Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2013. Том 54, № 6

УДК 510.53

ДОПОЛНЕНИЯ Π_1^0–СТЕПЕНЕЙ ПО ПЕРЕЧИСЛИМОСТИ

М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Рассматривается вопрос о существовании дополнений степеней по перечислимости ковычислимо перечислимых множеств в локальной структуре e-степеней.

Ключевые слова: степень по перечислимости, скачок по перечислимости, низкая степень.

При изучении элементарных свойств упорядоченных структур важен вопрос о существовании в них дополнений. В данной статье исследуются вопросы о существовании дополнений в локальной структуре степеней по перечислимости (см. [1; 2, § 9.7]). Множество A *сводится по перечислимости* к множеству B ($A \leq_e B$), если существует вычислимо перечислимое (в.п.) множество W такое, что для всех x выполнено соотношение

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists F \text{ — конечное множество})[\langle x, F\rangle \in W \ \&\ F \subseteq B].$$

Здесь множество F отождествляется с его номером в канонической нумерации всех конечных множеств. Каждое в.п. множество W_z, рассматриваемое как множество пар натуральных чисел, определяет оператор $\Phi_z : 2^\omega \to 2^\omega$ следующим образом:

$$\Phi_z(B) = \{x : (\exists F \text{ — конечное множество})[\langle x, F\rangle \in W_z \ \&\ F \subseteq B]\}.$$

Введенный оператор Φ_z называется *оператором перечисления* (*с геделевским номером* z) или *e-оператором*, а элементы W_z называются *аксиомами* оператора Φ_z. Очевидно, что условие $A \leq_e B$ равносильно существованию такого e-оператора Φ, что $\Phi(B) = A$. Рассмотрим отношение эквивалентности $\equiv_e$, определенное следующим образом: $A \equiv_e B \Leftrightarrow A \leq_e B \ \&\ B \leq_e A$. Соответствующие фактор-классы обозначаются через $\deg_e(A)$ и называются *степенями по перечислимости* или *e-степенями*. Для e-степеней $\mathbf{a} = \deg_e(A)$, $\mathbf{b} = \deg_e(B)$ пишем $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, если $A \leq_e B$. Относительно введенного порядка класс всех e-степеней образует верхнюю полурешетку. Степень по перечислимости называется *тотальной*, если она содержит множество вида $A \oplus \overline{A}$. Как и на классе тьюринговых степеней, на классе e-степеней можно определить операцию *скачка по перечислимости*, или *e-скачка* (см. [3]), полагая $\deg_e(A)' = \deg_e(K^A \oplus \overline{K^A})$, где

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–31389 мол_а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (соглашение 14.A18.21.1127), а также гранта Президента РФ (МК–6106.2012.1).

$K^A = \{z : z \in \Phi_z(A)\}$. Так, например, $\mathbf{0}' = \deg_e(\overline{K})$, где K — креативное множество и $\mathbf{0}$ — степень, состоящая из в.п. множеств. Степень по перечислимости $\mathbf{a}$ называется *низкой*, если $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$.

Пусть $\mathscr{L}$ — частично упорядоченное множество с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1. Элемент $b \in \mathscr{L}$ называется *дополнением* элемента $a \in \mathscr{L}$, если $a \cap b = 0$ и $a \cup b = 1$. В представленной статье исследуется вопрос о существовании дополнений в полурешетке $D_e(\leq \mathbf{0}')$, состоящей из e-степеней $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'$. Как отмечено Купером [3], $A \leq_e \overline{K}$ тогда и только тогда, когда $A \in \Sigma^0_2$. Поэтому $D_e(\leq \mathbf{0}'_e)$ состоит из e-степеней Σ^0_2-множеств. Рассмотрим вложение $\imath(\deg_T(A)) = \deg_e(A \oplus \overline{A})$ тьюринговых степеней в тотальные e-степени. Легко видеть, что $\imath(\deg_T(W)) = \deg_e(\overline{W})$ для любого в.п. множества W. Таким образом, полурешетка в.п. тьюринговых степеней изоморфна полурешетке Π^0_1-степеней по перечислимости.

Впервые вопрос о существовании дополнений в степенных структурах был изучен Эпштейном [4]: он показал, что в структуре тьюринговых степеней ниже $\mathbf{0}'_T$ каждая в.п. степень имеет дополнение. Впоследствии Познером и Робинсоном [5, 6] установлено, что дополнением обладает каждая тьюринговая степень ниже $\mathbf{0}'_T$. Однако это уже не так в $D_e(\leq \mathbf{0}')$: Купер, Сорби и Йи [7] доказали существование ненулевой Σ^0_2-e-степени, не имеющей даже относительных дополнений наверх; Калимуллиным [8, 9] установлено существование Π^0_1-e-степени, не имеющей Σ^0_2-дополнений.

В следующей теореме показано, что свойством недополняемости обладает каждая низкая Π^0_1-e-степень.

Теорема 1. *Если $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ — низкая Π^0_1-e-степень, $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ — Σ^0_2-e-степень и $\mathbf{0}' \leq \mathbf{a} \cup \mathbf{b}$, то существует такая e-степень $\mathbf{c} > \mathbf{0}$, что $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$.*

Доказательство. Пусть даны не в.п. низкое Π^0_1-множество A и Σ^0_2-множество B такие, что $\overline{K} \leq_e A \oplus B$. Фиксируем некоторые равномерно вычислимые аппроксимации $A = \bigcap_s A_s$, $B = \liminf_s B_s$, где последовательность $\{A_s\}_{s \in \omega}$ убывает: $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Нашей задачей является построение множества C, удовлетворяющего для всех z требованию

$$\mathscr{R}_z : C \neq W_z,$$

и операторов перечисления Ψ и Ω таких, что $C = \Psi(A) = \Omega(B)$. Также будем строить вспомогательные Π^0_1-множество E и оператор перечисления Δ. Используя теорему о парной рекурсии, можно предположить, что в начале построения имеем такие индексы n и m, что $E = \overline{W}_n$ и $\Delta = \Phi_m$. Выберем оператор перечисления Γ такой, что $E = \Gamma(A \oplus B)$. Поскольку A низкое, можно фиксировать вычислимую функцию f, аппроксимирующую $\Delta(A)$, а именно $\Delta(A)(x) = \lim_s f(x, s)$ для всех x.

Построение. Полагаем $E_0 = \omega$. Фиксируем вычислимое перечисление $F_0,\ F_1,\ F_2, \dots$ всех конечных множеств такое, что для каждого конечного множества F существует бесконечно много i таких, что $F = F_i$. Приведем равномерную по z конструкцию множества $C^{[z]} = \{\langle x, z\rangle : \langle x, z\rangle \in C\}$, организовывая неравенство $C^{[z]} \neq W^{[z]}_z$. В конце построения положим $C = \bigcup_z \lim_s C^{[z]}_s$. Будем обозначать $y(t) = \min\ E^{[z]}_t$, $p(i, t) = \langle\langle i, t\rangle, z\rangle$ и $(X)_k = \{x : 2x + k \in X\}$ для произвольного множества X и $k = 0, 1$.

Этап $t \geq 0$. Если выполнено одно из следующих условий:

(a) $\langle y(t), F_t\rangle \notin \Gamma_t$,
(b) $(F_t)_1 \nsubseteq B$ во время работы на подэтапе 1,
(c) $(F_t)_0 \nsubseteq A$ во время работы на подэтапе 2,
то переходим к завершению этапа.

Подэтап 1. Ждем, что для некоторых i и s будет выполнено

$$p(i,t) \in W_{z,s} \ \& \ A_{i+s} \restriction i \neq A_{i+s+1} \restriction i. \tag{1}$$

Пока ждем, перечисляем в Ψ аксиому $\langle p(i,t), A_{i+s} \restriction i\rangle$, в Ω — аксиому $\langle p(i,t), (F_t)_1\rangle$ и кладем $p(i,t)$ в C. Как только нам встретились i, s (обозначим такое i через i_0), удовлетворяющие условию (1), удаляем $p(i_0,t)$ из C, для всех $k \neq i_0$ перечислим в Ψ и Ω аксиомы $\langle p(k,t), \varnothing\rangle$, положим $p(k,t)$ в C и переходим к следующему подэтапу.

Подэтап 2. Перечисляем аксиому $\langle z, (F_t)_0\rangle$ в Δ и ждем шаг $s > t$ такой, что $f(z,s) = 1$. Как только для некоторого $s > t$ случилось $f(z,s) = 1$, извлекаем $y(t)$ из E (если $(F_t)_0 \subseteq A$, то $(F_t)_1 \nsubseteq B$ и, следовательно, $W_z(p(i_0,t)) \neq C(p(i_0,t))$).

Завершение этапа. Для всех i перечисляем в Ψ и Ω аксиомы $\langle p(i,t), \varnothing\rangle$ и кладем $p(i,t)$ в C. Переходим к следующему этапу.

Отметим некоторые свойства, вытекающие непосредственно из построения:
(i) существует предел $C = \lim\limits_s C_s$,
(ii) $C = \Psi(A) = \Omega(B)$.
Фиксируем z и установим некоторые свойства построения $C^{[z]}$.

Лемма 1. *Существует лишь конечное число этапов t, на которых $y(t)$ извлекается из E.*

Доказательство. Каждое $y(t)$ может быть удалено из E только на подэтапе 2. Следовательно, на каждом этапе t если $y(t)$ извлекается из E, то существует $s > t$ такое, что $f(z,s) = 1$. Если существует бесконечно много t таких, что $y(t) \notin E$, то $\lim\limits_s f(z,s) = 1$ и, следовательно, $z \in \Delta(A)$. Значит, на некотором этапе v в Δ перечислена аксиома $\langle z, (F_v)_0$ такая, что $(F_v)_0 \subseteq A$. Тогда этап v работает бесконечно долго на подэтапе 2, так как условие (c) неверно и для всех $s > v$ число $y(s)$ не извлекается из E.

Лемма 2. *Существует этап t, который никогда не завершится.*

Доказательство. Выберем наименьшее v такое, что $y(s) \in E$ для всех $s \geq v$. Отметим, что для всех $s \geq v$ выполнено равенство $y(v) = y(s)$. Выберем наименьшее $t \geq v$ такое, что $F_t \subseteq A_s \oplus B_s$ для всех $s \geq t$ и $\langle y(v), F_t\rangle \in \Gamma_t$. Такое t существует, так как $E = \Gamma(A \oplus B)$ и каждое конечное множество F встречается в перечислении $\{F_i\}_{i\in\omega}$ бесконечно часто. Тогда на этапе t условия (a)–(c) никогда не будут выполнены. Следовательно, некоторый этап $t' \leq t$ никогда не завершится.

Лемма 3. $C^{[z]} \neq W_z^{[z]}$.

Доказательство. Пусть t — этап без завершения. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Этап t всегда работает на подэтапе 1. Очевидно, что в этом случае $p(i,t) \in C$ для всех i. Предположим, что $C^{[z]} = W_z^{[z]}$. Фиксируем произвольное i и выберем такое s, что $p(i,t) \in W_{z,s}$. Тогда $A_{i+s} \restriction i = A \restriction i$. Это противоречит тому, что $\deg_e(A) > \mathbf{0}$. Следовательно, $C^{[z]} \neq W_z^{[z]}$.

Случай 2. Этап t бесконечно долго работает на подэтапе 2. Отметим, что в этом случае верны следующие соотношения:

(1) в Ψ не перечислено ни одной такой аксиомы $\langle p(i_0,t),F\rangle$, что $F\subseteq A$,

(2) в Ω перечислено не больше одной аксиомы $\langle p(i_0,t),(F_t)_1\rangle$ с первой координатой, равной $p(i_0,t)$,

(3) $p(i_0,t)\in W_z$.

Так как $y(t)\notin E$, $(F_t)_0\subseteq A$ и $\langle y(t),F_t\rangle\in\Gamma_t$, то $(F_t)_1\not\subseteq B$. Таким образом, согласно (1) и (2) $p(i_0,t)\notin C$. Ввиду (3) $W_z(p(i_0,t))\neq C(p(i_0,t))$.

Этим завершается доказательство теоремы.

Легко видеть, что доказательство теоремы 1 не может быть адаптировано для произвольной Π^0_1-e-степени. Как показывает следующая теорема, это серьезная трудность, и существуют дополняемые Π^0_1-e-степени. В доказательстве будет применяться метод деревьев с $\mathbf{0}''$-приоритетными рассуждениями (см. подробности в [10, гл. XIV]). Через $\omega^{<\omega}$ обозначаем дерево из всех конечных строк, символами которых являются натуральные числа. Элементы $\omega^{<\omega}$ будем также называть *вершинами*. Для строки α через $|\alpha|$ обозначим ее длину. Запись $\alpha\subseteq\beta$ означает, что строка β расширяет строку α. Для числа a запись $\langle a\rangle$ означает строку из одного символа a; $\alpha\hat{}\beta$ — конкатенацию строк α и β, $\alpha\hat{}b$ — конкатенацию строк α и $\langle b\rangle$. Для строк α, β будем говорить, что α находится *слева* от β (β расположена *правее*, чем α), записывается как $\alpha<_L\beta$, если

$$\exists a,b\in\omega\,\exists\gamma\in\omega^{<\omega}[\gamma\hat{}a\subseteq\alpha\ \&\ \gamma\hat{}b\subseteq\beta\ \&\ a<b].$$

Пишем $\alpha\leq\beta$, если $\alpha<_L\beta$ или $\alpha\subseteq\beta$. Запись $\alpha<\beta$ означает, что $\alpha\leq\beta$ и $\alpha\neq\beta$. Если R — некоторое выражение, вычисляемое в ходе конструкции, то вычисленное на шаге s выражение R будем обозначать через $R[s]$.

Теорема 2. *Существуют Π^0_1-e-степень $\mathbf{a}>\mathbf{0}$ и Δ^0_2-e-степень $\mathbf{b}>\mathbf{0}$ такие, что $\mathbf{a}\cap\mathbf{b}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{a}\cup\mathbf{b}=\mathbf{0}'$.*

Доказательство. Построим не в.п. Π^0_1-множество A и Δ^0_2-множество B, степени которых образуют минимальную пару, удовлетворяя для каждой пары операторов перечисления Ψ и Ω следующему отрицательному требованию:

$$\mathscr{M}_{\Psi,\Omega}:\Psi(A)=\Omega(B)\Rightarrow\exists W[W\text{ в.п. }\&\ W=\Psi(A)].$$

Для того чтобы A, B не были в.п., выполним следующие положительные требования для каждого e:

$$\mathscr{P}_{2e}:A\neq W_e,\quad \mathscr{P}_{2e+1}:B\neq W_e.$$

Также с целью выполнить условие $\overline{K}\leq_e A\oplus B$, построим оператор перечисления Γ, удовлетворяя одному глобальному требованию

$$\mathscr{G}:\overline{K}=\Gamma(A\oplus B).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что если дан оператор перечисления Φ и аксиома $\langle x,D\rangle$ перечисляется в Φ на шаге $s+1$, то $\max D<s$.

Основной модуль для выполнения $\mathscr{M}_{\Psi,\Omega}$. Стратегия удовлетворения одиночного требования $\mathscr{M}_{\Psi,\Omega}$ состоит в построении в.п. множества W, равного $\Psi(A)$, при условии $\Psi(A)=\Omega(B)$. Если элемент x перечисляется в $\Psi(A)\cap\Omega(B)$ на шаге s, перечислим x в W. Если на последующем шаге из A или из B извлекается некоторый элемент $y<s$ (например, y извлекается из A), запрещаем

извлечение элементов, меньших s, из B до тех пор, пока вычисление $\Psi(A)(x)$ не будет восстановлено. При этом для каждого $x \in W$ будем запрещать бесконечные нарушения одного из вычислений $\Psi(A)(x)$, $\Omega(B)(x)$.

Основной модуль для выполнения $\mathscr{P}_i$. Одиночное требование $\mathscr{P}_i$ удовлетворяется согласно стандартной стратегии Мучника — Фридберга. Допустим, что $i = 2e$. Выбираем свидетеля $z \in A$ и ждем, когда z перечислится в W_e. Если такое случится, то извлекаем z из A. Случай $i = 2e + 1$ рассматривается аналогично с заменой A на B.

Основной модуль для выполнения $\mathscr{G}$. С целью удовлетворения $\mathscr{G}$ перечисляем в Γ аксиому $\langle i, F_i\rangle$ для каждого i, соблюдая при этом соотношения

$$F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots, \quad \max{(F_i)_l} < \max{(F_{i+1})_l}, \quad l = 0, 1.$$

Если элемент i перечисляется в K на шаге s, извлекаем из A наибольший элемент a такой, что $2a \in F_i$, и для каждого $k > i$ выберем F_k так, что $\max{(F_k)_0} \geq \max A \restriction (k + s)$ и $\max{(F_k)_1} \geq \max B \restriction (k + s)$.

Стратегия выполнения $\mathscr{G} < \mathscr{M}_{\Psi,\Omega} < \mathscr{P}_{2e+1}$. Главная трудность при выполнении такой последовательности требований заключается в следующем. Предположим что элемент x_0 перечисляется в $\Psi(A) \cap \Omega(B)$ $[s_0]$. Согласно действиям $\mathscr{M}$-стратегии, x_0 перечисляется в W. На большем шаге некоторый элемент $b[t]$ может быть извлечен из B действием $\mathscr{P}$-стратегии, нарушив при этом вычисление $\Omega(B)(x_0)$. На некотором последующем шаге $\mathscr{G}$-стратегия может извлечь из A элемент a, нарушая вычисление $\Psi(A)(x_0)$, что может повлечь $x_0 \in W - \Psi(A)$. Чтобы избежать этого, будем поступать следующим образом: разрешим $\mathscr{P}$-стратегии использовать только числа z, равные $\max(F_i)_0$ или $\max(F_i)_1$ для некоторого i; при извлечении элемента b из B на шаге s, для каждого такого i, что $b \in F_i$, перечисляем в Γ такие аксиомы $\langle i, F_i^1\rangle$, что $\left[\max F_i^1\right]/2 > s$ (заметим, что почти все множества F_i содержат b). Пусть i_0 будет такое наименьшее i, что $b \in F_i$. Тогда вычисление $\Psi(A)(x_0)$ может быть нарушено только перечислением $i < i_0$ в K. Как только $i < i_0$ перечисляется в K, извлекаем $c_i = \max(F_i)_0$ из A и перечислим все числа, большие c_i, обратно в B, восстанавливая тем самым вычисление $\Omega(B)(x_0)$. Если $\mathscr{M}$-стратегия имеет бесконечный выход, то в случае действия $\mathscr{P}$-требования $b = \max\bigl(F_{i_0}^1\bigr)_1$ в конечном итоге извлекается из B. В самом деле, выберем шаг $v_0 > s_0$ такой, что $K_{v_0}(i) = K(i)$ для всех $i < i_0$. Тогда b может быть извлечено из B на таком шаге $t \geq v_0$, что $x_0 \in \Psi(A) \cap \Omega(B)$ $[t]$. Если $\mathscr{M}$-стратегия имеет конечный выход, то она устанавливает конечный запрет r и $\mathscr{P}$-стратегия может использовать свидетель $z > r$. Отметим, что такие действия позволяют также выполнить для каждого $x \in W$ условие

$$\exists^\infty s[x \in \Psi_s(A_s) \ \vee \ x \in \Omega_s(B_s)] \Rightarrow [x \in \Psi(A) \ \vee \ x \in \Omega(B)].$$

Для удовлетворения всех требований будем работать на дереве $T = \omega^{<\omega}$. Определим функцию запрета $r(e, s)$ с помощью дерева T, а также вычислимую последовательность строк $\{\delta_t\}_{t\in\omega}$, аппроксимирующую истинный путь. Для $\alpha \in T$ шаг s называется *α-шагом*, если $\alpha \subseteq \delta_s$ или $s = 0$. Шаг s называется *α-расширяющим*, если s является α-шагом таким, что

$$W \subseteq \Psi(A) \cap \Omega(B)\ [s],$$

где W — в.п. множество, которое строим согласно α-стратегии для удовлетворения требования $\mathscr{M}_{\Psi,\Omega}$, и $|\alpha|$ является номером пары геделевских номеров

e-операторов Ψ и Ω. Функцией запрета для единственной α-стратегии является

$$r(\alpha,s)=\begin{cases}0, & \text{если } s\ \alpha\text{-расширяющий шаг},\\ \text{наибольший } \alpha\text{-расширяющий шаг } t<s & \text{иначе}.\end{cases}$$

Для $s \geq 0$ определим $\delta_s \in T$, $|\delta_s| = s$, следующим образом. По данной $\alpha = \delta_s \restriction e$, $e < s$, определим

$$\delta_s(e) = r(e,s) =_{dfn} \max\{r(\beta,s) : \beta \leq \alpha\}.$$

Таким образом, функция $r(e,s)$ будет запрещать нарушения требования $\mathscr{M}_e$ положительным требованиям младшего приоритета. Для данного i обозначим через $E(i,s)$ конечное множество

$$E(i,s) = ([0,i] \oplus [0,i]) \cap (A_s \oplus B_s).$$

Обозначим $c_{i,s} = \max\{x : 2x \in E(i,s)\}$. Выберем вычислимую инъективную функцию h такую, что $h(x) \notin K$ для каждого x. Будем говорить, что требование $\mathscr{P}_{2e}$ *требует внимания на шаге* s, если $x \in W_{e,s} \Rightarrow x \in A_s$ для всех x. Аналогично P_{2e+1} требует внимания с заменой A на B. Для удовлетворения каждого требования $\mathscr{P}_i$ будем использовать в качестве свидетелей такие числа $c_{h(j),s}$, что $j \in \omega^{[i]}$.

Построение.

Шаг $s = 0$. Полагаем $A_0 = B_0 = \omega$. Перечисляем в Γ аксиомы $\langle i, E(i,0)$ для каждого i. Также для каждого i определим переменную для хранения последней добавленной аксиомы в Γ: $F_{i,0} = E(i,0)$. Положим $W_0(\alpha) = \varnothing$ для всех строк α из T.

Шаг $s+1$. (1) Выполнение $\mathscr{G}$. Находим наименьшее $i < s$ такое, что

$$i \in K \ \&\ F_i \subseteq A \oplus B\ [s],$$

извлекаем $c_{i,s}$ из A (с целью сделать аксиому $\langle i, F_{i,s}\rangle$ ложной в $A \oplus B$) и кладем в B все числа $b > c_{i,s}$. Для каждого $k > i$ перечислим в Γ аксиому $\langle k, E(k+s, s+1)\rangle$ и установим $F_{k,s+1} = E(k+s, s+1)$.

(2) Выполнение $\mathscr{M}$. Для всех строк α если шаг s является α-расширяющим, то перечисляем в $W(\alpha)$ все элементы из $\Psi(A)[s] \cap \Omega(B)[s]$, где $|\alpha|$ есть номер пары Ψ, Ω; если шаг s является α-шагом, то *инициализируем* все вершины β правее α, определяя $W(\beta) = \varnothing$.

(3) Выполнение $\mathscr{P}$. Для каждого i обозначим через b_i наименьший элемент $c_{h(j),s+1}$ такой, что $j \in \omega^{[i]}$ и $c_{h(j),s+1} > r(i,s+1)$. Выберем наименьшее i, такое что $\mathscr{P}_i$ требует внимания и $b_i \in X \cap W_{[i/2]}\ [s+1]$, где $X = A$, если i четно, и $X = B$ в противном случае, и извлекаем b_i из X. Пусть $b_i = c_{h(j),s+1}$. Для каждого $k \geq h(j)$ перечислим в Γ аксиому $\langle k, E(k+s, s+1)\rangle$ и установим $F_{k,s+1} = E(k+s, s+1)$. Выберем вершину α такую, что $|\alpha| = i$, s является α-шагом, и инициализируем все вершины $\beta > \alpha$.

В конце построения полагаем $A = \bigcap\limits_s A_s$, $B = \lim\limits_s B_s$ и $\Gamma = \bigcup\limits_s \Gamma_s$.

Отметим некоторые соотношения, вытекающие непосредственно из построения:

(a) для каждого i существует $c_i = \lim\limits_s c_{i,s}$,

(b) для каждого i существует конечное множество $F_i = \lim\limits_s F_{i,s}$,

(c) если $F_{i,s} \neq F_{i,s+1}$, то $F_{i,s} \nsubseteq A_{s+1} \oplus B_{s+1}$,

(d) если $F_{i,s} \nsubseteq A_{s+1} \oplus B_{s+1}$, то $F_{i,s} \nsubseteq A_t \oplus B_t$ для всех $t > s$.

Верификация. Функция $f \in \omega^\omega$ называется *истинным путем* в T, если f является самой левой ветвью T, посещаемой $\{\delta_s\}_{s\in\omega}$ бесконечно часто, а именно $f \restriction n = \liminf_s \delta_s \restriction n$ для всех n, т. е. если $\alpha = f \restriction n$, то

$$\exists^{<\infty} s[\delta_s <_L \alpha] \ \& \ \exists^\infty s[\alpha \subseteq \delta_s].$$

Лемма 1. *Существует истинный путь f.*

Доказательство. Выберем n и предположим по индукции, что существует $f \restriction n = \liminf_s \delta_s \restriction n$. Обозначим $\alpha = f \restriction n$. Тогда существует только конечное число шагов s таких, что $\delta_s <_L \alpha$. Пусть t — наибольший такой шаг. Пусть $u > t$таково, что $\alpha \subseteq \delta_u$. Положим $k = \max\{r(\beta, u) : \beta < \alpha\}$. Теперь если существует бесконечно много α-расширяющих шагов, то $f \restriction (n+1) = \alpha\hat{\ }\max\{t, k\}$. Если α-расширяющих шагов только конечное число, то пусть v будет наибольшим таким шагом. В этом случае $f \restriction (n+1) = \alpha\hat{\ }\max\{v, t, k\}$.

Лемма 2. $B \in \Delta^0_2$.

Доказательство следует из того, что если некоторый элемент c извлекается из B, то он перечисляется в B обратно в том случае, когда некоторый $x < c$ извлекается из A.

Лемма 3. *Каждое $\mathscr{P}_i$ удовлетворено.*

Доказательство проводится индукцией по i. Выберем шаг u такой, что каждое $\mathscr{P}_k$, $k < i$, удовлетворено. Обозначим через c такое наименьшее $c_{h(j)} = \lim_s c_{h(j),s}$ такое, что $j \in \omega^{[i]}$ и $c_{h(j)} > f(i)$. Предположим, что $i = 2e$. Выберем шаг $s > u$ такой, что $\mathscr{P}_i$ требует внимания, $c_{h(j),t} = c$ для всех $t > s$, $c \in W_{e,s}$ и $c > r(i, s)$. Тогда $c \notin A_t$ для всех $t > s$. Если $i = 2e + 1$, то выберем шаг $s > u$ такой, что $\mathscr{P}_i$ требует внимания, $A_s \restriction c = A \restriction c$, $c_{h(j),t} = c$ для всех $t > s$, $c \in W_{e,s}$ и $c > r(i, s)$. Тогда $c \notin B_t$ для всех $t > s$.

Лемма 4. *Каждое $\mathscr{M}_{\Psi,\Omega}$ удовлетворено.*

Доказательство. Фиксируем операторы перечисления Ψ, Ω и e — номер их пары. Предположим, что $\Psi(A) = \Omega(B)$. Пусть $\alpha = f \restriction e$. Отметим, что равенство $\Psi(A) = \Omega(B)$ влечет существование бесконечного числа α-расширяющих шагов. Выберем шаг t такой, что для всех $s > t$ строка δ_s не будет левее α и вершина α не инициализируется на шаге s. Наша цель — доказать равенство $W(\alpha) = \Psi(A)$. Далее будем обозначать $W = W(\alpha)$. Включение $\Psi(A) \subseteq W$ устанавливается непосредственно из построения: для данного x выберем α-расширяющий шаг $s > t$ такой, что $x \in \Psi(A)[s] \cap \Omega(B)[s]$; согласно второму подшагу x перечисляется в W на шаге s. Чтобы установить включение $W \subseteq \Psi(A)$, выберем $x \in W$ и предположим, что x перечисляется в W на шаге $s_0 > t$. Согласно второму подшагу $x \in \Psi(A)[s_0] \cap \Omega(B)[s_0]$. Предположим, что $x \notin \Omega(B)$. Тогда существует элемент $c < s_0$ такой, что $c \in B_{s_0} - B$. Выберем наименьший шаг v такой, что $c \notin B_s$ для всех $s \geq v$. Согласно третьему подшагу $c = c_{j,v}$ для некоторого j. Отметим, что $x \in \Psi(A)[v]$, так как $c > r(e, v)$. Ввиду третьего подшага для каждого $k \geq j$ значение F_k устанавливается равным $E(k + v - 1, v)$, следовательно, вычисление $\Psi(A)(x)$ не будет нарушаться извлечением c_k из A. Если некоторый элемент $c_i \leq r(e, v)$ при $i < j$ извлекается из A, то согласно первому подшагу c кладется обратно в B. Это противоречит выбору v. Следовательно, $x \in \Psi(A)$.

Лемма 5. *$\mathscr{G}$ удовлетворено.*

Доказательство. С учетом первого подшага в построении имеем

$$F_i \subseteq A \oplus B \Leftrightarrow c_i \in A \Leftrightarrow i \in \overline{K}.$$

Согласно свойствам (c) и (d) построения для всех t если $F_{i,t} \neq F_i$, то $F_{i,t} \not\subseteq A \oplus B$. Поэтому $\overline{K}(i) = \Gamma(A \oplus B)(i)$.

Этим завершается доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cooper S. B.* Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative compitability of partial functions // Lect. Notes Math. 1990. V. 1432. P. 57–110.
2. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
3. *Cooper S. B.* Partial degrees and the density problem. Part 2. The enumeration degrees of the Σ^0_2 sets are dense // J. Symb. Log. 1984. V. 49. P. 503–513.
4. *Epstein E. L.* Minimal degrees of unsolvability and the full approximation construction. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1974. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 162).
5. *Posner D. B.* The upper semilattice of degrees $\leq 0'$ is complemented // J. Symb. Log. 1981. V. 46. P. 705–713.
6. *Posner D. B., Robinson R. W.* Degrees joining to $0'$ // J. Symb. Log. 1981. V. 46. P. 714–722.
7. *Cooper S. B., Sorbi A., Yi X.* Cupping and noncupping in the enumeration degrees of Σ^0_2-sets // Ann. Pure Appl. Log. 1996. V. 82. P. 317–342.
8. *Калимуллин И. Ш.* Относительные дополнения в Δ^0_2-степенях по перечислимости // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. С. 547–566.
9. *Калимуллин И. Ш.* Структурные свойства верхних полурешеток степеней по перечислимости: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Казань, 2001.
10. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанск. мат. о-во, 2000.

Статья поступила 14 ноября 2012 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра алгебры и математической логики
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Marat.Faizrahmanov@gmail.com