Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 510.64

КЛАССИФИКАЦИЯ РАСШИРЕНИЙ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ S4

Л. Л. Максимова

Аннотация. Вводится естественная классификация нормальных расширений модальной логики S4 в соответствии с объемами кластеров в шкалах Крипке, доказана разрешимость классификации. Выделены основные логики в этой классификации и установлены их важные свойства: конечная аксиоматизируемость, финитная аппроксимируемость и узнаваемость.

Ключевые слова: модальная логика, шкала Крипке, разрешимость, характеристическая формула.

Введение

Реляционная семантика модальной логики явилась одним из основных инструментов исследования модальных логик. В этой статье вводится естественная классификация нормальных расширений известной модальной логики S4, определяемая объемами кластеров в шкалах Крипке. Эта классификация оказывается алгоритмически разрешимой, т. е. по данным аксиомам логики можно эффективно вычислить класс, в который она попадает. Каждый класс имеет наименьшую логику, причем эта логика финитно аппроксимируема, разрешима и имеет разрешимую проблему узнавания.

Полученные результаты будут в дальнейшем использованы для решения проблем интерполяции и определимости по Бету над логикой S4. Исследования по проблеме интерполяции в классических и неклассических теориях занимают заметное место в литературе (см., например, [1, 2]). Интерполяционная теорема доказана Крейгом [3] для классической логики первого порядка. Наиболее известные системы модальной логики обладают интерполяционным свойством Крейга CIP [4]. Интерполяционное свойство тесно связано со свойством определимости по Бету [5], которое тоже широко исследуется в литературе.

Интерполяционное свойство и свойство Бета допускают различные варианты, которые равносильны в классической логике, но неэквивалентны в других логиках. Среди основных вариантов, исследуемых в модальной логике, дедуктивное, ограниченное и слабое интерполяционные свойства, а также проективное свойство Бета [2, 6–8]. В [9] доказано, что существует лишь конечное число нормальных расширений известной модальной системы S4, обладающих интерполяционным свойством CIP или дедуктивным интерполяционным свойством.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00168а) и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (код проекта 2.1.1.10726).

Аналогичное утверждение справедливо и для логик над S4, обладающих ограниченным интерполяционным свойством IPR или проективным свойством Бета PB2. Доказательство будет представлено в отдельной статье.

Для описания логик над S4, обладающих свойствами PB2 и IPR, будет использована классификация, разработанная в этой статье.

В § 1 приведены определения и известные результаты. В § 2 вводится классификация логик над S4 в соответствии с их объемностью, доказывается ее разрешимость. Найдена аксиоматизация наименьшей логики каждого класса посредством характеристических формул подходящих шкал.

Другая аксиоматизация представлена в § 4. Это позволяет использовать результат Захарьящева из [10] для установления финитной аппроксимируемости интересующих нас логик. Как следствие разрешима проблема узнавания указанных логик.

§ 1. Характеристические формулы и узнаваемые логики

Язык модальной логики содержит связки классической пропозициональной логики и, кроме того, модальные операторы $\Box$ и $\Diamond$, где $\Diamond A \rightleftharpoons \neg\Box\neg A$. Здесь мы рассматриваем только нормальные модальные исчисления, которые содержат в числе постулатов правило R1: $A, A \to B/B$ и правило для необходимости R2: $A/\Box A$. Минимальное нормальное модальное исчисление K определяется добавлением одной схемы аксиом $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ и правила для необходимости к постулатам классической пропозициональной логики. Далее,

$$\mathrm{K4} = \mathrm{K} + (\Box p \to \Box\Box p), \quad \mathrm{S4} = \mathrm{K4} + (\Box p \to p).$$

Нормальной модальной логикой называется множество формул, содержащее все аксиомы исчисления K и замкнутое относительно правил $R1$ и $R2$ и правила подстановки. Через $NE(L)$ обозначаем множество всех нормальных модальных логик, содержащих логику L. Для модальной логики L и формулы A пишем $L \vdash A$ вместо $A \in L$; через $L + A$ обозначается наименьшая нормальная модальная логика, содержащая $L \cup \{A\}$.

Конечно аксиоматизируемую логику $L \in NE(\mathrm{S4})$ назовем *узнаваемой над* S4, если разрешима проблема ее узнавания: *для любого конечного множества формул Ax определить, справедливо ли равенство* $\mathrm{S4} + Ax = L$.

Хорошо известно, что модальная логика S4 полна по Крипке и характеризуется классом предупорядоченных, т. е. рефлексивных и транзитивных шкал. *Шкалой* называется пара $\mathbf{Q} = (Q, R)$, где Q — непустое множество, а R — бинарное отношение на Q. *Модель* — тройка $M = (Q, R, \Vdash)$, где $\Vdash$ — отношение истинности, удовлетворяющее условиям

$$x \Vdash \Box A \iff \forall y(xRy \Rightarrow y \Vdash A),$$

для остальных связок определение соответствует классической логике. Формула A считается истинной в модели M, если $x \Vdash A$ для всех $x \in Q$. Говорим, что *A общезначима в шкале* $\mathbf{Q}$, и пишем $\mathbf{Q} \models A$, если A истинна в любой модели, основанной на шкале $\mathbf{Q}$. Говорим, что шкала $\mathbf{Q}$ *удовлетворяет логике* L, и пишем $\mathbf{Q} \models L$, если $\mathbf{Q} \models A$ для всех формул $A \in L$.

Говорят, что логика L *характеризуется классом шкал* K (или полна относительно K), если для любой формулы A выполнено: $A \in L \iff (\forall \mathbf{Q} \in$

$K)(\mathbf{Q} \models A)$. Логика имеет *финитно-модельное свойство*, или *финитно аппроксимируема*, если характеризуется некоторым классом конечных шкал.

Пусть $\mathbf{Q} = (Q, R)$ — предупорядоченная шкала, т. е. множество с рефлексивным и транзитивным отношением R. Элемент $x \in Q$ называется *инициальным*, если выполняется xRy для всех $y \in Q$. Шкала называется *инициальной*, если содержит инициальный элемент.

Конечные инициальные предупорядоченные шкалы будем называть *главными.* Для любой логики M из $NE(\mathrm{S4})$ обозначим через $PF(M)$ класс главных шкал, удовлетворяющих M.

Подмножество $X \subseteq Q$ называется *конусом*, если для всех $x, y \in Q$ выполняется условие ($x \in X$ и $xRy) \Rightarrow y \in X$. Для $x \in Q$ обозначим $Q^x = \{y \in Q \mid xRy\}$, положим $\mathbf{Q}^x = (Q^x, R')$, где R' — ограничение отношения R на Q^x.

Отображение θ шкалы $\mathbf{Q} = (Q, R)$ на шкалу $\mathbf{Q}_1 = (Q_1, R_1)$ называется *p-морфизмом*, если для всех $x \in Q$ и $y \in Q_1$

$$\theta(x) R_1 y \Leftrightarrow (\exists y')(xRy' \text{ и } \theta(y') = y).$$

Хорошо известна следующая

Лемма 1.1. *Пусть существует p-морфизм шкалы* $\mathbf{Q}$ *на шкалу* $\mathbf{Q}_1$. *Тогда для любой формулы* A

$$\mathbf{Q} \models A \Rightarrow \mathbf{Q}_1 \models A.$$

Пусть $\mathbf{Q} = (Q, R)$ — конечная предупорядоченная шкала с инициальным элементом 0. *Характеристической формулой шкалы* $\mathbf{Q}$ называем формулу $\kappa(\mathbf{Q})$, определенную следующим образом. Для каждого t из Q берем пропозициональную переменную p_t. Для x, y из Q полагаем

$$r(x,y) = \begin{cases} \Box(p_x \to \Diamond p_y), & \text{если } xRy, \\ \Box(p_x \to \neg\Diamond p_y) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим

$$\kappa(\mathbf{Q}) = \Big(\bigwedge\{r(x,y) \mid x, y \in Q\} \& \bigwedge\{\Box\neg(p_x \& p_y) \mid x, y \in Q,\ x \neq y\} \& \\ \Box\bigvee\{p_t \mid t \in Q\}\Big) \to \Box\neg p_0.$$

Полухарактеристической формулой шкалы $\mathbf{Q}$ будем называть формулу

$$\kappa^*(\mathbf{Q}) = \Big(\bigwedge\{r(x,y) \mid x, y \in Q\} \& \bigwedge\{\Box\neg(p_x \& p_y) \mid x, y \in Q,\ x \neq y\} \& \\ \Box\bigvee\{\Diamond p_t \mid t \in Q\}\Big) \to \Box\neg p_0.$$

Заметим, что $\neg\kappa(\mathbf{Q})$ эквивалентна в S4 формуле $A_{\mathbf{Q}}$, введенной Файном [11], и что свойства формулы $\kappa(\mathbf{Q})$ аналогичны свойствам характеристических формул Янкова из [12].

Лемма 1.2. *Для любой* M *из* $NE(\mathrm{S4})$ *и для любой главной шкалы* $\mathbf{Q}$
(1) $\kappa(\mathbf{Q}) \in M \iff \mathbf{Q} \not\models M$;
(2) $\kappa^*(\mathbf{Q}) \in M \Rightarrow \mathbf{Q} \not\models M$;
(3) $\mathrm{S4} \vdash \kappa^*(\mathbf{Q}) \to \kappa(\mathbf{Q})$.

Доказательство. (1) Доказано в [2, лемма 3.20].
(2) Очевидно, что $\mathbf{Q} \not\models \kappa^*(\mathbf{Q})$.
(3) Ясно, что посылка формулы $\kappa(\mathbf{Q})$ влечет посылку формулы $\kappa^*(\mathbf{Q})$. $\Box$

В нижеследующей лемме 1.4 покажем, что формула $\kappa^*(\mathbf{Q})$ дедуктивно эквивалентна в логике S4 формуле $\alpha(\mathbf{Q},\bot)$, которая в [13] называется *формулой кофинальной подшкалы* (сокращенно *csf-формулой*) и обладает свойствами, аналогичными свойствам отрицания формулы $B_{\mathbf{Q}}$, введенной в [14]. Более точно, имеет место

Предложение 1.3 [10, 13]. *Пусть логика L является нормальным расширением логики* K4 *и все ее аксиомы являются* csf*-формулами. Тогда L финитно аппроксимируема. Если при этом L конечно аксиоматизируема, то она разрешима.*

Напомним определение csf-формулы из [13]:

$$\alpha(\mathbf{Q},\bot)=\bigwedge\{\varphi_{xy}\mid xRy\}\&\bigwedge\{\varphi_x\mid x\in\mathbf{Q}\}\&\varphi_\bot\to q_0,$$

$$\varphi_{xy}=\Box^+(\Box q_y\to q_x),\qquad \text{где } \Box^+\psi=\psi\&\Box\psi,$$

$$\varphi_x=\Box^+\Big(\Big(\bigwedge\{\Box q_y\mid\neg xRy\}\&\bigwedge\{q_z\mid z\neq x\}\to q_x\Big)\to q_x\Big),$$

$$\varphi_\bot=\Box^+\Big(\bigwedge\{\Box^+q_x\mid x\in\mathbf{Q}\}\to\bot\Big).$$

В [15] отмечено, что формулы $\kappa^*(\mathbf{Q})$ и $\alpha(\mathbf{Q},\bot)$ дедуктивно эквивалентны.

Лемма 1.4. *Для любой главной шкалы $\mathbf{Q}$ формула $\kappa^*(\mathbf{Q})$ дедуктивно эквивалентна в логике* S4 *формуле $\alpha(\mathbf{Q},\bot)$.*

Доказательство. Для произвольной формулы $\psi=\psi(q_1,\dots,q_n)$ обозначим $\psi'=\psi(\neg p_1,\dots,\neg p_n)$. Используя $\mathrm{S4}\vdash(x\to y)\leftrightarrow(\neg y\to\neg x)$, легко показать, что

1) $\mathrm{S4}\vdash\varphi'_{xy}\leftrightarrow\Box(p_x\to\Diamond p_y)$ при xRy;
2) $\mathrm{S4}\vdash\varphi'_x\leftrightarrow\Box(p_x\to\bigwedge\{\neg\Diamond p_y\mid\neg xRy\}\&\bigwedge\{\neg p_z\mid z\neq x\})$;
3) $\mathrm{S4}\vdash\varphi'_\bot\leftrightarrow\Box(\bigvee\{\Diamond p_x\mid x\in\mathbf{Q}\})$.

Поэтому

$$\mathrm{S4}\vdash\Big(\alpha(\mathbf{Q},\bot)'\leftrightarrow\bigwedge\{r(x,y)\mid x,y\in Q\}\&\bigwedge\{\Box\neg(p_x\&p_y)\mid x,y\in Q,\ x\neq y\}\&\\ \Box\bigvee\{p_t\mid t\in Q\}\Big)\to\neg p_0.$$

Таким образом,

$$\mathrm{S4}+\Big(\alpha(\mathbf{Q},\bot)\vdash\bigwedge\{r(x,y)\mid x,y\in Q\}\&\bigwedge\{\Box\neg(p_x\&p_y)\mid x,y\in Q,\ x\neq y\}\&\\ \Box\bigvee\{p_t\mid t\in Q\}\Big)\to\neg p_0,$$

отсюда $\mathrm{S4}+\alpha(\mathbf{Q},\bot)\vdash\kappa^*(\mathbf{Q})$. С другой стороны, подставляя $\neg q_x$ вместо p_x в формулу $\kappa^*(\mathbf{Q})$, выводим

$$\mathrm{S4}+\kappa^*(\mathbf{Q})\vdash\alpha(\mathbf{Q},\bot).\quad\Box$$

В [13] отмечено, что сама логика S4 аксиоматизируема над K4 формулами $\alpha(F_1,\bot),\alpha(F_2,\bot)$, где F_1 — одноэлементная иррефлексивная шкала, а шкала F_2 состоит из двух элементов a, b, где $xRy\iff y=b$. Поэтому из лемм 1.2 и 1.4 сразу следует

Предложение 1.5. *Пусть логика $L \in NE(\mathrm{S4})$ аксиоматизируема множеством полухарактеристических формул. Тогда L финитно аппроксимируема. Если при этом L конечно аксиоматизируема, то она разрешима.*

Заметим, что для любой логики M класс $PF(M)$ главных шкал, удовлетворяющих логике M, замкнут относительно p-морфизмов и инициальных конусов. Логика M финитно аппроксимируема, если и только если она характеризуется классом $PF(M)$. Нетрудно видеть, что следующее отношение является частичным порядком на множестве главных шкал:

$$\mathbf{Q}_1 \preceq \mathbf{Q}_2 \iff \text{ существует } p\text{-морфизм инициального конуса шкалы } \mathbf{Q}_2 \text{ на } \mathbf{Q}_1.$$

Известно (см., например, [13]), что не всякая логика над S4 финитно аппроксимируема.

Предложение 1.6. *Пусть K — класс главных шкал, замкнутый относительно p-морфизмов и инициальных конусов, $\mathrm{Min}(PF(\mathrm{S4}) - K)$ — множество минимальных главных шкал, не входящих в K. Тогда*

(1) *семейство модальных логик L таких, что $PF(L) = K$, образует интервал в $NE(\mathrm{S4})$, наименьшим элементом которого является логика*

$$\mathrm{S4} + \{\kappa(\mathbf{Q}) \mid \mathbf{Q} \in \mathrm{Min}(PF(\mathrm{S4}) - K)\},$$

а наибольшим — логика, порожденная классом K;

(2) *если указанная наименьшая логика финитно аппроксимируема, то она является единственной логикой с $PF(L) = K$.*

Доказательство. (1) Обозначим $L_0 = \mathrm{S4} + \{\kappa(\mathbf{Q}) \mid \mathbf{Q} \in \mathrm{Min}(PF(\mathrm{S4}) - K)\}$. Тогда $PF(L_0) = K$ по лемме 1.2(1). Пусть $PF(L) = K$. Тогда по той же лемме для любой шкалы $\mathbf{Q}$ из множества $(PF(\mathrm{S4}) - K)$ имеем $L \vdash \kappa(\mathbf{Q})$, а значит, $L \supseteq L_0$.

Очевидно, что логика, порожденная классом K, содержит любую логику с $PF(L) = K$.

(2) Сразу следует из (1). □

Известно, что не всякая разрешимая логика узнаваема [16]. Приведем достаточное условие для разрешимости проблемы узнавания.

Предложение 1.7. *Пусть логика $L \in NE(\mathrm{S4})$ аксиоматизируема конечным числом характеристических формул и является финитно аппроксимируемой. Тогда L имеет разрешимую проблему узнавания.*

Доказательство. Пусть $n < \omega$ и $L = \mathrm{S4} + \{\kappa(\mathbf{Q}_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ для некоторых главных шкал $\mathbf{Q}_i$. Берем произвольное конечное множество формул Ax и рассматриваем логику $M = \mathrm{S4} + Ax$. Из финитной аппроксимируемости и конечной аксиоматизируемости логики L следует ее разрешимость. Поэтому существует алгоритм для проверки включения $\mathrm{S4} + Ax \subseteq L$.

Далее, по лемме 1.2(1) имеем

$$M \vdash \kappa(\mathbf{Q}_i) \iff \mathbf{Q}_i \not\models Ax,$$

поэтому эффективно проверяется включение $M \supseteq L$, а значит, L узнаваема. □

§ 2. Классификация расширений логики S4

Введем классификацию нормальных расширений логики S4, определяемую объемом кластеров в шкалах. Эта классификация является продолжением классификации из [2]. Каждой нормальной модальной логике M из $NE(\mathrm{S4})$ соответствует ее характеристика, обусловленная мощностями финальных, инициальных и промежуточных кластеров в шкалах, удовлетворяющих логике M. В теореме 2.5 докажем, что эта классификация разрешима, т. е. по аксиомам логики эффективно вычисляется класс, в который она попадает. Также покажем, что каждый класс имеет наименьшую логику, и найдем аксиоматизацию таких логик.

Пусть $\mathbf{Q} = (Q, R)$ — рефлексивная и транзитивная шкала. Определим

$$x =_R y \iff (xRy \text{ и } yRx), \quad [x] = \{y | x =_R y\}; \quad [x] \leq [y] \iff xRy.$$

Класс эквивалентности $[x]$ называется *кластером* в $\mathbf{Q}$. Множество $\mathbf{o}(Q)$ всех кластеров в $\mathbf{Q}$ частично упорядочено отношением $\leq$, эта шкала называется *остовом* шкалы $\mathbf{Q}$.

Отметим, что каноническое отображение $\theta_{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q} \to \mathbf{o}(Q)$, где $\theta_{\mathbf{Q}}(x) = [x]$, является p-морфизмом.

Кластер называется *инициальным*, если содержит инициальный элемент. Элемент x, а также содержащий его кластер называем *финальным*, если выполнено $\forall y(xRy \Rightarrow yRx)$. Кластер называется *промежуточным*, если не является ни инициальным, ни финальным.

Пусть $\mathbf{Q}$ — главная шкала. Через $h(\mathbf{Q})$ обозначается длина максимальной цепи в $\mathbf{o}(Q)$. Определим

$$\mu_1(\mathbf{Q}) = \sup\{\mathrm{card}(C) \mid C \text{ — финальный кластер в } \mathbf{Q}\};$$

$$\mu_2(\mathbf{Q}) = \sup\{\mathrm{card}(C) \mid C \text{ — нефинальный кластер в } \mathbf{Q}\};$$

$$\mu_3(\mathbf{Q}) = \sup\{\mathrm{card}(C) \mid C \text{ — финальный неинициальный кластер в } \mathbf{Q}\}, \quad \text{если } h(\mathbf{Q}) > 1;$$

$$\mu_3(\mathbf{Q}) = 0 \text{ в противном случае};$$

$$\mu_4(\mathbf{Q}) = \sup\{\mathrm{card}(C) \mid C \text{ — промежуточный кластер в } \mathbf{Q}\}, \text{ если } h(\mathbf{Q}) > 2;$$

$$\mu_4(\mathbf{Q}) = 0 \text{ в противном случае}.$$

Для любой логики M из $NE(\mathrm{S4})$ обозначаем через $PF(M)$ класс главных шкал, удовлетворяющих M. Для $i = 1, 2, 3, 4$ положим

$$\mu_i(M) = \sup\{\mu_i(\mathbf{Q}) \mid \mathbf{Q} \in PF(M)\}.$$

Ясно, что для любой непротиворечивой логики M из $NE(\mathrm{S4})$

$$\mu_1(M) \in \{1, 2, \dots, \omega\}, \quad \mu_j(M) \in \{0, 1, 2, \dots, \omega\} \text{ при } 2 \leq j \leq 4.$$

Лемма 2.1. *Для любой логики M из NE(S4)*
(1) $\mu_3(M) \le \mu_1(M)$,
(2) $\mu_4(M) \le \mu_2(M)$,
(3) $\mu_1(M) = 0 \Rightarrow \mu_2(M) = 0$,
(4) $\mu_2(M) = 0 \iff \mu_3(M) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что $\mu_3(W) \le \mu_1(W)$ и $\mu_4(W) \le \mu_2(W)$ для любой главной шкалы W. Также для любой главной шкалы W имеем $\mu_2(W) = 0 \iff \mu_3(W) = 0$. $\square$

Для модальной логики Mиз NE(S4) определим ее *объемность*

$$\mu(M) = (\mu_1(M), \mu_2(M), \mu_3(M), \mu_4(M)).$$

Например, $\mu(\mathrm{S4}) = (\omega, \omega, \omega, \omega)$, $\mu(\mathrm{S5}) = (\omega, 0, 0, 0)$, $\mu(\mathrm{Grz}) = (1, 1, 1, 1)$, где Grz — логика Гжегорчика. Имеем $\mu_1(M) = 0$, если и только если M совпадает с множеством всех формул.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{X}_n = (X_n, R),\ \text{где } X_n = \{1, \dots, n\},\ xRy \text{ для всех } x, y;$$

$$\mathbf{Y}_n = (Y_n, R),\ \text{где } Y_n = \{1, \dots, n\},\ xRy \iff (x \le n-1 \text{ или } y = n);$$

$$\mathbf{X}_{n,1} = (X_{n,1}, R),\ \text{где } X_{n,1} = \{0, 1, \dots, n\},\ xRy \iff (x = 0 \text{ или } x, y > 0);$$

$$\mathbf{X}_{n,2} = (X_{n,2}, R),\ \text{где } X_{n,2} = \{0, 1, \dots, n, n+1\},$$
$$xRy \iff (x = 0 \text{ или } 1 \le x, y \le n \text{ или } x = y = n+1);$$

$$\mathbf{Y}_{n,1} = (Y_{n,1}, R),\ \text{где } Y_{n,1} = \{0, 1, \dots, n\},$$
$$xRy \iff (x = 0 \text{ или } y = n \text{ или } 1 \le x, y \le n-1);$$

$$\mathbf{V}_n = (V_n, R),\ \text{где } V_n = \{0, 1, \dots, n\},\ xRy \iff (x = 0 \text{ или } 1 \le x = y \le n);$$

$$\mathbf{V}_{2,1} = (V_{2.1}, R),\ \text{где } V_{2,1} = \{0, 1, 2, 3\},$$
$$xRy \iff (x = 0 \text{ или } (x = 1 \text{ и } y \ge 1) \text{ или } 2 \le x = y \le 3);$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = (U_{n+1}, R),\ \text{где } U_{n+1} = \{0, 1, \dots, n, n+1\},$$
$$xRy \iff (x = 0 \text{ или } y = n+1 \text{ или } 1 \le x = y \le n);$$

$$\mathbf{Z}_n = (Z_n, R),\ \text{где } Z_n = \{1, \dots, n\},\ xRy \iff x \le y.$$

Очевидно, $\mu_1(\mathbf{X}_n) = n$, $\mu_i(\mathbf{X}_n) = 0$ при $i > 1$; $\mu_1(\mathbf{Y}_n) = \mu_3(\mathbf{Y}_n) = 1$, $\mu_2(\mathbf{Y}_n) = n-1$, $\mu_4(\mathbf{Y}_n) = 0$; $\mu_1(\mathbf{X}_{n,i}) = \mu_3(\mathbf{X}_{n,i}) = n$ при $i = 1, 2$.

Лемма 2.2. *Для любой логики M из NE(S4) и любого $n < \omega$*
(i) $\mu_1(M) \le n \iff \mathbf{X}_{n+1} \not\models M \iff \kappa(\mathbf{X}_{n+1}) \in M$,
(ii) $\mu_2(M) \le n \iff \mathbf{Y}_{n+2} \not\models M \iff \kappa(\mathbf{Y}_{n+2}) \in M$,
(iii) $\mu_3(M) \le n \iff (\mathbf{X}_{(n+1),1} \not\models M$ *и* $\mathbf{X}_{(n+1),2} \not\models M) \iff (\kappa(\mathbf{X}_{(n+1),1}) \in M$ *и* $\kappa(\mathbf{X}_{(n+1),2}) \in M)$,
(iv) $\mu_4(M) \le n \iff \mathbf{Y}_{(n+2),1} \not\models M \iff \kappa(\mathbf{Y}_{(n+2),1}) \in M$.

Доказательство. (i), (ii) доказаны в [2, лемма 3.21].

(iii) Пусть $\mu_3(M) > n$. Тогда существует главная шкала W, удовлетворяющая M и имеющая финальный кластер C с числом элементов больше чем

n, причем $h(W) > 1$. Возьмем кластер C_0, непосредственно предшествующий кластеру C, и рассмотрим шкалу $W' = \{x \in W \mid (\exists y \in C_0)\ yRx\}$. Пусть $C = \{x_1, \dots, x_k\}$, $k \geq n+1$. Если $W' = C_0 \cup C$, то полагаем

$$\theta(x) = 0 \text{ для } x \in C_0, \quad \theta(x_i) = i \text{ для } 1 \leq i \leq n+1, \quad \theta(x_i) = n+1 \text{ для } i > n+1.$$

Тогда θ — p-морфизм шкалы W' на $\mathbf{X}_{(n+1),1}$, а значит, $\mathbf{X}_{(n+1),1} \models M$.

Если $W' \neq C_0 \cup C$, то полагаем $\theta'(x) = 0$ для $x \in C_0$, $\theta'(x_i) = i$ для $1 \leq i \leq n+1$, $\theta'(x_i) = n+1$ для $i > n+1$, $\theta'(x) = n+2$ для $x \notin (C_0 \cup C)$. Тогда θ' — p-морфизм шкалы W' на $\mathbf{X}_{(n+1),2}$, а значит, $\mathbf{X}_{(n+1),2} \models M$.

Обратное очевидно, так как всегда $W \not\models \kappa(W)$. Далее используем лемму 1.2(1).

(iv) Пусть $\mu_4(M) > n$. Тогда существует главная шкала W, удовлетворяющая M и имеющая промежуточный кластер C с числом элементов больше чем n. Возьмем кластер C_0, непосредственно предшествующий кластеру C, и рассмотрим шкалу $W' = \{x \in W \mid (\exists y \in C_0) yRx\}$. Пусть $C = \{x_1, \dots, x_k\}$, $k \geq n+1$. Положим $\theta(x) = 0$ для $x \in C_0$, $\theta(x_i) = i$ для $1 \leq i \leq n+1$, $\theta(x_i) = n+1$ для $i > n+1$, $\theta(x) = n+2$ для $x \notin (\{a\} \cup C)$. Тогда θ — p-морфизм шкалы W' на $\mathbf{Y}_{(n+2),1}$, а значит, $\mathbf{Y}_{(n+2),1} \models M$.

Обратное очевидно, так как всегда $W \not\models \kappa(W)$. Далее используем лемму 1.2(1). $\square$

Предложение 2.3. *Для любой логики M из NE(S4)*

(1) $\mu_1(M) = n < \omega \iff (\mathbf{X}_n \models M$ *и* $\mathbf{X}_{n+1} \not\models M)$;

(2) $\mu_1(M) = \omega \iff (\mathbf{X}_n \models M$ *для всех* $1 \leq n < \omega)$;

(3) $\mu_2(M) = n < \omega \iff (\mathbf{Y}_{n+1} \models M$ *и* $\mathbf{Y}_{n+2} \not\models M)$;

(4) $\mu_2(M) = \omega \iff (\mathbf{Y}_{n+1} \models M$ *для всех* $1 \leq n < \omega)$;

(5) $\mu_3(M) = n < \omega \iff ((\mathbf{X}_{n,1} \models M$ *или* $\mathbf{X}_{n,2} \models M)$ *и* $\mathbf{X}_{(n+1),1} \not\models M$ *и* $\mathbf{X}_{(n+1),2} \not\models M)$;

(6) $\mu_3(M) = \omega \iff (\mathbf{X}_{n,1} \models M$ *для всех* $1 \leq n < \omega$ *или* $\mathbf{X}_{n,2} \models M$ *для всех* $1 \leq n < \omega)$;

(7) $\mu_4(M) = n < \omega \iff (\mathbf{Y}_{(n+1),1} \models M$ *и* $\mathbf{Y}_{(n+2),1} \not\models M)$;

(8) $\mu_4(M) = \omega \iff (\mathbf{Y}_{(n+1),1} \models M$ *для всех* $1 \leq n < \omega)$.

Доказательство следует из леммы 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть $M = \mathrm{S4} + A$, $n = r + 3$, где r — число вхождений модальностей в A. Тогда*

(1) $\mu_1(M) = \omega \iff \mathbf{X}_n \models M$;

(2) $\mu_2(M) = \omega \iff \mathbf{Y}_{n+1} \models M$;

(3) $\mu_3(M) = \omega \iff (\mathbf{X}_{n,1} \models M$ *или* $\mathbf{X}_{n,2} \models M)$;

(4) $\mu_4(M) = \omega \iff \mathbf{Y}_{(n+1),1} \models M$.

Доказательство. Используем предложение 2.3. Докажем, например, (3). Если $\mu_3(M) = \omega$, то по предложению 2.3(6) $\mathbf{X}_{n,1} \models M$ или $\mathbf{X}_{n,2} \models M$. Пусть $\mu_3(M) < \omega$. Тогда $\mathbf{X}_{k,1} \not\models M$ и $\mathbf{X}_{m,2} \not\models M$ для некоторых $k, m < \omega$. Можем считать, что A не содержит $\Box$, в противном случае заменим все вхождения $\Box$ на $\neg\Diamond\neg$. Существуют модель $(\mathbf{X}_{k,1}, \Vdash)$ и элемент $x \in \mathbf{X}_{k,1}$ такие, что $x \not\Vdash A$. Для любой подформулы вида $\Diamond B$, истинной на x, выберем в модели достижимый из x элемент $y(B)$, на котором истинна B. Кроме того, сохраним инициальный элемент и элемент из финального сгустка, а остальные элементы выбросим. Нетрудно показать, что формула A по-прежнему опровергается в выбранной подмодели. Выбранная подшкала изоморфна шкале $\mathbf{X}_{k',1}$ для некоторого $k' \leq$

n. Поскольку существует p-морфизм шкалы $\mathbf{X}_{n,1}$ на шкалу $\mathbf{X}_{k',1}$, формула A опровергается в $\mathbf{X}_{n,1}$. Аналогично заключаем, что $\mathbf{X}_{n,2} \not\models M$.

Все остальные пункты доказываются аналогично. $\square$

Теорема 2.5. *Для любой конечно аксиоматизируемой логики $M \in NE(\mathrm{S4})$ значения $\mu_i(M)$, $1 \le i \le 4$, эффективно вычисляются по аксиомам логики M.*

Доказательство. По лемме 2.4 проверяем равенство $\mu_i(M) = \omega$. Если $\mu_i(M) < \omega$, то используем предложение 2.3 для вычисления $\mu_i(M)$. $\square$

Пусть $0 \le m \le k \le \omega$, $0 \le n \le l \le \omega$. Определим множество формул $\Phi(k,l,m,n)$ следующим образом:

$$\Phi(\omega,\omega,\omega,\omega) = \varnothing.$$

Если $k < \omega$, то включаем в множество $\Phi(k,l,m,n)$ формулу $\kappa(\mathbf{X}_{k+1})$. Если $l < \omega$, то включаем формулу $\kappa(\mathbf{Y}_{l+2})$. Если $m < \omega$, то включаем две формулы $\kappa(\mathbf{X}_{(m+1),1})$, $\kappa(\mathbf{X}_{(m+1),2})$. Если $n < \omega$, то включаем $\kappa(\mathbf{Y}_{(n+2),1})$. Положим

$$\Psi(k,l,m,n) = \mathrm{S4} + \Phi(k,l,m,n).$$

Как показывает лемма 2.1, не всякая четверка чисел может быть значением для объемности $\mu(M)$. Оставляем пока в стороне вопрос о том, какие четверки подходят для этой роли. Следующая теорема показывает, что логика $L + \Phi(m_1,m_2,m_3,m_4)$ является наименьшей среди логик, содержащих L и удовлетворяющих условию: $\mu_i(M) = m_i$ для $1 \le i \le 4$, если такие логики вообще существуют.

Теорема 2.6. *Пусть $L, M \in NE(\mathrm{S4})$, $L \subseteq M$, $\mu_i(M) = m_i$ для $1 \le i \le 4$, $M' = L + \Phi(m_1,m_2,m_3,m_4)$. Тогда $M \supseteq M'$ и $\mu_i(M') = m_i$ для всех $1 \le i \le 4$.*

Доказательство. Применяем предложение 2.3 и лемму 2.2. Если все $\mu_i(M)$ равны ω, то $\Psi(m_1,m_2,m_3,m_4) = \mathrm{S4} \subseteq M$. Пусть, например, $n = m_3 = \mu_3(M) < \omega$. Тогда $\mathbf{X}_{(n+1),1} \not\models M$ и $\mathbf{X}_{(n+1),2} \not\models M$, поэтому $M \vdash \kappa(\mathbf{X}_{(n+1),1})$ и $M \vdash \kappa(\mathbf{X}_{(n+1),2})$. Аналогично устанавливается, что M содержит все остальные характеристические формулы, которые входят в множество $\Phi(m_1,m_2,m_3,m_4)$. Таким образом, $M \supseteq M'$.

Из этого соотношения по определению μ_i сразу вытекает, что $\mu_i(M') \ge \mu_i(M) = m_i$. С другой стороны, если m_i конечно, то соответствующая характеристическая формула входит в $\Phi(m_1,m_2,m_3,m_4)$. Следовательно, $\mu_i(L + \Phi(m_1,m_2,m_3,m_4)) \le m_i$ для всех $1 \le i \le 4$ по лемме 2.2. $\square$

При $L = \mathrm{S4}$ получаем

Следствие 2.7. *Если существует логика $M \in NE(\mathrm{S4})$ такая, что $\mu_i(M) = m_i$ для $1 \le i \le 4$, то $M' = \Psi(m_1,m_2,m_3,m_4)$ есть наименьшая логика такая, что $\mu_i(M') = m_i$ для всех $1 \le i \le 4$.*

В § 4 мы докажем финитную аппроксимируемость всех логик вида $\Psi(m_1, m_2, m_3, m_4)$. Для этого покажем, что все такие логики аксиоматизируемы полухарактеристическими формулами. Для доказательства используется алгебраическая семантика.

§ 3. Алгебраическая семантика

Хорошо известно (см., например, [2]), что существует взаимно однозначное соответствие между нормальными модальными логиками и многообразиями модальных алгебр. *Модальной алгеброй* называется алгебра $\mathbf{A} = (A, \to, \neg, \Box)$, которая является булевой алгеброй относительно $\to$ и $\neg$ и, кроме того, удовлетворяет условиям $\Box\top = \top$ и $\Box(x \to y) \leq \Box x \to \Box y$. Модальная алгебра $\mathbf{A}$ называется *транзитивной*, если выполнено $\Box x \leq \Box\Box x$; *топобулевой алгеброй* (ТБА), если она транзитивна и выполняется $\Box x \leq x$. Известно, что минимальная нормальная модальная логика K характеризуется многообразием всех модальных алгебр, логика K4 — многообразием транзитивных алгебр. Алгебраическая семантика для расширений логики S4 строится с помощью топобулевых алгебр.

Существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику S4, и многообразиями топобулевых алгебр [2]. Если A — формула, $\mathbf{A}$ — алгебра, то говорим, что в $\mathbf{A}$ *общезначима формула* A, и пишем $\mathbf{A} \models A$, если тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$.

Каждой логике $L \in NE(\mathrm{S4})$ соответствует многообразие

$$V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}.$$

Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Говорим, что логика L *порождается некоторым классом* алгебр, если многообразие $V(L)$ порождается этим классом. Известно, что логика является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда она порождается своими конечными алгебрами. Если $V(L)$ порождается алгеброй $\mathbf{A}$, то пишем иногда $L = L\mathbf{A}$.

Примером модальной алгебры может служить модальная алгебра Крипке. Для произвольной шкалы $W = (W, R)$ определяется модальная алгебра Крипке $W^+ = (P(W), \to, \neg, \Box)$, где $P(W)$ — множество всех подмножеств множества W и для любых $X, Y \subseteq W$

$$X \to Y = (W - X) \cup Y, \quad \neg X = W - X, \quad \Box X = \{x \mid \forall y(xRy \Rightarrow y \in X)\}.$$

Очевидно, для любой формулы A

$$W \models A \iff W^+ \models A.$$

Поэтому для любой логики L

$$W \models L \iff W^+ \in V(L).$$

Невырожденная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если не разлагается в подпрямое произведение собственных фактор-алгебр. По известной теореме Биркгофа любое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми алгебрами. Известно [2], что топобулева алгебра подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда она имеет *опремум*, т. е. элемент $\Omega \neq \top$ такой, что $\Box\Omega = \Omega$ и $\Box x \leq \Omega$ для любого $x \neq \top$.

Лемма 3.1 [2]. *Пусть* $\Box a \not\leq b$ *в* ТБА $\mathbf{A}$. *Тогда существуют подпрямо неразложимая* ТБА $\mathbf{B}$ *и гомоморфизм* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *такие, что* $h(a) = \top$ *и* $\Box h(b)$ — *опремум алгебры* $\mathbf{B}$.

§ 4. Финитная аппроксимируемость

В этом параграфе покажем, что характеристические формулы некоторых шкал можно заменить полухарактеристическими формулами, а значит, и csf-формулами (см. § 1). Это позволит использовать результаты из [10] и доказать финитную аппроксимируемость интересующих нас логик. Для доказательства нижеследующей леммы 4.2 используем алгебраическую семантику.

Пусть $W = (W, R)$ — произвольная шкала. Отображение i шкалы W в модальную алгебру $\mathbf{B}$ называем *нормальным*, если оно удовлетворяет условиям: для всех $a, b \in W$

(n1) $i(a) > \bot_{\mathbf{B}}$;
(n2) $i(a) \& i(b) = \bot_{\mathbf{B}}$ при $a \neq b$;
(n3) $\vee\{i(d) \mid d \in W\} = \top_{\mathbf{B}}$;
(n4) $\Diamond i(a) = \vee\{i(d) \mid d \in W$ и $dRa\}$.

Лемма 4.1. *Пусть $W = (W, R)$ — конечная шкала, а $\mathbf{B}$ — модальная алгебра и существует нормальное отображение $i : W \to \mathbf{B}$. Тогда алгебра W^+ вложима в $\mathbf{B}$.*

Доказательство. Для $X \subseteq W$ положим

$$\alpha(X) = \vee\{i(x) \mid x \in X\}.$$

Условия (n2) и (n3) гарантируют, что отображение α сохраняет булевы операции $\vee$ и $\&$, а также $\neg$. Условие (n1) гарантирует разнозначность отображения α, а (n4) — сохранение операции $\Diamond$, а значит, и $\Box$. $\Box$

Лемма 4.2. *Для любого $n < \omega$*

(1) $\mathrm{S4} + \kappa(\mathbf{X}_{n+1}) = \mathrm{S4} + \kappa^*(\mathbf{X}_{n+1})$,
(2) $\mathrm{S4} + \kappa(\mathbf{Y}_{n+2}) = \mathrm{S4} + \kappa^*(\mathbf{Y}_{n+2})$,
(3) $\mathrm{S4} + \kappa(\mathbf{X}_{(n+1),1}) = \mathrm{S4} + \kappa^*(\mathbf{X}_{(n+1),1})$,
(4) $\mathrm{S4} + \kappa(\mathbf{X}_{(n+1),2})) = \mathrm{S4} + \kappa^*(\mathbf{X}_{(n+1),2}))$,
(5) $\mathrm{S4} + \kappa(\mathbf{Y}_{(n+2),1}) = \mathrm{S4} + \kappa^*(\mathbf{Y}_{(n+2),1})$,
(6) $\mathrm{S4} + \kappa(\mathbf{V}_2) = \mathrm{S4} + \kappa^*(\mathbf{V}_2)$,
(7) $\mathrm{S4} + \kappa(\mathbf{V}_{2,1}) = \mathrm{S4} + \kappa^*(\mathbf{V}_{2,1})$.

Доказательство. По лемме 1.2(3) имеем $\mathrm{S4} \vdash \kappa^*(W) \to \kappa(W)$ для любой главной шкалы W. Поэтому включение $\mathrm{S4} + \kappa^*(W) \supseteq \mathrm{S4} + \kappa(W)$ всегда выполняется.

Требуется доказать обратное включение, т. е. $\mathrm{S4} + \kappa(W) \vdash \kappa^*(W)$ для каждой из шкал, указанных в лемме. Схема доказательства следующая. Доказываем от противного. Допустим, что $\mathrm{S4} + \kappa(W) \nvdash \kappa^*(W)$. Тогда существует топобулева алгебра $\mathbf{B}$, в которой общезначима формула $\kappa(W)$ и опровергается формула $\kappa^*(W)$; через b_i обозначаем значение переменной p_i. По лемме 3.1 можем считать, что $\mathbf{B}$ подпрямо неразложима, посылка формулы $\kappa^*(W)$ принимает значение $\top$, а значение заключения является опремумом Ω алгебры $\mathbf{B}$. Тогда находим подалгебру $\mathbf{A}$ алгебры $\mathbf{B}$, изоморфную алгебре W^+. В W^+ опровергается формула $\kappa(W)$, что противоречит общезначимости формулы $\kappa(W)$ в алгебре $\mathbf{B}$.

(1) Пусть $\mathbf{B}$ — подпрямо неразложимая ТБА, в которой опровергается формула $\kappa^*(\mathbf{X}_{n+1})$. Более того, существуют $b_1, \dots, b_{n+1} \in \mathbf{B}$ такие, что $\Box(b_i \to \Diamond b_j) = \top$ для всех i, j, $\Box\neg(b_i \& b_j) = \top$ для всех $i \neq j$, $\Box(\Diamond b_1 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+1}) = \top$ и $\Box\neg b_1 = \Omega$. Отсюда $b_i \& b_j = \bot$ для всех $i \neq j$; $b_i \leq \Diamond b_j$ для всех i, j; $\Diamond b_1 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+1} = \top$; $b_1 > \bot$. Кроме того, $b_i > \bot$ для всех i, так как $\bot < b_1 \leq \Diamond b_i$. Положим

$$c_i = b_i \text{ для } 1 \leq i \leq n, \quad c_{n+1} = \neg(b_1 \vee \dots \vee b_n).$$

Для доказательства вложимости алгебры $\mathbf{X}^+_{n+1}$ в $\mathbf{B}$ используем лемму 4.1.

Замечаем, что $c_i > \bot$ и $b_i \le c_i$ для всех i, поскольку $\bot < b_{n+1} \le \neg b_i$ для всех $i \le n$. Кроме того, $c_i \& c_j = \bot$ при $1 \le i < j \le n+1$ и $c_1 \vee \dots \vee c_{n+1} = \top$.

Далее, $\Diamond b_i = \Diamond b_1$ для всех $i \le n+1$, $\top = \Diamond b_1 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+1} = \Diamond b_1 = \Diamond c_1$, значит, $\Diamond c_i = \top$ для всех $i \le n$. Кроме того, $\Diamond c_{n+1} \ge \Diamond b_{n+1} = \top$, поэтому $\Diamond c_{n+1} = \top$.

Таким образом, отображение $\alpha : \mathbf{X}_{n+1} \to \mathbf{B}$, где $\alpha(i) = c_i$, удовлетворяет условиям леммы 4.1, и алгебра $\mathbf{X}^+_{n+1}$ вложима в $\mathbf{B}$.

(2) Пусть $\mathbf{B}$ — подпрямо неразложимая ТБА, в которой опровергается формула $\kappa^*(\mathbf{Y}_{n+2})$, причем существуют $b_1, \dots, b_{n+2} \in \mathbf{B}$ такие, что $\Box\neg b_1 = \Omega$; $b_i \& b_j = \bot$ для всех $i \ne j$; $b_i \le \Diamond b_j$ для всех $1 \le i, j \le n+1$; $b_i \le \Diamond b_{n+2}$ и $b_{n+2} \le \neg\Diamond b_i$ для всех $1 \le i \le n+1$; $\Diamond b_1 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+2} = \top$.

Отсюда $b_1 > \bot$. Кроме того, $b_i > \bot$ для всех i, так как $\bot < b_1 \le \Diamond b_i$.

Положим

$$c_i = b_i \quad \text{для } 1 \le i \le n,$$

$$c_{n+1} = \Diamond b_1 \& \neg(c_1 \vee \dots \vee c_n); \quad c_{n+2} = \neg\Diamond b_1.$$

Докажем, что отображение $\alpha : \mathbf{Y}_{n+2} \to \mathbf{B}$, где $\alpha(i) = c_i$, удовлетворяет условиям леммы 4.1. Тогда алгебра $\mathbf{Y}^+_{n+2}$ вложима в $\mathbf{B}$.

Ясно, что $\bot < b_i = c_i$ для всех i, так как $b_{n+1} \le \neg b_i$ для всех $1 \le i \le n$, $b_{n+1} \le \Diamond b_1$ и $b_{n+2} \le \neg\Diamond b_1$. Легко видеть, что $c_i \& c_j = \bot$ при $1 \le i < j \le n+1$, $c_1 \vee \dots \vee c_{n+1} = \Diamond b_1$ и $c_1 \vee \dots \vee c_{n+2} = \top$.

Кроме того, $\Diamond b_1 = \Diamond b_{n+1} \le \Diamond c_{n+1} \le \Diamond b_1$, поэтому $\Diamond c_i = \Diamond b_1 = c_1 \vee \dots \vee c_{n+1}$ для всех $i \le n+1$.

Из того, что $\Diamond b_1 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+2} = \top$ и $\Diamond b_i \le \Diamond b_{n+2}$, заключаем, что $\Diamond b_{n+2} = \top$ и $\Diamond c_{n+2} \ge \Diamond b_{n+2} = \top$, т. е. $\Diamond c_{n+2} = c_1 \vee \dots \vee c_{n+2}$.

Таким образом, алгебра $\mathbf{Y}^+_{n+2}$ вложима в $\mathbf{B}$.

(3) Пусть $\mathbf{B}$ — подпрямо неразложимая ТБА, в которой опровергается формула $\kappa^*(\mathbf{X}_{(n+1),1})$, причем существуют $b_0, \dots, b_{n+1} \in \mathbf{B}$ такие, что $\Box\neg b_0 = \Omega$; $b_i \& b_j = \bot$ для всех $i \ne j$; $b_0 \le \Diamond b_i$, $b_i \le \neg\Diamond b_0$, $b_i \le \Diamond b_j$ для всех $i, j > 0$; $\Diamond b_0 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+1} = \top$.

Кроме того, $b_i > \bot$ для всех i, так как $\bot < b_0 \le \Diamond b_i$.

Положим

$$c_0 = \Diamond b_0, \quad c_i = b_i \text{ для } 1 \le i \le n, \quad c_{n+1} = \neg(c_0 \vee \dots \vee c_n).$$

Докажем, что алгебра $\mathbf{X}^+_{(n+1),1}$ вложима в $\mathbf{B}$.

Замечаем, что $b_i \le c_i$ и $c_i > \bot$ для всех i, поскольку $\bot < b_{n+1} \le \neg b_i$ для $1 \le i \le n$ и $b_{n+1} \le \neg\Diamond b_0 = \neg c_0$. Кроме того, $c_i \& c_j = \bot$ при $0 \le i < j \le n+1$ и $c_0 \vee \dots \vee c_{n+1} = \top$.

Далее, $\Diamond b_0 \le \Diamond b_i = \Diamond b_1$ для всех $0 < i \le n+1$, $\top = \Diamond b_0 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+1} = \Diamond b_1 = \Diamond c_1$, значит, $\Diamond c_i = \top$ для всех $1 \le i \le n$. Кроме того, $\Diamond c_{n+1} \ge \Diamond b_{n+1} = \top$, поэтому $\Diamond c_{n+1} = \top$. Наконец, $\Diamond c_0 = c_0$.

Таким образом, отображение $\alpha : \mathbf{X}_{(n+1),1} \to \mathbf{B}$, где $\alpha(i) = c_i$, удовлетворяет условиям леммы 4.1, и алгебра $\mathbf{X}^+_{(n+1),1}$ вложима в $\mathbf{B}$.

(4) Пусть $\mathbf{B}$ — подпрямо неразложимая ТБА, в которой опровергается формула $\kappa^*(\mathbf{X}_{(n+1),2})$, причем существуют $b_0, \dots, b_{n+2} \in \mathbf{B}$ такие, что $\Box(b_0 \to \Diamond b_i) = \top$, $\Box(b_i \to \neg\Diamond b_0) = \top$ для всех $i > 0$, $\Box(b_i \to \Diamond b_j) = \top$, $\Box(b_i \to \neg\Diamond b_{n+2}) = \top$ и $\Box(b_{n+2} \to \neg\Diamond b_i) = \top$ для всех $1 \le i, j \le n+1$, $\Box\neg(b_i \& b_j) = \top$ для всех $i \ne j$, $\Box(\Diamond b_0 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+2}) = \top$ и $\Box\neg b_0 = \Omega$. Отсюда $b_i \& b_j = \bot$ для всех $i \ne j$; $b_0 \le \Diamond b_i$, $b_i \le \neg\Diamond b_0$ для всех $i > 0$; $b_i \le \Diamond b_j$ для всех $1 \le i, j \le n+1$; $b_i \le \neg\Diamond b_{n+2}$ и $b_{n+2} \le \neg\Diamond b_i$ для всех $1 \le i \le n+1$; $\Diamond b_0 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+2} = \top$; $b_0 > \bot$.

Кроме того, $b_i > \bot$ для всех i, так как $\bot < b_0 \le \Diamond b_i$.

Положим

$$c_0 = \Diamond b_1 \& \Diamond\Box\Diamond b_{n+2}; \quad c_i = b_i \text{ для } 1 \le i \le n,$$

$$c_{n+1} = \Diamond b_1 \& \neg(c_0 \vee \dots \vee c_n); \quad c_{n+2} = \Box\Diamond b_{n+2}.$$

Докажем, что отображение $\alpha : \mathbf{X}_{(n+1),2} \to \mathbf{B}$, где $\alpha(i) = c_i$, удовлетворяет условиям леммы 4.1. Тогда алгебра $\mathbf{X}^+_{(n+1),2}$ вложима в $\mathbf{B}$.

(4.1) Ясно, что $\bot < b_i = c_i$ для $1 \le i \le n$. Далее, $\Diamond b_0 \le \Diamond b_i = \Diamond b_1$ для $1 \le i \le n+1$. Отсюда $\top = \Diamond b_0 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+2} = \Diamond b_1 \vee \Diamond b_{n+2}$. Поэтому $\Box\neg b_1 \le \Diamond b_{n+2}$,

$$\Box\neg b_1 \le \Box\Diamond b_{n+2} = c_{n+2} \tag{1}$$

и $\bot < b_{n+2} \le \neg\Diamond b_1 = \Box\neg b_1 \le c_{n+2}$.

Так как $\Box\neg b_0$ является опремумом, получаем $\Diamond b_0 \le \Diamond\Box\Diamond b_{n+2}$ и $\bot < b_0 \le c_0$.

Наконец, $b_{n+1} \le \neg\Diamond b_{n+2} \le \neg\Diamond\Box\Diamond b_{n+2} \le \neg c_0$. Учитывая, что $b_{n+1} \le \Diamond b_1$ и $b_{n+1} \le \neg b_i$ для $1 \le i \le n$, имеем $\bot < b_{n+1} \le c_{n+1}$.

Итак, $\bot < b_i \le c_i$ для всех i.

(4.2) Заметим, что $c_0 \vee \dots \vee c_{n+1} \le \Diamond b_1$. Из определения c_{n+1} получаем

$$c_0 \vee \dots \vee c_{n+1} = \Diamond b_1. \tag{2}$$

Поскольку $\neg\Diamond b_1 \le \Box\Diamond b_{n+2} = c_{n+2}$ по (1), выводим $c_0 \vee \dots \vee c_{n+1} \vee c_{n+2} \ge \Diamond b_1 \vee \neg\Diamond b_1 = \top$, т. е.

$$c_0 \vee \dots \vee c_{n+2} = \top.$$

(4.3) Докажем, что $c_i \& c_j = \bot$ при $i \ne j$. Очевидно, что $c_i \& c_j = \bot$ при $1 \le i < j \le n+1$. Кроме того, $c_0 \& c_{n+1} = \bot$. Для $1 \le i \le n$ имеем

$$c_i \& c_0 = c_i \& \Diamond b_1 \& \Diamond\Box\Diamond b_{n+2} = b_i \& \Diamond\Box\Diamond b_{n+2} \le b_i \& \Diamond b_{n+2} = \bot.$$

Из $b_1 \le \neg\Diamond b_{n+2}$ получаем

$$\Diamond b_1 \le \Diamond\neg\Diamond b_{n+2} = \neg\Box\Diamond b_{n+2}. \tag{3}$$

Поэтому при $0 \le i \le n+1$ из (2) следует

$$c_i \& c_{n+2} \le \Diamond b_1 \& \Box\Diamond b_{n+2} = \bot.$$

(4.4) Докажем, что $\Diamond c_i = \vee\{c_j \mid iRj\}$. Очевидно, что $\Diamond c_0 = c_0$ ввиду справедливости тождества $\Diamond(\Diamond x \& \Diamond y) = (\Diamond x \& \Diamond y)$ на топобулевых алгебрах. Из доказанного в п. (4.1) соотношения $b_i \le c_i$ и равенства (2) при $1 \le i \le n+1$ получаем $\Diamond b_1 = \Diamond b_i \le \Diamond c_i \le \Diamond\Diamond b_1 = \Diamond b_1$, поэтому

$$\Diamond c_i = \Diamond b_1 = c_0 \vee \dots \vee c_{n+1}.$$

Ясно, что $c_0 \vee c_{n+2} \le \Diamond c_{n+2}$. Докажем обратное неравенство. Ввиду равенства (2) имеем

$$\begin{aligned}\Diamond c_{n+2} \& \neg c_0 = \Diamond c_{n+2} \& (\neg\Diamond b_1 \vee \neg\Diamond c_{n+2}) = \Diamond c_{n+2} \& \neg(c_0 \vee \dots \vee c_{n+1}) \\ = \Diamond c_{n+2} \& c_{n+2} = c_{n+2}.\end{aligned}$$

Отсюда $\Diamond c_{n+2} = c_0 \vee c_{n+2}$.

Таким образом, алгебра $\mathbf{X}^+_{(n+1),2}$ вложима в $\mathbf{B}$.

(5) Пусть $\mathbf{B}$ — подпрямо неразложимая ТБА, в которой опровергается формула $\kappa^*(\mathbf{Y}_{(n+2),1})$, причем существуют $b_0, \dots, b_{n+2} \in \mathbf{B}$ такие, что $\Box\neg b_0 = \Omega$; $b_i \& b_j = \bot$ для всех $i \neq j$; $b_0 \leq \Diamond b_i$, $b_i \leq \neg\Diamond b_0$ для всех $i > 0$; $b_i \leq \Diamond b_j$ для всех $1 \leq i, j \leq n+1$; $b_i \leq \Diamond b_{n+2}$ и $b_{n+2} \leq \neg\Diamond b_i$ для всех $1 \leq i \leq n+1$; $\Diamond b_0 \vee \dots \vee \Diamond b_{n+2} = \top$.

Отсюда $b_0 > \bot$. Кроме того, $b_i > \bot$ для всех i, так как $\bot < b_0 \leq \Diamond b_i$.

Положим
$$c_0 = \Diamond b_0, c_i = b_i \text{ для } 1 \leq i \leq n,$$
$$c_{n+1} = \Diamond b_1 \& \neg(c_0 \vee \dots \vee c_n); \quad c_{n+2} = \neg\Diamond b_1.$$
По аналогии с (2) доказывается, что отображение $\alpha : \mathbf{Y}_{(n+2),1} \to \mathbf{B}$, где $\alpha(i) = c_i$, удовлетворяет условиям леммы 4.1. Следовательно, алгебра $\mathbf{Y}^+_{(n+2),1}$ вложима в $\mathbf{B}$.

(6) Пусть $\mathbf{B}$ — подпрямо неразложимая ТБА, в которой опровергается формула $\kappa^*(\mathbf{V}_2)$, причем существуют b_0, b_1, b_2 такие, что $\Box\neg b_0 = \Omega$; $b_i \& b_j = \bot$ для всех $i \neq j$; $b_0 \leq \Diamond b_i$, $b_i \leq \neg\Diamond b_0$ для $i \geq 1$; $b_1 \leq \neg\Diamond b_2$, $b_2 \leq \neg\Diamond b_1$; $\Diamond b_0 \vee \Diamond b_1 \vee \Diamond b_2 = \top$. Кроме того, $b_i > \bot$ для всех i, так как $\bot < b_0 \leq \Diamond b_i$.

Положим
$$c_0 = \Diamond b_1 \& \Diamond b_2, \quad c_1 = \Diamond b_1 \& \neg\Diamond b_2, \quad c_2 = \Diamond b_2 \& \neg\Diamond b_1.$$
Докажем, что отображение $\alpha : \mathbf{V}^+_2 \to \mathbf{B}$, где $\alpha(i) = c_i$, удовлетворяет условиям леммы 4.1. Тогда алгебра $\mathbf{V}^+_2$ вложима в $\mathbf{B}$.

Очевидно, что $b_i \leq c_i$ и $c_i > \bot$ для всех i и $c_i \& c_j = \bot$ при $i \neq j$. Далее, $\Diamond b_0 \leq \Diamond b_1$. Поэтому $c_0 \vee c_1 \vee c_2 = \Diamond b_1 \vee \Diamond b_2 = \Diamond b_0 \vee \Diamond b_1 \vee \Diamond b_2 = \top$, т. е. $c_0 \vee c_1 \vee c_2 = \top$.

Покажем, что $\Diamond c_i = \vee\{c_j \mid iRj\}$. Ясно, что $\Diamond c_0 = c_0$. Заметим, что по определению c_i имеем $c_0 \vee c_1 = \Diamond b_1$. Далее, так как $b_1 \leq c_1$, получаем
$$\Diamond b_1 \leq \Diamond c_1 = \Diamond(\Diamond b_1 \& \neg\Diamond b_2) \leq \Diamond\Diamond b_1 = \Diamond b_1,$$
отсюда $\Diamond c_1 = \Diamond b_1 = c_0 \vee c_1$. Аналогично $\Diamond c_2 = \Diamond b_2 = c_0 \vee c_2$.

Таким образом, алгебра $\mathbf{V}^+_2$ вложима в $\mathbf{B}$.

(7) Пусть $\mathbf{B}$ — подпрямо неразложимая ТБА, в которой опровергается формула $\kappa^*(\mathbf{V}_{2,1})$, причем существуют $b_0, \dots, b_3 \in \mathbf{B}$ такие, что $\Box\neg b_0 = \Omega$; $b_i \& b_j = \bot$ для всех $i \neq j$; $b_0 \leq \Diamond b_i$, $b_i \leq \neg\Diamond b_0$ для $i \geq 1$; $b_1 \leq \Diamond b_i$, $b_i \leq \neg\Diamond b_1$ для $i = 2, 3$; $b_2 \leq \neg\Diamond b_3$, $b_3 \leq \neg\Diamond b_2$; $\Diamond b_0 \vee \dots \vee \Diamond b_3 = \top$.

Кроме того, $b_i > \bot$ для всех i, так как $\bot < b_0 \leq \Diamond b_i$.

Положим
$$c_0 = \Diamond b_0, \quad c_1 = \Diamond b_2 \& \Diamond b_3 \& \neg\Diamond b_0, \quad c_2 = \Diamond b_2 \& \neg\Diamond b_3, \quad c_3 = \Diamond b_3 \& \neg\Diamond b_2.$$
Докажем, что отображение $\alpha : \mathbf{V}^+_{2,1} \to \mathbf{B}$, где $\alpha(i) = c_i$, удовлетворяет условиям леммы 4.1. Тогда алгебра $\mathbf{V}^+_{2,1}$ вложима в $\mathbf{B}$.

Очевидно, что $b_i \leq c_i$ и $c_i > \bot$ для всех i. Поскольку $\Diamond b_0 \leq \Diamond b_i$, получаем $c_i \& c_j = \bot$ при $i \neq j$. Далее, $\Diamond b_0 \leq \Diamond b_1 \leq \Diamond b_2 \& \Diamond b_3$. Поэтому $c_0 \vee \dots \vee c_3 = \Diamond b_2 \vee \Diamond b_3 = \Diamond b_0 \vee \Diamond b_1 \vee \Diamond b_2 \vee \Diamond b_3 = \top$, т. е. $c_0 \vee \dots \vee c_3 = \top$.

Покажем, что $\Diamond c_i = \vee\{c_j \mid iRj\}$. Ясно, что $\Diamond c_0 = c_0$. По определению c_i имеем $c_0 \vee c_1 \vee c_2 = \Diamond b_2$. Далее, так как $b_2 \leq c_2$, то
$$\Diamond b_2 \leq \Diamond c_2 = \Diamond(\Diamond b_2 \& \neg\Diamond b_3) \leq \Diamond\Diamond b_2 = \Diamond b_2,$$
отсюда $\Diamond c_2 = \Diamond b_2 = c_0 \vee c_1 \vee c_2$. Аналогично $\Diamond c_3 = \Diamond b_3 = c_0 \vee c_1 \vee c_3$.

Наконец, $\Diamond c_1 \le \Diamond(\Diamond b_2 \& \Diamond b_3) = \Diamond b_2 \& \Diamond b_3 = (c_0 \vee c_1 \vee c_2) \& (c_0 \vee c_1 \vee c_3) = c_0 \vee c_1$. Учитывая, что $\neg c_0$ является опремумом, получаем $c_0 \vee c_1 \le \Diamond c_1$, поэтому $\Diamond c_1 = c_0 \vee c_1$.

Таким образом, алгебра $\mathbf{V}_{2,1}^{+}$ вложима в $\mathbf{B}$. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть S — любое множество характеристических формул шкал, представленных в лемме 4.2. Тогда логика* S4 $+ S$ *финитно аппроксимируема и порождается всеми конечными инициальными предупорядоченными шкалами W, удовлетворяющими условию $W \models S$.*

Доказательство. По лемме 4.2 любую аксиому из S можно заменить полухарактеристической формулой. Поэтому финитная аппроксимируемость сразу следует из предложения 1.5. Известно, что если формула опровергается в некоторой шкале, то она опровергается в некотором инициальном конусе этой шкалы. Поэтому класс всех конечных шкал, удовлетворяющих S4 $+ S$, можно заменить подклассом $PF(\mathrm{S4} + S)$. $\square$

Отсюда вытекает

Теорема 4.4. *Для любых $k, l, m, n \le \omega$ логика $\Psi(k, l, m, n)$ финитно аппроксимируема и порождается всеми главными шкалами, удовлетворяющими условиям:*

$$\mu_1(W) \le k, \quad \mu_2(W) \le l, \quad \mu_3(W) \le m, \quad \mu_4(W) \le n.$$

Кроме того, эта логика имеет разрешимую проблему узнавания.

Доказательство следует сразу из теоремы 4.3, леммы 2.2 и предложения 1.7. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Model-theoretic logics.* / Ed. by J. Barwise, S. Feferman. New York: Springer-Verl., 1985.
2. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.
3. *Craig W.* Three uses of the Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symb. Logic. 1957. V. 22, N 3. P. 269–285.
4. *Gabbay D. M.* Investigations in modal and tense logics with applications to problems in philosophy and linguistics. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1976.
5. *Beth E. W.* On Padoa's method in the theory of definitions // Indag. Math. 1953. V. 15, N 4. P. 330–339.
6. *Максимова Л. Л.* Проективные свойства Бета в модальных и суперинтуиционистских логиках // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 316–333.
7. *Maksimova L.* Restricted interpolation in modal logics // Advances in modal logics. London: College Publ., 2003. V. 4. P. 297–311.
8. *Maksimova L.* Interpolation and joint consistency // We will show them! Essays in honour of Dov Gabbay / Ed. by S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. Lamb, J. Woods. London: King's College Publ., 2005. V. 2. P. 293–305.
9. *Максимова Л. Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 5. С. 556–586.
10. *Zakharyaschev M.* Canonical formulas for K4. Part II. Cofinal subframe logics // J. Symb. Logic. 1996. V. 61, N 2. P. 421–449.
11. *Fine K.* An ascending chain of S4 logics // Theoria. 1974. V. 40. P. 110–116.
12. *Янков В. А.* О связи между выводимостью в интуиционистском исчислении высказываний и конечными импликативными структурами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 131, № 6. С. 1293–1294.
13. *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal logic. Oxford: Clarendon Press, 1997.
14. *Fine K.* Logics containing K4. Part II // J. Symb. Logic. 1985. V. 50. P. 619–651.

15. *Zakharyaschev M.* Canonical formulas for K4. Part I. Basic results // J. Symb. Logic. 1992. V. 57. P. 1377–1402.

16. *Чагров А. В.* Неразрешимые свойства суперинтуиционистских логик // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 1994. С. 62–108.

Статья поступила 25 октября 2012 г.

Максимова Лариса Львовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru