\Psi^{(1)}(|Z_n|), x_0) \leq B|Z_n|^{1/d},$$

где $d = -\ln(m+1)/\ln r$.

Лемма 13. *Пусть* $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$ — *некоторая последовательность действительных чисел. Тогда для любого натурального* n *выполняются неравенства*

$$br|Z_n|^{1/d} \leq \rho(\Psi^{(2)}(|Z_n|), x_0) \leq B|Z_n|^{1/d},$$

где $d = -\ln(m+1)/\ln r$.

Доказательство. Если $Z_n = 0$, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай, когда $|Z_n| > 0$. Существует целое k такое, что $(m+1)^{k-1} < |Z_n| \leq (m+1)^k$, значение k в этом случае удовлетворяет неравенству $\log_{m+1}|Z_n|$

$\le k < \log_{m+1}|Z_n|+1$. Далее, если $k \ge 0$, то $\Psi^{(2)}(|Z_n|) \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_i^{(k)}(A_k)$; если $k < 0$, то $\Psi^{(2)}(|Z_n|) \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} T_0^{-k} \circ T_i(A_0)$. Используя леммы 10, 11, получаем неравенство

$$br^{-\log_{m+1}|Z_n|+1} \le \rho(\Psi^{(2)}(|Z_n|), x_0) \le Br^{-\log_{m+1}|Z_n|}. \tag{19}$$

Из (19) выводим утверждение леммы.

Следующие утверждения доказывается как для связного, так и для несвязного случаев.

Лемма 14. *Пусть ζ_n, $n = 0, 1, \dots,$ — последовательность случайных величин такая, что $c_1(\mathbf{E}(\zeta_n)^2)^{1/d} \le \mathbf{E}|\zeta_n|^{2/d} \le c_2(\mathbf{E}(\zeta_n)^2)^{1/d}$, где c_1 и c_2 — положительные константы и $d = -\ln(m+1)/\ln r$. Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$b^2r^2c_1(\mathbf{E}(\zeta_n)^2)^{1/d} \le \mathbf{E}(\rho(\Psi^{(k)}(|\zeta_n|), x_0))^2 \le c_2B^2(\mathbf{E}(\zeta_n)^2)^{1/d}, \quad k = 1, 2,$$

где b и B — константы, определенные выше (см. (14), (15)).

Доказательство. Из леммы 9 вытекают следующие неравенства:

$$b^2r^2\mathbf{E}|\zeta_n|^{2/d} \le \mathbf{E}\rho^2(\Psi(|\zeta_n|), x_0) \le B^2\mathbf{E}|\zeta_n|^{2/d}.$$

Из лемм 12, 13 получаем неравенства

$$b^2r^2\mathbf{E}|\zeta_n|^{2/d} \le \mathbf{E}\rho^2(\Psi^{(1)}(|\zeta_n|), x_0) \le B^2\mathbf{E}|\zeta_n|^{2/d},$$
$$b^2r^2\mathbf{E}|\zeta_n|^{2/d} \le \mathbf{E}\rho^2(\Psi^{(2)}(|\zeta_n|), x_0) \le B^2\mathbf{E}|\zeta_n|^{2/d}.$$

Используя неравенства в условии леммы, а также то, что в случае связного пространства (E', ρ) функции $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ совпадают, получаем утверждение леммы.

Следующие две леммы можно найти, например, в [12, с. 89, 99]). В леммах 15–17 через S_n обозначим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $n = 1, 2, \dots,$ и полагаем $S_0 = 0$.

Лемма 15. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\mathbf{E}\xi_k = 0$ $(k = 1, \dots, n)$, $p \ge 2$. Тогда*

$$\mathbf{E}|S_n|^p \le c(p)n^{p/2-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}|\xi_k|^p,$$

где $c(p)$ — положительная константа, зависящая только от p.

Лемма 16. *Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, $\mathbf{E}|\xi_1|^p < \infty$, $k = 1, \dots, n$. Положим*

$$\Lambda_n(y, p) = \left(\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<y} x^2 d\overline{V}_k(x)\right)^{p/2} + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|\ge y} |x|^p d\overline{V}_k(x)$$

и $\lambda_n(p) = \inf\limits_{y\ge 0}\Lambda_n(y, p)$, где $\overline{V}_k(x)$ — функция распределения симметризованной случайной величины ξ_k.

Если $1 \le p < 2$ и $\mathbf{E}\xi_k = 0$ для всех k, то $c_1(p)\lambda_n(p) \le \mathbf{E}|S_n|^p \le c_2(p)\lambda_n(p)$.

Если $0 < p < 1$ и каждая случайная величина ξ_k имеет нуль своей медианой (т. е. $\mathbf{P}(\xi_k \ge 0) = \mathbf{P}(\xi_k \le 0) = 1/2$), то $c_1(p)\lambda_n(p) \le \mathbf{E}|S_n|^p \le 2\lambda_n(p)$. Здесь $c_1(p)$, $c_2(p)$ — положительные постоянные, зависящие только от p.

Используя леммы 15 и 16, докажем лемму 17.

Лемма 17. *Пусть* $\{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, *— независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Тогда если* $\mathbf{E}|\xi_1|^{\max(2,p)} < \infty$ *при* $p \geq 1$, *то имеют место неравенства*

$$c_1 n^{p/2} \leq \mathbf{E}|S_n|^p \leq c_2 n^{p/2}, \tag{20}$$

где c_1, c_2 *— положительные константы, зависящие от распределения* ξ_1.

Если к тому же случайная величина ξ_1 *имеет нуль своей медианой, то* (20) *выполняется и при* $0 < p < 1$.

Доказательство. Пусть $p \geq 2$, тогда, используя неравенство Ляпунова (см., например, [13, с. 210]), получаем $\left(\mathbf{E}S_n^2\right)^{1/2} \leq (\mathbf{E}|S_n|^p)^{1/p}$, откуда следует нижняя оценка для $\mathbf{E}|S_n|^p$ в (20), где $c_1 = 1$. Применяя лемму 15, выводим верхнюю оценку для $\mathbf{E}|S_n|^p$ в (20), где $c_2 = c(p)\mathbf{E}|\xi_1|^p$.

Пусть $0 < p < 2$. Опять используя неравенство Ляпунова, получаем $(\mathbf{E}|S_n|^p)^{1/p} \leq \left(\mathbf{E}S_n^2\right)^{1/2}$. Отсюда вытекает верхняя оценка для $\mathbf{E}|S_n|^p$ в (20) с константой $c_2 = 1$.

Из леммы 16 следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|S_n|^p &\geq c_1(p) \inf_{y\geq 0}\Biggl(n^{p/2}\Biggl(\int\limits_{|x|<y} x^2 d\overline{V_1}(x)\Biggr)^{p/2} + n\int\limits_{|x|\geq y} |x|^p d\overline{V_1}(x)\Biggr)\\ &\geq c_1(p) n^{p/2} \inf_{y\geq 0}\Biggl(\Biggl(\int\limits_{|x|<y} x^2 d\overline{V_1}(x)\Biggr)^{p/2} + \int\limits_{|x|\geq y} |x|^p d\overline{V_1}(x)\Biggr),\end{aligned}$$

где $\overline{V_1}(\cdot)$ — функция распределения симметризованной случайной величины ξ_1, причем при $0 < p < 1$ требуется, чтобы случайная величина ξ_1 имела нуль своей медианой.

Итак,

$$\mathbf{E}|S_n|^p \geq c_1(p) \inf_{y\geq 0}\Biggl(\Biggl(\int\limits_{|x|<y} x^2 d\overline{V_1}(x)\Biggr)^{p/2} + \int\limits_{|x|\geq y} |x|^p d\overline{V_1}(x)\Biggr) n^{p/2}. \tag{21}$$

Заметим, что константа $\inf\limits_{y\geq 0}\bigl(\bigl(\int\limits_{|x|<y} x^2 d\overline{V_1}(x)\bigr)^{p/2} + \int\limits_{|x|\geq y} |x|^p d\overline{V_1}(x)\bigr)$ в правой части неравенства (21) отлична от нуля, так как случайная величина ξ_1 по условию леммы невырожденна. В итоге получили оценку снизу для $\mathbf{E}|S_n|^p$ с константой

$$c_1 = \inf_{y\geq 0}\Biggl(\Biggl(\int\limits_{|x|<y} x^2 d\overline{V_1}(x)\Biggr)^{p/2} + \int\limits_{|x|\geq y} |x|^p d\overline{V_1}(x)\Biggr) c_1(p).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Для $\zeta_n = S_n$, $n = 0, 1, \dots$, выполняется условие леммы 14, так как S_n в силу леммы 17 удовлетворяет неравенству $c_1(\mathbf{E}(S_n)^2)^{p/2} \leq \mathbf{E}|S_n|^p \leq c_2\bigl(\mathbf{E}S_n^2\bigr)^{p/2}$, где $p = 2/d$. Поэтому из леммы 14 выводим, что $b^2 r^2 c_1 n^{1/d} \leq \mathbf{E}\rho^2(\Psi^{(k)}(|\zeta_n|), x_0) \leq c_2 B^2 n^{1/d}$, $k = 1, 2$, где в связном случае отображение $\Psi^{(1)}$ совпадает с $\Psi^{(2)}$. Отсюда, положив $d_1 = b^2 r^2 c_1$ и $d_2 = c_2 B^2$, приходим к заключению теоремы.

Доказательство предложения 7. Будем считать, что $\gamma(t) \subseteq E$ для всех $t \in [0,1]$. Рассмотрим непрерывное отображение $\beta(t) = \Psi^{-1}(\gamma(t))$, $t \in [0,1]$. Существуют точки $t_0, t_1 \in [0,1]$ такие, что $\beta(t_0) < \beta(t_1)$, обозначим $\beta(t_0)$ и $\beta(t_1)$ через m_0 и m_1 соответственно. В силу непрерывности β существует непустое открытое множество U на отрезке $[0,1]$ такое, что $\gamma(U) = \Psi((m_0, m_1))$. Поскольку отображение $\Psi^{-1} : (E', \rho) \to (\mathbb{R}, \lambda)$ непрерывное, множество $\Psi((m_0, m_1))$ открыто относительно топологии, порожденной метрикой ρ, кроме того, существует $j \geq 0$ такое, что $\Psi((m_0, m_1)) \subseteq A_j$. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Psi((m_0, m_1))$, пусть $(i_1, \dots, i_n, \dots) \in \Phi_j^{-1}(x_0)$. Тогда $x_0 \in T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_n}^{(j)}(A_j)$, при этом $\operatorname{diam}\bigl(T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_n}^{(j)}(A_j)\bigr) = r^n \operatorname{diam}(A_j)$, тем самым при достаточно больших n выполняется включение $T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_n}^{(j)}(A_j) \subseteq \Psi((m_0, m_1))$. Но размерность Хаусдорфа не меняется после преобразований подобия, а размерность множества A_j совпадает с размерностью E (см. замечание 1), следовательно, $\dim(E) = \dim(\Psi((m_0, m_1)))$, откуда и вытекает утверждение предложения.

Постановка задачи и формирование направления исследований принадлежит профессору В. А. Селезневу. Доказательство основных результатов осуществил Н. С. Аркашов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зеленый Л. М., Милованов А. В.* Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // Успехи физ. наук. 2004. Т. 174, № 8. С. 819–852.
2. *Учайкин В. В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физ. наук. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876.
3. *Учайкин В. В.* Субдиффузия и устойчивые законы // Журн. эксперим. и техн. физики. 1999. Т. 115, № 6. С. 2113–2132.
4. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
5. *Пьетронеро Л., Тозатти Э.* Фракталы в физике. М.: Мир, 1988.
6. *Заславский Г. М.* Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
7. *Халмош П.* Теория меры. М.: Мир, 1953.
8. *Edgar G.* Measure, topology, and fractal geometry. New York: Springer-Verl., 2008.
9. *Falconer K.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications. London: Wiley, 2008.
10. *Hutchinson J.* Fractals and self similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, N 5. P. 713–747.
11. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
12. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
13. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 13 декабря 2012 г.

Аркашов Николай Сергеевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск 630073;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
nicky1978@mail.ru

Селезнев Вадим Александрович
Новосибирский гос. технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск 630073
selvad@ngs.ru