Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Т. Ш. Кальменов, Н. Е. Токмагамбетов

Аннотация. Для многомерного по пространственному переменному уравнения теплопроводности изучена одна нелокальная начально-краевая задача в нецилиндрической области. Доказано, что тепловой потенциал является единственным классическим решением рассматриваемой нелокальной задачи.

Ключевые слова: многомерное уравнение теплопроводности, нелокальная краевая задача, тепловой потенциал, нецилиндрическая область.

Введение

В работе Т. Ш. Кальменова и Д. Сурагана [1] для произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей S впервые найдено граничное условие объемного потенциала, т. е. доказан тот факт, что для функций $f \in L_2(\Omega)$ объемный потенциал

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x,y) f(y)\, dy$$

является единственным решением уравнения

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

с нелокальным граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{S} \left[\frac{\partial \varepsilon(x,y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS = 0, \quad x \in S,$$

где $\varepsilon(x,y)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, а n — внешняя нормаль. В случае двумерного круга и трехмерного шара найдены собственные значения и собственные функции объемного потенциала, т. е. собственные значения и собственные функции спектральной задачи

$$\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega,$$

с нелокальным граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int\limits_{S} \left[\frac{\partial \varepsilon(x,y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS = 0, \quad x \in S.$$

Эти задачи также представлены в [2]. В [3] для ограниченной односвязной области получены граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения. Отметим работу [4], где для полипараболического уравнения изучен аналогичный вопрос в цилиндрической области. В [5] для решения неоднородного уравнения Гельмгольца в ограниченной области с достаточно гладкой границей предложена новая постановка граничных условий, обладающих свойством подавлять волны, отраженные от границы. Показано, что внутри ограниченной области это решение совпадает с решением задачи, поставленной в неограниченной области с условием излучения Зоммерфельда. В данной статье результаты из [1–5] обобщены на случай оператора параболического типа в нецилиндрической области, а для многомерного по пространственному переменному уравнения теплопроводности изучена одна нелокальная начально-краевая задача в нецилиндрической области.

Основной результат

Пусть дана нецилиндрическая область $Q \equiv \{x \in \Omega,\ t \in (0, \gamma(x))\} = \{t \in (0,T),\ x \in \Omega_t\}$. Здесь $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — ограниченная односвязная область с границей S и $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ — усеченная область Q в момент времени t с достаточно гладкой границей S_t. Рассмотрим следующую нелокальную начально-краевую задачу:

$$\Diamond u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$B_u(x,t) \equiv -\frac{u(x,t)}{2} + \int_0^t \int_{S_\tau} \left[q(x-\xi, t-\tau) u(\xi,\tau) - \varepsilon(x-\xi,t-\tau) \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} \right] dS d\tau = 0,$$

$$(x,t) \in S, \tag{3}$$

где

$$q(x-\xi,t-\tau) = \frac{\partial \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} + \varepsilon(x-\xi,t-\tau)\cos n(\xi),$$

$n(\xi)$ — угол между касательной плоскостью в точке $\xi \in S$ и вектором $\overline{O\xi'}$, ξ' — проекция ξ на Ω-плоскость, $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$ — производная по внешней нормали боковой границы, $\varepsilon(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ — фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности [6] и $\Diamond_{x,t} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$, $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Известно [7], что если $f(x,t) \in C^{\beta,\beta/2}_{x,t}(\overline{Q})$, то $u(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}_{x,t}(\overline{Q})$, где $0 < \beta < 1$.

Приведем основной результат работы.

Теорема. *Тепловой потенциал*

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\Omega_\tau} \varepsilon(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \tag{4}$$

является единственным классическим решением нелокальной начально-краевой задачи (1)–(3).

Доказательство. Так как (4) — несобственный интеграл как интеграл с особенностью, понимаем его как предел

$$u(x,t) = \lim_{\delta \to 0} u_\delta(x,t),$$

где

$$u_\delta(x,t) = \int\limits_0^{t-\delta} d\tau \int\limits_{\Omega_\tau} \varepsilon(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Последний интеграл уже обычный, и в нем возможны все действия, в том числе интегрирование по частям.

Из свойств фундаментального решения оператора теплопроводности [6] имеем

$$\diamondsuit_{x,t}\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = \frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t} - \Delta_x\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = 0,$$

$$\diamondsuit^+_{\xi,\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = -\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t} - \Delta_\xi\varepsilon(x-\xi,t-\tau) = 0$$

для всех $t > \tau$ и $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ и

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\Omega'_{t-\alpha}} \varepsilon(x-\xi,\alpha) u(\xi, t-\alpha)\, d\xi = u(x,t)$$

для всех $(x,t) \in Q$. Последнее равенство доказывается с использованием явного вида фундаментального решения и заменой переменных $z_i = \frac{|x_i-\xi_i|}{2\sqrt{\alpha}}$, $i = \overline{1;n}$, в интегральной части с последующим переходом к пределу.

Так как $u(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}_{x,t}(\overline{Q})$, подействовав оператором теплопроводности $\diamondsuit$ на тепловой потенциал (4), с учетом свойств фундаментального решения убедимся в том, что имеет место уравнение (1) в области Q. Тогда непосредственными вычислениями для любого $(x,t) \in Q$ получим

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\tau} \varepsilon(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^{t-\alpha} \int\limits_{\Omega_\tau} \varepsilon(x-\xi,t-\tau) \diamondsuit u(\xi,\tau)\, d\xi d\tau$$
$$= \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^{t-\alpha} \int\limits_{\Omega_\tau} \left[\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau} - \varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau)\right] d\xi d\tau,$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_0^{t-\alpha} \int\limits_{\Omega_\tau} \varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}\, d\xi d\tau = \lim_{\alpha\to 0} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\gamma_0(\xi,t-\alpha)} \varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}\, d\tau d\xi.$$

Заметим, что

$$\gamma_0(\xi,t) = \begin{cases} \gamma(\xi), & \gamma(\xi) < t, \\ t, & \gamma(\xi) \geq t, \end{cases}$$

тогда для любого $(x,t)\in Q$ имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{\gamma_0(\xi,t-\alpha)}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau d\xi=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\Big|_0^{\gamma_0(\xi,t-\alpha)}\,d\xi$$

$$-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}u(\xi,\tau)\,d\tau d\xi=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega'_{t-\alpha}}\varepsilon(x-\xi,\alpha)u(\xi,t-\alpha)\,d\xi$$

$$+\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega'_{t-\alpha}}\varepsilon(x-\xi,t-\gamma(\xi))u(\xi,\gamma(\xi))\,d\xi-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}u(\xi,\tau)\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\,d\xi d\tau$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega'_{t-\alpha}}\varepsilon(x-\xi,\alpha)u(\xi,t-\alpha)\,d\xi+\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\cos n(\xi)\,dSd\tau$$

$$-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Применив вторую формулу Грина, для всех $(x,t)\in Q$ получим равенство

$$-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)\,dSd\tau$$

$$-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\,dSd\tau-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}\Delta_\xi\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Таким образом, для всех $(x,t)\in Q$ справедливо

$$u(x,t)=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\diamondsuit u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega'_{t-\alpha}}\varepsilon(x-\xi,\alpha)u(\xi,t-\alpha)\,d\xi+\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\cos n(\xi)\,dSd\tau$$

$$+\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)\,dSd\tau-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\,dSd\tau$$

$$+\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}\diamondsuit^+_{\xi,\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Так как из свойств фундаментального решения для всех $(x,t)\in Q$

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{t-\alpha}\int\limits_{\Omega_\tau}\diamondsuit^+_{\xi,\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=0,$$

отсюда получим, что

$$u(x,t)=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega'_{t-\alpha}}\varepsilon(x-\xi,\alpha)u(\xi,t-\alpha)\,d\xi$$

$$+\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{0}^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\cos n(\xi)\,dSd\tau$$

$$+\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{0}^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)\,dSd\tau-\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{0}^{t-\alpha}\int\limits_{S_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\,dSd\tau.$$

В силу того, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\Omega'_{t-\alpha}}\varepsilon(x-\xi,\alpha)u(\xi,t-\alpha)\,d\xi=u(x,t),$$

второй интеграл абсолютно сходится, третий и четвертый интегралы являются потенциалами двойного и простого слоя соответственно, имеем тождество

$$\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{S_\tau}\left[q(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)-\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\right]dSd\tau=0 \tag{5}$$

для всех $(x,t)\in Q$. Переходя к пределу при $(x,t)\to S$ и применяя свойства потенциалов (см. [6–11]), придем к (3).

Тем самым тепловой потенциал (4) удовлетворяет боковому граничному условию (3). Обратно, если решение уравнения $\Diamond u=f$, $u(x,t)\in C^{2+\beta,1+\beta/2}_{x,t}(\overline{Q})$, удовлетворяет начальному условию (2) и боковому граничному условию (3), то оно задается формулой (4), т. е. порождает тепловой потенциал (4). Действительно, если $u_1(x,t)\in C^{2+\beta,1+\beta/2}_{x,t}(\overline{Q})$ удовлетворяют уравнению (1), начальному условию (2) и боковому граничному условию (3), то $u_1\equiv u$, где u — тепловой потенциал (4). Если не так, то функция $V=u_1-u$ удовлетворяет уравнениям

$$\Diamond V(x,t)=0,\quad (x,t)\in Q, \tag{6}$$

$$V(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{7}$$

и однородному условию

$$-\frac{V(x,t)}{2}+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{S_\tau}q(x-\xi,t-\tau)V(\xi,\tau)\,dSd\tau-\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{S_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial V(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\,dSd\tau=0,$$

$$(x,t)\in S. \tag{8}$$

С другой стороны, используя (6) и (7), для всех $(x,t)\in Q$ получаем равенство

$$0=\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega_\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Diamond V\,d\xi d\tau=V(x,t)+B_V(x,t).$$

Переходя к пределу при $(x,t)\to S$, имеем

$$V(x,t)|_S=-B_V(x,t)|_S=0.$$

Стало быть, задача (6)–(8) эквивалентна задаче, порожденной однородным уравнением (6), начальным условием (7) и граничным условием

$$V(x,t)|_S = 0. \tag{9}$$

Решение $V(x,t)$ однородной смешанной задачи (6), (7), (9) согласно принципу максимума [8–11] тождественно равно нулю для всех $(x,t) \in Q$, т. е. получим $V = u_1 - u \equiv 0$ и $u_1 \equiv u$. Таким образом, боковое граничное условие (3) и начальное условие (2) для уравнения теплопроводности (1) порождают тепловой потенциал (4) однозначно. Теорема доказана.

Замечание 1. Фундаментальное решение оператора теплопроводности

$$\varepsilon(x-\xi, t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)$$

является функцией Грина для задачи (1)–(3).

Замечание 2. Для любых $f(x,t) \in C^{\beta,\beta/2}_{x,t}(\overline{Q})$ и $\varphi(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}_{x,t}(\overline{S} \times [0,T])$ решение $u(x,t) \in C^{2+\beta,1+\beta/2}_{x,t}(\overline{Q})$, удовлетворяющее неоднородному уравнению теплопроводности (1), однородному начальному условию (2) и неоднородному боковому граничному условию

$$B_u(x,t) = -\frac{u(x,t)}{2} + \int\limits_0^t \int\limits_{S_\tau} \left[q(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau) \right.$$
$$\left. - \varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} \right] dS d\tau = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S,$$

представляется в следующем виде:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\tau} \varepsilon(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\tau} \frac{\partial G(x,\xi,t,\tau)}{\partial n_\xi} \varphi(\xi,\tau)\, d\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t,\tau)$ — функция Грина смешанной задачи, порожденной уравнением теплопроводности (1), начальным условием (2) и однородным граничным условием Дирихле.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 1. С. 16–19.
2. *Kalmenov T. Sh., Suragan D.* A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials // Oper. Theory, Adv. Appl. 2011. V. 216. P. 187–210.
3. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 595–599.
4. *Suragan D., Tokmagambetov N.* On transparent boundary conditions for the high-order heat equation // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. V. 10. P. 141–149.
5. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 6. С. 1063–1068.
6. *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.
7. *Krylov N. V.* Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Grad. Studies Math.; V. 12).

8. *Тихонов А. Н.* Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных // Бюлл. Моск. ун-та (А). 1938. Т. 1, № 9. С. 1–45.
9. *Камынин Л. И.* О гладкости тепловых потенциалов. 1 // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 6. С. 799–839.
10. *Камынин Л. И.* О гладкости тепловых потенциалов. 2 // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 647–687.
11. *Камынин Л. И.* О гладкости тепловых потенциалов. 3 // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 1333–1357.

Статья поступила 5 декабря 2012 г., окончательный вариант —9 апреля 2013 г.

Кальменов Тынысбек Шарипович, Токмагамбетов Нияз Есенжолович
Институт математики и математического моделирования МОиН РК,
ул. Шевченко, 28, Алматы 500010, Казахстан
kalmenov.t@mail.ru, tokmagam@list.ru