Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517:514.76

ТОНКИЕ СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ В УСЛОВИЯХ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Выведены тонкие геометрические свойства базисных векторных полей на пространствах Карно — Каратеодори в условиях минимальной гладкости. Из них получены оценки приближения пространства Карно — Каратеодори локальными однородными группами.

Ключевые слова: пространство Карно — Каратеодори, векторное поле, локальная однородная группа.

Исследование неголономных структур, базисные векторные поля которых имеют минимальную гладкость, актуально для построения моделей и решения прикладных задач (см., например, [1–5]). Одной из ключевых задач является приближение таких структур групповыми, обладающими рядом полезных для исследований свойств, поля которых, как известно, гладкие. Объект исследования в данной статье — пространства Карно — Каратеодори.

Определение 1 [6] (сравни [1, 7, 8]). Фиксируем связное риманово C^∞-многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N. Многообразие $\mathbb{M}$ называется *пространством Карно — Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ существует фильтрация

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

подрасслоениями такая, что для каждой точки $p \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $U \subset \mathbb{M}$ с набором C^1-гладких базисных полей $X_1, \dots, X_N$, обладающая следующими свойствами.

(1) Во всякой точке $v \in U$ подпространство

$$H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$$

имеет размерность $\dim H_i$ независимо от v, $i = 1, \dots, M$.

(2) Справедливы включения $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \dots, M-1$, $i + j \le M$.

Кроме того, если дополнительно выполнено свойство

(3) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \left[\frac{j+1}{2}\right]$, $H_0 = \{0\}$, $j = 1, \dots, M-1$,

то пространство Карно — Каратеодори называется *многообразием Карно*.

Подрасслоение $H\mathbb{M}$ называется *горизонтальным*, число M — *глубиной* многообразия $\mathbb{M}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

Предположение 1. *Будем предполагать, что базисные векторные поля пространства Карно — Каратеодори* $\mathbb{M}$ *принадлежат классу* $C^{1,\alpha}$, $\alpha \geq 0$ *(при* $\alpha = 0$ *поля принадлежат классу* C^1: $C^{1,0} = C^1$).

Определение 2. *Степень* поля $\deg X_k$ равна $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$, $k = 1, \dots, N$.

Замечание 1. Из условия (2) определения 1 следует, что

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k:\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v), \tag{1}$$

$v \in U$, $i, j = 1, \dots, N$.

Опишем локальную однородную группу и ее основные свойства.

Теорема 1 [7]. *Фиксируем* $u \in \mathbb{M}$. *Набор*

$$\bar{c}_{ijk} = \begin{cases} c_{ijk}(u) \text{ из } (1), & \text{если } \deg X_i + \deg X_j = \deg X_k, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

определяет структуру градуированной нильпотентной алгебры Ли.

Построим алгебру Ли $\mathfrak{g}^u$ со структурными постоянными теоремы 1 как градуированную нильпотентную алгебру Ли векторных полей $\{(\widehat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ на $\mathbb{R}^N$ такую, что экспоненциальное отображение

$$(x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i (\widehat{X}_i^u)'\right)(0)$$

тождественно [9, 10]. В силу этого имеем $x_i = \exp\big(x_i (\widehat{X}_i^u)'\big)(0)$. Следовательно, производная в нуле левой части, равная вектору e_i канонического базиса в $\mathbb{R}^N$, совпадает с производной правой части, равной $(\widehat{X}_i^u)'(0)$. Таким образом, условие тождественности экспоненциального отображения влечет соотношение

$$(\widehat{X}_i^u)'(0) = e_i \tag{2}$$

для векторных полей $(\widehat{X}_i^u)'$, $i = 1, \dots, N$.

Определение 3. Пусть $u \in \mathbb{M}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in B_E(0, r)$, где $B_E(0, r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : B_E(0, r) \to \mathbb{M}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u является C^1-гладким диффеоморфизмом, если $0 < r \leq r_u$ для некоторого $r_u > 0$. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами*, или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{M}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

По определению 3 имеем $[(\theta_u)_* \langle e_i \rangle](0) = D\theta_u(0)\langle e_i \rangle = X_i(u)$. Отсюда и из соотношения (2) вытекает, что

$$\big[(\theta_u)_* \big\langle (\widehat{X}_i^u)' \big\rangle\big](0) = X_i(u), \quad i = 1, \dots, N. \tag{3}$$

По построению для векторных полей $\{(\widehat{X}_i^u)'\}_{i=1}^N$ справедливы соотношения

$$\big[(\widehat{X}_i^u)', (\widehat{X}_j^u)'\big] = \sum_{k:\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(u) (\widehat{X}_k^u)', \tag{4}$$

$i, j = 1, \ldots, N$, всюду на $\mathbb{R}^N$.

Обозначение 1. Используем следующее стандартное обозначение: для каждого N-мерного мультииндекса $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ его *однородная норма* равна $|\mu|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i \deg X_i$.

Определение 4. Нильпотентная градуированная группа $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}^u$, называется *нильпотентным касательным конусом* $\mathbb{M}$ в точке $u \in \mathbb{M}$. Построим $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ в $\mathbb{R}^N$ как группалгебру [9], т. е. таким образом, что экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}^u$ в нильпотентную градуированную группу $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ тождественно:

$$\exp\Biggl(\sum_{i=1}^{N} x_i\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'\Biggr)(0) = (x_1, \ldots, x_N).$$

Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа [9].

Базисные векторные поля $\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)' \in \mathfrak{g}^u$, $i = 1, \ldots, N$, левоинвариантны относительно этой групповой операции.

Известно [11], что j-я координата векторного поля $\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'(x) = \sum\limits_{j=1}^{N} z_i^j(u,x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ в стандартном базисе $\bigl\{\frac{\partial}{\partial x_l}\bigr\}_{l=1}^N$ в $\mathbb{R}^N$ равна

$$z_i^j(u,x) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{если } j \leq \dim H_{\deg X_i}, \\ \sum\limits_{\substack{|\mu+e_i|_h=\deg X_j,\\ \mu>0}} F_{\mu,e_i}^j(u)x^\mu, & \text{если } j > \dim H_{\deg X_i}, \end{cases} \tag{5}$$
$$i = 1, \ldots, N.$$

Используя экспоненциальное отображение θ_u, перенесем поля $\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'$ на $\mathscr{U} \subset \mathbb{M}$ следующим образом:

$$\bigl[(\theta_u)_*\bigl\langle\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'\bigr\rangle\bigr](\theta_u(x)) = D\theta_u(x)\bigl\langle\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'(x)\bigr\rangle,$$

и получим поля $\widehat{X}_i^u = (\theta_u)_*\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'$. Напомним, что $\widehat{X}_i^u(u) = X_i(u)$ так же, как и в (3).

Определение 5. Группа, ассоциированная с алгеброй Ли $\bigl\{\widehat{X}_i^u\bigr\}_{i=1}^N$ в точке $u \in \mathbb{M}$, называется *локальной однородной группой* $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$. Определим ее таким образом, чтобы отображение θ_u было *локальным групповым изоморфизмом* некоторых окрестностей единиц групп $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ и $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$.

Каноническая риманова структура на $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$ определяется внутренним произведением в единице $\mathscr{G}^u\mathbb{M}$, совпадающим с произведением на $T_u\mathbb{M}$. Каноническая риманова структура на нильпотентном касательном конусе $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ определяется таким образом, что локальный групповой изоморфизм θ_u — изометрия.

Замечание 2. Если $\mathbb{M}$ — многообразие Карно, то его нильпотентная градуированная группа $\mathbb{G}_u\mathbb{M}$ стратифицирована (т. е. является группой Карно).

Обозначение 2. Положим $\widetilde{X}_i^u = \bigl(\theta_u^{-1}\bigr)_* X_i$, $\widetilde{X}^u$ — $(N \times N)$-матрица, i-й столбец которой — это координаты вектора $\widetilde{X}_i^u$ в стандартном базисе, $\widetilde{Y}^u = (\widetilde{X}^u)^{-1}$ и $\widetilde{Y}_i^u$ — i-й столбец матрицы $\widetilde{Y}^u$, $i = 1, \ldots, N$. Обозначим символом $(\widehat{X}^u)'$ матрицу, i-й столбец которой состоит из координат вектора $\bigl(\widehat{X}_i^u\bigr)'$, и положим $\widehat{Y}^u = ((\widehat{X}^u)')^{-1}$, где i-й столбец — это $\widehat{Y}_i^u$, $i = 1, \ldots, N$.

Теорема 2 [12, 13]. *Для всякой точки $p \in \mathbb{M}$ существует окрестность $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$, $\mathscr{U} \ni p$, такая, что если $u \in \mathscr{U}$ и $x \in \mathbb{R}^N$, где $\theta_u(x) \in \mathscr{U}$, то вектор-функции*

$$\hat{y}_i(x,t) = t \cdot \widehat{Y}_i^u(tx), \quad t \in [0,1],$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\partial_t \hat{y}_i(x,t) = e_i + C^u(\hat{y}_i(x,t), x), \quad \hat{y}_i(x,0) = 0,$$

где C^u — билинейный кососимметрический оператор, действующий на векторах e_i, e_j, $i,j = 1,\dots,N$, следующим образом:

$$C^u(e_i, e_j) = \sum_{k\colon \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(u) e_k.$$

Теорема 3 [14]. *Для всякой точки $p \in \mathbb{M}$ существует окрестность $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$, $\mathscr{U} \ni p$, такая, что если $u \in \mathscr{U}$ и $x \in \mathbb{R}^N$, где $\theta_u(x) \in \mathscr{U}$, то вектор-функции*

$$y_i(x,t) = t \cdot \widetilde{Y}_i^u(tx), \quad t \in [0,1],$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\partial_t y_i(x,t) = e_i + C_{tx}(y_i(x,t), x), \quad y_i(x,0) = 0,$$

где C_x — билинейный кососимметрический оператор, действующий на векторах e_i, e_j, $i,j = 1,\dots,N$, так:

$$C_x(e_i, e_j) = \sum_{k\colon \deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(\theta_u(x)) e_k.$$

Следующие теоремы 4 и 5 составляют основной результат статьи, из которого вытекают оценки сравнения локальных геометрий локальных однородных групп и самого пространства.

Определение 6. *Растяжение* δ_ε, $\varepsilon > 0$, действует на точки $\mathbb{R}^N$ следующим образом: если $v = (v_1, \dots, v_N)$, то $\delta_\varepsilon v = (\varepsilon^{\deg X_1} v_1, \dots, \varepsilon^{\deg X_N} v_N)$.

Теорема 4. *Для всякой точки $p \in \mathbb{M}$ существует такая окрестность $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$, $\mathscr{U} \ni p$, что выполнены соотношения*

(1) $|y_i(\delta_\varepsilon x, t) - \hat{y}_i(\delta_\varepsilon x, t)| = O(\varepsilon)$;

(2) $|\delta_{1/\varepsilon} \varepsilon^{\deg X_i} y_i(\delta_\varepsilon x, t) - \hat{y}_i(x,t)| = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{\alpha}{M}}), & \alpha > 0, \\ o(1), & \alpha = 0, \end{cases}$

$t \in [0,1]$, где величины $O(1)$ и $o(1)$ равномерны на $\mathscr{U}$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь предполагается, что $u \in \mathscr{U}$ (*см. формулировки теорем* 2 *и* 3).

Доказательство. Рассмотрим окрестность, существование которой обеспечивают теоремы 2 и 3. Пусть $\alpha > 0$.

Докажем соотношение (1). Фиксируем i, рассмотрим разность $z_i(\delta_\varepsilon x, t) = y_i(\delta_\varepsilon x, t) - \hat{y}_i(\delta_\varepsilon x, t)$ и уравнение

$$\partial_t z_i(\delta_\varepsilon x, t) = C_{t\delta_\varepsilon x}(z_i(\delta_\varepsilon x, t), \delta_\varepsilon x) - z_i^0(\delta_\varepsilon x, t), \quad z_i(\delta_\varepsilon x, 0) = 0, \tag{6}$$

где

$$z_i^0(\delta_\varepsilon x, t) = C^u(\hat{y}_i(\delta_\varepsilon x, t), \delta_\varepsilon x) - C_{t\delta_\varepsilon x}(\hat{y}_i(\delta_\varepsilon x, t), \delta_\varepsilon x) = (C^u - C_{t\delta_\varepsilon x})(\hat{y}_i(\delta_\varepsilon x, t), \delta_\varepsilon x).$$

Здесь кососимметрический билинейный оператор $C^u - C_{t\delta_\varepsilon x}$ на базисных векторах определяется как

$$(C^u - C_{t\delta_\varepsilon x})(e_p, e_q) = \sum_{k\colon \deg X_k = \deg X_p + \deg X_q} (c_{pqk}(u) - c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x)))e_k \\ - \sum_{k\colon \deg X_k < \deg X_p + \deg X_q} c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x))e_k,$$

$p, q = 1, \dots, N$. Оценим координаты вектора $z_i^0(\delta_\varepsilon x, t)$:

$$(C^u - C_{t\delta_\varepsilon x})\left(\sum_{p=1}^N \hat{y}_i^p(\delta_\varepsilon x, t)e_p, \sum_{q=1}^N \varepsilon^{\deg X_q} x_q e_q\right) \\ = \sum_{p,q=1}^N \sum_{k\colon \deg X_k = \deg X_p + \deg X_q} \varepsilon^{\deg X_q}(c_{pqk}(u) - c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x))\hat{y}_i^p(\delta_\varepsilon x, t)x_q e_k \\ - \sum_{p,q=1}^N \sum_{k\colon \deg X_k < \deg X_p + \deg X_q} \varepsilon^{\deg X_q} c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x))\hat{y}_i^p(\delta_\varepsilon x, t)x_q e_k.$$

Так как величина $\|\hat{y}_i(\delta_\varepsilon x, t)\|$ равномерно ограничена на $\mathscr{U}$, первое слагаемое в силу гёльдеровости функций $\{c_{pqk}\}_{p,q,k}$ оценивается как величина, сравнимая с $\varepsilon^{1+\alpha}$, а второе — как величина, сравнимая с ε, и все оценки сравнения равномерны на $\mathscr{U}$.

Далее остается применить метод Пикара нахождения решения ОДУ (6) и сделать оценки приближений $\zeta_{i,m}$, $m \in \mathbb{N}$. Положим $\zeta_{i,0}(\delta_\varepsilon x, t) = 0$,

$$\zeta_{i,1}(\delta_\varepsilon x, t) = \int_0^t C_{\tau\delta_\varepsilon x}(\zeta_{i,0}(\delta_\varepsilon x, \tau), \delta_\varepsilon x) - z_i^0(\delta_\varepsilon x, \tau)\, d\tau,$$

$$\zeta_{i,2}(\delta_\varepsilon x, t) = \int_0^t C_{\tau\delta_\varepsilon x}(\zeta_{i,1}(\delta_\varepsilon x, \tau), \delta_\varepsilon x) - z_i^0(\delta_\varepsilon x, \tau)\, d\tau \\ = \int_0^t C_{\tau\delta_\varepsilon x}\left(\int_0^\tau C_{\tau'\delta_\varepsilon x}(\zeta_{i,0}(\delta_\varepsilon x, \tau'), \delta_\varepsilon x) - z_i^0(\delta_\varepsilon x, \tau')\, d\tau', \delta_\varepsilon x\right) - z_i^0(\delta_\varepsilon x, \tau)\, d\tau$$

и т. д.; тогда $z_i(\delta_\varepsilon x, t) = \lim\limits_{m\to\infty} \zeta_{i,m}(\delta_\varepsilon x, t)$. Так как норма оператора $C_{t\delta_\varepsilon x}$ ограничена на $\mathscr{U}$, то и оценка решения $z_i(\delta_\varepsilon x, t)$, $t \in [0, 1]$, не превосходит величину, сравнимую с $e^{\|C_{\mathscr{U}}\|}\varepsilon$, где $C_{\mathscr{U}} = \sup\limits_{u,y: u\in\mathscr{U},\, y\in\theta_u^{-1}(\mathscr{U})} \{\|C_y\|\}$, $i = 1, \dots, N$. Соотношение (1) доказано.

Теперь докажем соотношение (2). Для каждого $i = 1, \dots, N$ рассмотрим разность

$$z_i(x, t) = \delta_{1/\varepsilon}\varepsilon^{\deg X_i} y_i(\delta_\varepsilon x, t) - \hat{y}_i(x, t)$$

и уравнение

$$\partial_t z_i(x, t) = C^\varepsilon_{tx}(z_i(x, t), x) - z_i^0(x, t), \quad z_i(x, 0) = 0,$$

где

$$z_i^0(x, t) = C^u(\hat{y}_i(x, t), x) - C^\varepsilon_{tx}(\hat{y}_i(x, t), x) = \big(C^u - C^\varepsilon_{tx}\big)(\hat{y}_i(x, t), x),$$

причем кососимметрический билинейный оператор $C^u - C^\varepsilon_{tx}$ на базисных векторах определяется как

$$\big(C^u - C^\varepsilon_{tx}\big)(e_p, e_q) = \sum_{k\colon \deg X_k = \deg X_p + \deg X_q} (c_{pqk}(u) - c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x)))e_k - \sum_{k\colon \deg X_k < \deg X_p + \deg X_q} \varepsilon^{\deg X_p + \deg X_q - \deg X_k} c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x))e_k,$$

$p, q = 1, \dots, N$. Здесь билинейный кососимметрический оператор C^ε_{tx} задается на базисных векторах следующим образом:

$$C^\varepsilon_{tx}(e_p, e_q) = \sum_{k\colon \deg X_k \leq \deg X_p + \deg X_q} \varepsilon^{\deg X_p + \deg X_q - \deg X_k} c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x))e_k,$$

$p, q = 1, \dots, N$ (см. доказательство утверждения 3.2 из [14]). Подставляя значения $\hat{y}_i\big(x,t\big)$ и x вместо e_p и e_q, получаем, что первое слагаемое для $\big(C^u - C^\varepsilon_{tx}\big)(\hat{y}_i(x,t), x)$ в силу гёльдеровости структурных коэффициентов оценивается величиной, сравнимой с ε^α, если $\alpha > 0$, и в силу равномерной непрерывности структурных коэффициентов на компактной окрестности — $o(1)$, если $\alpha = 0$. Второе слагаемое оценивается величиной, сравнимой с ε, причем в обоих случаях оценки равномерны на $\mathscr{U}$. Далее остается применить рассуждения, аналогичные приведенным выше. Из них следует, что оценка решения z_i равна $O(\varepsilon^\alpha)$ при $\alpha > 0$, $i = 1, \dots, N$. Случай $\alpha = 0$ рассматривается аналогично с заменой величин $O(\varepsilon^\alpha)$ на $o(1)$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Соотношение (2) теоремы 4 для $\alpha = 0$ доказано в [14].

Определение 7. *Растяжение* δ^u_ε, $u \in \mathbb{M}$, $\varepsilon > 0$, действует на точки $\mathbb{M}$ следующим образом: если $v = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N v_i X_i\right)(u)$, то

$$\delta^u_\varepsilon v = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i \varepsilon^{\deg X_i} X_i\right)(u)$$

при условии, что правая часть имеет смысл.

Теорема 5. *Для всякой точки $p \in \mathbb{M}$ существует окрестность $\mathscr{U} \ni p$, $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$, такая, что для $u, x \in \mathscr{U}$ справедливы соотношения*

$$X_q\big(\delta^u_\varepsilon x\big) = \sum_{p=1}^N a^u_{p,q}\big(\delta^u_\varepsilon x\big) \widehat{X}^u_p\big(\delta^u_\varepsilon x\big),$$

где

$$a^u_{p,q}\big(\delta^u_\varepsilon x\big) = \begin{cases} O(\varepsilon), & \deg X_p < \deg X_q, \\ \delta_{pq} + O(\varepsilon), & \deg X_p = \deg X_q, \\ O(\varepsilon^{\alpha + \deg X_p - \deg X_q}), & \deg X_p > \deg X_q \text{ и } \alpha > 0, \\ o(\varepsilon^{\deg X_p - \deg X_q}), & \deg X_p > \deg X_q \text{ и } \alpha = 0, \end{cases}$$

для всех $q = 1, \dots, N$, и эти оценки равномерны на $\mathscr{U}$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим окрестность $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$ из теоремы 4 и $\alpha > 0$. Из соотношения (1) теоремы 4 следует, что

$$\widetilde{X}^u(\delta_\varepsilon x) = (\widetilde{Y}^u(\delta_\varepsilon x))^{-1} = (\widehat{Y}^u(\delta_\varepsilon x) + \widehat{W}^u(\delta_\varepsilon x))^{-1} = ([E + \widehat{W}^u(\delta_\varepsilon x)(\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)]\widehat{Y}^u(\delta_\varepsilon x))^{-1} = (\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)[E + \widehat{W}^u(\delta_\varepsilon x)(\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)]^{-1},$$

где элементы $\widehat{W}^u(\delta_\varepsilon x)$ оцениваются как $O(\varepsilon)$ равномерно на $\mathscr{U}$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда в силу оценок (5) элементы матрицы $\widehat{W}^u(\delta_\varepsilon x)(\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)$ также сравнимы с $O(\varepsilon)$. Следовательно, аналогичная оценка справедлива и для внедиагональных элементов матрицы $[E + \widehat{W}^u(\delta_\varepsilon x)(\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)]^{-1}$, тогда как диагональные элементы равны $1 + O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда получаем

$$\widetilde{X}^u(\delta_\varepsilon x) = (\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x) + W'(\delta_\varepsilon x),$$

где элементы $W'(x)$ оцениваются как $O(\varepsilon)$ равномерно на $\mathscr{U}$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее, в силу соотношения (2) теоремы 4 имеем

$$\begin{aligned}(\delta_{\varepsilon^{-1}})\widetilde{X}^u(\delta_\varepsilon x)(\delta_\varepsilon) &= ((\delta_{\varepsilon^{-1}})\widetilde{Y}^u(\delta_\varepsilon x)(\delta_\varepsilon))^{-1} = (\widehat{Y}^u(x) + W^u(x))^{-1}\\ &= ([E + W^u(x)(\widehat{X}^u)'(x)]\widehat{Y}^u(x))^{-1} = (\widehat{X}^u)'(x)[E + W^u(x)(\widehat{X}^u)'(x)]^{-1},\end{aligned}$$

где (δ_t) — диагональная матрица, соответствующая растяжению δ_t на $\mathbb{R}^N$, а элементы $W^u(x)$ оцениваются как $O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$. В силу этих оценок элементы $W^u(x)(\widehat{X}^u)'(x)$ также сравнимы с $O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $\mathscr{U}$. Следовательно, аналогичная оценка справедлива и для внедиагональных элементов матрицы $[E + W^u(x)(\widehat{X}^u)'(x)]^{-1}$, тогда как диагональные элементы равны $1 + O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда

$$(\delta_{\varepsilon^{-1}})\widetilde{X}^u(\delta_\varepsilon x)(\delta_\varepsilon) = (\widehat{X}^u)'(x) + W''(x),$$

где элементы $W''(x)$ оцениваются как $O(\varepsilon^\alpha)$ равномерно на $\mathscr{U}$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая, что $(\widehat{X}^u)'(x) = (\delta_{\varepsilon^{-1}})(\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)(\delta_\varepsilon)$, получаем

$$\widetilde{X}^u(\delta_\varepsilon x) = (\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x) + (\delta_\varepsilon)W''(x)(\delta_{\varepsilon^{-1}}),$$

где элемент $((\delta_\varepsilon)W''(x)(\delta_{\varepsilon^{-1}}))_{pq}$ сравним с величиной $\varepsilon^{\alpha+\deg X_p-\deg X_q}$. С учетом оценки элементов $W'(\delta_\varepsilon x)$ имеем

$$\widetilde{X}^u(\delta_\varepsilon x) - (\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x) = W(\delta_\varepsilon x),$$

где

$$(W)_{pq} = \begin{cases} O(\varepsilon), & \deg X_p \le \deg X_q,\\ O(\varepsilon^{\alpha+\deg X_p-\deg X_q}), & \deg X_p > \deg X_q.\end{cases}$$

Далее,

$$\widetilde{X}^u(\delta_\varepsilon x) = (\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)[E + ((\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x))^{-1}W(\delta_\varepsilon x)].$$

Случай $\alpha = 0$ рассматривается аналогично. В силу свойств матрицы $(\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)$ обратная к ней $((\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x))^{-1} = (\widehat{Y}^u)'(\delta_\varepsilon x)$ имеет такую же структуру:

$$((\widehat{Y}^u)'(\delta_\varepsilon x))_{pq} = \begin{cases} 0, & p < q,\\ \delta_{pq} + O(\varepsilon^{\deg X_p-\deg X_q}), & p \ge q.\end{cases}$$

Отсюда выводим $\widetilde{X}^u_q(\delta_\varepsilon x) = \sum\limits_{p=1}^{N} a^u_{pq}(\delta_\varepsilon x)(\widehat{X}^u)'(\delta_\varepsilon x)$, где

$$a^u_{pq}(\delta_\varepsilon x) = \begin{cases} O(\varepsilon), & \deg X_p < \deg X_q,\\ \delta_{pq} + O(\varepsilon), & \deg X_p = \deg X_q,\\ O(\varepsilon^{\alpha+\deg X_p-\deg X_q}), & \deg X_p > \deg X_q \text{ и } \alpha > 0,\\ o(\varepsilon^{\deg X_p-\deg X_q}), & \deg X_p > \deg X_q \text{ и } \alpha = 0.\end{cases}$$

Перенос полей на окрестность точки $u \in \mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$ с помощью отображения θ_u завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 4. Утверждение теоремы 5 доказано для пространств глубины $M = 2$ в [7] и далее для произвольной глубины сформулировано в качестве предположения для получения результатов. Таким образом, все результаты из [7] верны для всех M. Кроме того, доказательство теоремы 8 о расхождении кривых (см. далее) более лаконично по сравнению с приведенным в [15].

Замечание 5. В теоремах 4 и 5 при $\alpha = 0$ величина $o(1)$ зависит от модулей непрерывности функций $\{c_{ijk}\}_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j}$.

Определение 8. Пусть $\mathbb{M}$ — пространство Карно — Каратеодори топологической размерности N и глубины M и $u \in \mathbb{M}$. Для $x, v \in \mathscr{U} \subset \mathscr{G}^u\mathbb{M}$ таких, что $x = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^u\right)(v)$, определим значение $d_\infty^u(x,v)$ следующим образом:

$$d_\infty^u(x,v) = \max_{i=1,\dots,N}\{|x_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Если $x = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i\right)(v)$, то положим величину $d_\infty(x,v)$ равной

$$d_\infty(x,v) = \max_{i=1,\dots,N}\{|x_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Из теорем 5 и [17, теорема 5] вытекают результаты, обобщающие на произвольное M свойства, полученные в [17, 7].

Далее в формулировках утверждений символом $\hat{\theta}_v^u$ обозначено отображение, сопоставляющее точке $(w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^N$ элемент $\exp\left(\sum\limits_{i=1}^N w_i \widehat{X}_i^u\right)(v)$. Это отображение является диффеоморфизмом шара $B_E(0, r_{u,v})$, $r_{u,v} > 0$, на некоторую окрестность точки $v \in \mathbb{M}$.

Теорема 6. *Пусть $\mathbb{M}$ — пространство Карно — Каратеодори с $C^{1,\alpha}$-гладкими базисными векторными полями, $\alpha \geq 0$. Тогда для всякой точки $\mathbb{M}$ существует содержащая ее окрестность $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$ такая, что*

(1) $\theta_u(B_E(0, r_u)) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;

(2) $\mathscr{U} \subset \mathscr{G}^u\mathbb{M}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;

(3) $\hat{\theta}_v^u(B_E(0, r_{u,v})) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u, v \in \mathscr{U}$;

(4) $\mathscr{U} \Subset \mathscr{O}$, *где* $\mathscr{O}$ *— окрестность из теоремы* 5.

Кроме того, в этой окрестности $\mathscr{U}$ выполняется следующее свойство: для $u, v \in \mathscr{U}$, $w = \gamma(1)$ и $\widehat{w} = \hat{\gamma}(1)$, где $\gamma, \hat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{M}$ — абсолютно непрерывные (в классическом смысле) *кривые, лежащие в* $\mathrm{Box}(u, \varepsilon)$, *такие, что*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) X_i(\gamma(t)),\ \gamma(0) = v, \quad \dot{\hat{\gamma}}(t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) \widehat{X}_i^u(\gamma(t)),\ \hat{\gamma}(0) = v,$$

и каждая измеримая функция $b_i(t)$ обладает свойством

$$\int_0^1 |b_i(t)|\, dt < S\varepsilon^{\deg X_i}, \tag{7}$$

$S < \infty$, $i = 1, \dots, N$, *имеем*

$$\max\bigl\{d_\infty(w, \widehat{w}), d_\infty^u(w, \widehat{w})\bigr\} = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha > 0, \\ o(\varepsilon), & \alpha = 0, \end{cases}$$

где величины $O(1)$ *и* $o(1)$ *равномерны по* $u \in \mathscr{U}$, $v \in \operatorname{Box}(u, \varepsilon)$ *и всем наборам функций* $\{b_i(t)\}_{i=1}^N$, *обладающих свойством* (7), *при* $\varepsilon \to 0$.

Из теоремы 6 вытекает результат о сравнении локальных групп.

Теорема 7. *Пусть* $\mathbb{M}$ *— пространство Карно — Каратеодори с* $C^{1,\alpha}$*-гладкими базисными векторными полями,* $\alpha \geq 0$. *Тогда для всякой точки* $\mathbb{M}$ *существует содержащая ее окрестность* $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$ *такая, что*

(1) $\theta_u(B_E(0, r_u)) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;

(2) $\mathscr{U} \subset \mathscr{G}^u\mathbb{M}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;

(3) $\hat{\theta}_v^u(B_E(0, r_{u,v})) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u, v \in \mathscr{U}$;

4) $\mathscr{U} \Subset \mathscr{O}$, где $\mathscr{O}$ *— окрестность из теоремы* 5.

Кроме того, в этой окрестности $\mathscr{U}$ *выполняется следующее свойство: для* $u, v \in \mathscr{U}$, $u' \in \operatorname{Box}(u, \varepsilon)$, $w = \gamma(1)$ *и* $\widehat{w} = \hat{\gamma}(1)$, *где* $\gamma, \hat{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{M}$ *— абсолютно непрерывные (в классическом смысле) кривые, лежащие в* $\operatorname{Box}(u, \varepsilon)$, *такие, что*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^N b_i(t)\widehat{X}_i^u(\gamma(t)),\ \gamma(0) = v, \quad \dot{\hat{\gamma}}(t) = \sum_{i=1}^N b_i(t)\widehat{X}_i^{u'}(\gamma(t)),\ \hat{\gamma}(0) = v,$$

и каждая измеримая функция $b_i(t)$ *обладает свойством* (7), $i = 1, \dots, N$, *имеем*

$$\max\bigl\{d_\infty^u(w, \widehat{w}), d_\infty^{u'}(w, \widehat{w})\bigr\} = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha > 0, \\ o(\varepsilon), & \alpha = 0, \end{cases}$$

где величины $O(1)$ *и* $o(1)$ *равномерны по* $u \in \mathscr{U}$, $u', v \in \operatorname{Box}(u, \varepsilon)$ *и всем наборам функций* $\{b_i(t)\}_{i=1}^N$, *обладающих свойством* (7), *при* $\varepsilon \to 0$.

Следующий результат — частный случай теоремы 6.

Теорема 8. *Для всякой точки* $p \in \mathbb{M}$ *существует окрестность* $\mathscr{U} \ni p$, $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$, *такая, что для* $u, u', v, w, w', w'' \in \mathscr{U}$ *таких, что* $d_\infty(u, v) \leq \varepsilon$, $d_\infty(u, u') \leq \varepsilon$,

$$w = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^N w_i \varepsilon^{\deg X_i} X_i\Biggr)(v), \quad w' = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^N w_i \varepsilon^{\deg X_i} \widehat{X}_i^u\Biggr)(v),$$

$$w'' = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^N w_i \varepsilon^{\deg X_i} \widehat{X}_i^{u'}\Biggr)(v),$$

справедливы соотношения

$$\max\bigl\{d_\infty(w, w'), d_\infty^u(w, w'), d_\infty^u(w', w''), d_\infty^{u'}(w', w'')\bigr\} = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha > 0, \\ o(\varepsilon), & \alpha = 0. \end{cases}$$

Все оценки равномерны по $u, u', v \in \mathscr{U}$, $\{w_k\}_{k=1}^N \in U(0) \Subset \mathbb{R}^N$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Теорема 9. *Пусть* $\mathbb{M}$ *— пространство Карно — Каратеодори с* $C^{1,\alpha}$*-гладкими базисными векторными полями,* $\alpha \geq 0$. *Для всякой точки* $p \in \mathbb{M}$ *существует окрестность* $\mathscr{U} \ni p$, $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$, *такая, что*

(1) $\theta_u(B_E(0, r_u)) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;

(2) $\mathscr{U} \subset \mathscr{G}^u\mathbb{M}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;

(3) $\hat{\theta}^u_v(B_E(0,r_{u,v}))\supset\mathscr{U}$ *для всех* $u,v\in\mathscr{U}$;

(4) $\mathscr{U}\Subset\mathscr{O}$, *где* $\mathscr{O}$ *— окрестность из теоремы* 5,

обладающая следующими свойствами. Если $u\in\mathscr{U}$, *то для любых точек* $v,w\in\mathrm{Box}(u,\varepsilon)$ *справедливо следующее соотношение:*

$$\left|d_\infty(v,w)-d^u_\infty(v,w)\right|=\begin{cases}O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha>0,\\ o(\varepsilon), & \alpha=0,\end{cases}$$

где $o(1)$ *и* $O(1)$ *равномерны по* $u\in\mathscr{U}$ *и по* $v,w\in\mathrm{Box}(u,\varepsilon)$, *при* $\varepsilon\to0$. *Кроме того, если* $u'\in\mathrm{Box}(u,\varepsilon)$, *то*

$$\left|d^{u'}_\infty(v,w)-d^u_\infty(v,w)\right|=\begin{cases}O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha>0,\\ o(\varepsilon), & \alpha=0,\end{cases}$$

где $o(1)$ *и* $O(1)$ *равномерны по* $u\in\mathscr{U}$ *и по* $u',v,w\in\mathrm{Box}(u,\varepsilon)$, *при* $\varepsilon\to0$.

Доказательство теорем 6, 8 и 9 проводится следующим образом. Сначала по той же схеме, что и в статьях [17–19], в теореме 6 выводится оценка расстояния d^u_∞, затем такая же оценка в теореме 8 получается в качестве частного случая. Для доказательства локальной аппроксимационной теоремы 9 применяются те же рассуждения, что и в [7] при доказательстве аналогичного результата, а затем это утверждение применяется для получения оценок расстояния d_∞ в теоремах 6 и 8 (см. подробности в [20]). Отметим, что здесь (например, в теореме 9) и далее окрестность $\mathscr{U}$ может быть меньше, чем окрестность, обеспечивающая выполнение условий 1–4 или 1–5 в силу того, что такое сужение может потребоваться в ходе доказательства для корректного применения теорем. Тем не менее такие сужения несущественны, поэтому акцент на них не делается.

Полученные выше результаты важны для доказательства локальной аппроксимационной теоремы для метрик Карно — Каратеодори (схема доказательства аналогична приведенным в [7, 17]; см. подробное доказательство в [20, 18]).

Приведем сначала формулировку теоремы о возможности соединения точек многообразия Карно с C^1-гладкими базисными векторными полями горизонтальными кривыми.

Теорема 10 [6]. *Пусть* $\mathbb{M}$ *— многообразие Карно с* C^1*-гладкими базисными векторными полями. Фиксируем произвольную точку* $u_0\in\mathbb{M}$. *Пусть* $X_1,\dots,X_{\dim H_1}$ *— базис* H_1. *Тогда существует окрестность* $U(u_0)$ *такая, что для всякой точки* $u\in U(u_0)$ *элемент* $v\in U(u_0)$ *представим в виде*

$$v=\exp(a_LX_{j_L})\circ\dots\circ\exp(a_2X_{j_2})\circ\exp(a_1X_{j_1})(u), \tag{8}$$

где $1\le j_i\le\dim H_1$, $i=1,\dots,L$, $L\in\mathbb{N}$, $|a_i|\le c_2d_\infty(u,v)$ *и константы* L *и* c_2 *не зависят от* u *и* v.

Следующий результат — локальная аппроксимационная теорема для метрик Карно — Каратеодори (см. определение, например, в [7]).

Теорема 11. *Пусть* $\mathbb{M}$ *— многообразие Карно с* $C^{1,\alpha}$*-гладкими базисными векторными полями,* $\alpha\ge0$. *Для всякой точки* $p\in\mathbb{M}$ *существует окрестность* $\mathscr{U}\ni p$, $\mathscr{U}\Subset\mathbb{M}$ *такая, что*

(1) $\theta_u(B_E(0,r_u))\supset\mathscr{U}$ *для всех* $u\in\mathscr{U}$;

(2) $\mathscr{U}\subset\mathscr{G}^u\mathbb{M}$ *для всех* $u\in\mathscr{U}$;

(3) $\hat{\theta}^u_v(B_E(0, r_{u,v})) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u, v \in \mathscr{U}$;
(4) $\mathscr{U} \Subset \mathscr{O}$, *где* $\mathscr{O}$ *— окрестность из теоремы* 5;
(5) $\mathscr{U} \Subset U$, *где* U *— окрестность из теоремы* 10.
Кроме того, для любых точек $u \in \mathscr{U}$, $v, w \in B_{cc}(u, \varepsilon)$ *справедливо*

$$\left|d_{cc}(v, w) - d^u_{cc}(v, w)\right| = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha > 0, \\ o(\varepsilon), & \alpha = 0, \end{cases}$$

и для любых точек $u', v, w \in B_{cc}(u, \varepsilon)$ *верно*

$$\left|d^u_{cc}(v, w) - d^{u'}_{cc}(v, w)\right| = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha > 0, \\ o(\varepsilon), & \alpha = 0. \end{cases}$$

Обе оценки равномерны по точкам $u \in \mathscr{U}$ *и* $u', v, w \in B_{cc}(u, \varepsilon)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Есть еще два следствия теоремы 8 — теоремы о цепочках интегральных линий, доказательство которых следует схеме, представленной в [7] (см. подробности в [20]).

Теорема 12 (сравнение локальных геометрий двух локальных однородных групп; сравни [7, теорема 2.3.1]). *Пусть* $\mathbb{M}$ *— пространство Карно — Каратеодори с* $C^{1,\alpha}$*-гладкими базисными векторными полями,* $\alpha \geq 0$. *Тогда для всякой точки* $\mathbb{M}$ *существует содержащая ее окрестность* $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$ *такая, что*
(1) $\theta_u(B_E(0, r_u)) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;
(2) $\mathscr{U} \subset \mathscr{G}^u\mathbb{M}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;
(3) $\hat{\theta}^u_v(B_E(0, r_{u,v})) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u, v \in \mathscr{U}$;
4) $\mathscr{U} \Subset \mathscr{O}$, *где* $\mathscr{O}$ *— окрестность из теоремы* 5,
обладающая следующими свойствами.

Для фиксированного $Q \in \mathbb{N}$ *рассмотрим произвольные точки* $u \in \mathscr{U}$, $u', w_0 \in \mathrm{Box}(u, \varepsilon)$ *и набор*

$$w^\varepsilon_j = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_{i,j}\varepsilon^{\deg X_i}\widehat{X}^u_i\right)(w^\varepsilon_{j-1}), \quad w^{\varepsilon}_j{}' = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_{i,j}\varepsilon^{\deg X_i}\widehat{X}^{u'}_i\right)(w^{\varepsilon}_{j-1}{}'),$$

$w^{\varepsilon}_0{}' = w^\varepsilon_0 = w_0$, $j = 1, \ldots, Q$. *(Здесь число* $Q \in \mathbb{N}$ *таково, что все эти точки принадлежат* $\mathscr{U} \subset \mathbb{M}$ *для всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$.) *Тогда*

$$\max\{d^u_\infty(w^\varepsilon_Q, w^{\varepsilon}_Q{}'), d^{u'}_\infty(w^\varepsilon_Q, w^{\varepsilon}_Q{}')\} = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}) & \text{при } \alpha > 0, \\ o(\varepsilon) & \text{при } \alpha = 0. \end{cases}$$

Здесь величины $O(1)$ *и* $o(1)$ *равномерны по* $u \in \mathscr{U}$, $u', w_0 \in \mathrm{Box}(u, \varepsilon)$ *и* $\{w_{i,j}\}$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, Q$, *из некоторой компактной окрестности* 0 *при* $\varepsilon \to 0$ *и зависят от* Q *и* $\left\{F^j_{\mu,\beta}|_{\mathscr{U}}\right\}_{j,\mu,\beta}$.

Теорема 13 (сравнение локальных геометрий локальной однородной группы и пространства Карно — Каратеодори; сравни [7, теорема 2.7.1]). *Пусть* $\mathbb{M}$ *— пространство Карно — Каратеодори с* $C^{1,\alpha}$*-гладкими базисными векторными полями,* $\alpha \geq 0$. *Тогда для всякой точки* $\mathbb{M}$ *существует содержащая ее окрестность* $\mathscr{U} \Subset \mathbb{M}$ *такая, что*
(1) $\theta_u(B_E(0, r_u)) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;
(2) $\mathscr{U} \subset \mathscr{G}^u\mathbb{M}$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;
(3) $\hat{\theta}^u_v(B_E(0, r_{u,v})) \supset \mathscr{U}$ *для всех* $u, v \in \mathscr{U}$;
(4) $\mathscr{U} \Subset \mathscr{O}$, *где* $\mathscr{O}$ *— окрестность из теоремы* 5,
обладающая следующими свойствами.

Для фиксированного $Q \in \mathbb{N}$ *рассмотрим произвольные точки* $u \in \mathscr{U}$, $w_0 \in \operatorname{Box}(u,\varepsilon)$ *и набор*

$$\widehat{w}_j^\varepsilon = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^N w_{i,j}\varepsilon^{\deg X_i}\widehat{X}_i^u\Biggr)(\widehat{w}_{j-1}^\varepsilon), \quad w_j^\varepsilon = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^N w_{i,j}\varepsilon^{\deg X_i}X_i\Biggr)(w_{j-1}^\varepsilon),$$

$w_0^\varepsilon = \widehat{w}_0^\varepsilon = w_0$, $j = 1,\dots,Q$. *(Здесь* $Q \in \mathbb{N}$ *выбрано таким образом, что все точки принадлежат* $\mathscr{U} \subset \mathbb{M}$ *для всех* $\varepsilon > 0$.) *Тогда*

$$\max\bigl\{d_\infty^u\bigl(\widehat{w}_Q^\varepsilon, w_Q^\varepsilon\bigr), d_\infty\bigl(\widehat{w}_Q^\varepsilon, w_Q^\varepsilon\bigr)\bigr\} = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}) & \text{при } \alpha > 0, \\ o(\varepsilon) & \text{при } \alpha = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь величины $O(1)$ *и* $o(1)$ *равномерны по* $u \in \mathscr{U}$, $w_0 \in \operatorname{Box}(u,\varepsilon)$ *и* $\{w_{i,j}\}$, $i = 1,\dots,N$, $j = 1,\dots,Q$ *при* $\varepsilon \to 0$ *из некоторой компактной окрестности* 0 *и зависят от* Q *и* $\bigl\{F_{\mu,\beta}^j|_{\mathscr{U}}\bigr\}_{j,\mu,\beta}$.

Замечание 6. Утверждения теорем 4–9, 11–13 справедливы и для случая, когда производные координатных функций базисных векторных полей гёльдеровы с показателем $\alpha > 0$ относительно d_∞ или d_{cc}.

Приведем формулировку основного результата для весовых пространств Карно — Каратеодори (см. подробности в [19, 20]).

Определение 9 (сравни с [21]). Фиксируем связное риманово C^∞-гладкое связное многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N. Многообразие $\mathbb{M}$ называется *весовым пространством Карно — Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ существует такая фильтрация подрасслоениями

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_P\mathbb{M} = T\mathbb{M},$$

причем каждому подрасслоению соответствует номер $l_1 < l_2 < \dots < l_P$, что для любой точки $p \in \mathbb{M}$ существует окрестность $U \subset \mathbb{M}$ с набором C^1-гладких векторных полей $X_1,\dots,X_N$, в каждой точке $v \in U$ обладающих следующими свойствами.

(1) Подпространство

$$H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v),\dots,X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$$

имеет размерность $\dim H_i$ независимо от v, $i = 1,\dots,P$.

(2) Верны включения $[H_i, H_j] \subset H_m$, где $m = \max\{p : l_i + l_j \geq l_p\}$, $i,j = 1,\dots,P$.

Определение 10. *Степень* поля X_k равна $\deg X_k = \min\{l_m : X_k \in H_m\}$, $k = 1,\dots,N$.

Растяжение δ_ε^u, $\varepsilon > 0$, относительно точки $u \in \mathbb{M}$ определяется аналогично случаю (невесового) пространства Карно — Каратеодори: если $v = \exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N v_iX_i\Bigr)(u)$, то

$$\delta_\varepsilon^u v = \exp\Biggl(\sum_{i=1}^N v_i\varepsilon^{\deg X_i}X_i\Biggr)(u)$$

при условии, что правая часть имеет смысл.

Замечание 7. Для весовых пространств Карно — Каратеодори справедлив результат об определении алгебры Ли и локальной группы Ли константами

$\{c_{ijk}(u)\}_{\deg X_k=\deg X_i+\deg X_j}$, где $u\in\mathbb{M}$ — произвольная фиксированная точка. Эта группа однородна относительно растяжений δ^u_ε, $\varepsilon>0$.

Замечание 8. Отметим, что для весового пространства Карно — Каратеодори локально справедливо следующее представление каждого базисного векторного поля через нильпотентизированные [19, 20]:

$$X_q\big(\delta^u_\varepsilon x\big)=\sum_{p=1}^{N}a^u_{p,q}\big(\delta^u_\varepsilon x\big)\widehat{X}^u_p\big(\delta^u_\varepsilon x\big),$$

где

$$a^u_{p,q}\big(\delta^u_\varepsilon x\big)=\begin{cases}O(\varepsilon^{l_1}), & \deg X_p<\deg X_q,\\ \delta_{pq}+O(\varepsilon^{l_1}), & \deg X_p=\deg X_q,\\ O(\varepsilon^{\max\{l_1,\min\{\alpha l_1,1\}+\deg X_p-\deg X_q\}}), & \deg X_p>\deg X_q \text{ и } \alpha>0,\\ \min\{O(\varepsilon^{l_1}),o(\varepsilon^{\deg X_p-\deg X_q})\} & \deg X_p>\deg X_q \text{ и } \alpha=0,\end{cases}\tag{10}$$

$q=1,\dots,N$, и все оценки равномерны на $\mathscr{U}$. Схема доказательства аналогична доказательству теоремы 4 с учетом комментариев, приведенных в [19, 20]. Существенное отличие состоит в том, что при оценке коэффициентов

$$\begin{aligned}\big(C^u-C^\varepsilon_{tx}\big)(e_p,e_q)=&\sum_{k:\,\deg X_k=\deg X_p+\deg X_q}(c_{pqk}(u)-c_{pqk}(\theta_u(t\delta_\varepsilon x))e_k\\ &-\sum_{k:\,\deg X_k<\deg X_p+\deg X_q}\varepsilon^{\deg X_p+\deg X_q-\deg X_k}c_{pqk}(\theta_u(x))e_k\end{aligned}$$

первое слагаемое сравнимо с $\varepsilon^{\alpha l_1}$, а второе — с ε (или, если более точно, то с $\varepsilon^{\min\limits_{p,q,k}\{\deg X_p+\deg X_q-\deg X_k\}}$ для каждого $k=1,\dots,N$).

Теорема 14 [20] (см. также [19]). *Пусть $\mathbb{M}$ — весовое пространство Карно — Каратеодори с $C^{1,\alpha}$-гладкими базисными полями, $\alpha\ge 0$. Тогда для каждой точки $\mathbb{M}$ существует такая содержащая ее окрестность $\mathscr{U}\Subset\mathbb{M}$, что*

(1) *$\theta_u(B_E(0,r_u))\supset\mathscr{U}$ для всех $u\in\mathscr{U}$;*

(2) *$\mathscr{U}\subset\mathscr{G}^u\mathbb{M}$ для всех $u\in\mathscr{U}$;*

(3) *$\hat\theta^u_v(B_E(0,r_{u,v}))\supset\mathscr{U}$ для всех $u,v\in\mathscr{U}$;*

(4) *$\mathscr{U}\Subset\mathscr{O}$, где $\mathscr{O}$ — окрестность из теоремы 5.*

Кроме того, $\mathscr{U}$ обладает следующим свойством: для $u,v\in\mathscr{U}$, $w=\gamma(1)$ и $\widehat{w}=\hat\gamma(1)$, где $\gamma,\hat\gamma:[0,1]\to\mathbb{M}$ — абсолютно непрерывные (в классическом смысле) кривые, лежащие в $\mathrm{Box}(u,\varepsilon)$, такие, что

$$\dot\gamma(t)=\sum_{i=1}^{N}b_i(t)X_i(\gamma(t)),\ \gamma(0)=v,\quad \dot{\hat\gamma}(t)=\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\widehat{X}^u_i(\gamma(t)),\ \hat\gamma(0)=v,$$

и каждая измеримая функция $b_i(t)$ такова, что

$$\int_0^1|b_i(t)|\,dt<S\varepsilon^{\deg X_i},\tag{11}$$

$S<\infty$, $i=1,\dots,N$, имеем

$$\max\big\{d_\infty(w,\widehat{w}),d^u_\infty(w,\widehat{w})\big\}=\begin{cases}O(\varepsilon^{1+\frac{\min\{\alpha l_1,1\}}{l_P}}), & \{X_i\}_{i=1}^N\in C^{1,\alpha},\ \alpha>0,\\ o(\varepsilon), & \{X_i\}_{i=1}^N\in C^1,\end{cases}$$

где величины $O(1)$ *и* $o(1)$ *равномерны по* $u \in \mathscr{U}$, $v \in \operatorname{Box}(u, \varepsilon)$ *и всем наборам функций* $\{b_i(t)\}_{i=1}^N$, *обладающих свойством* (11), *при* $\varepsilon \to 0$.

Замечание 9. Для весовых пространств Карно — Каратеодори справедливы аналоги теорем 7–9, 12 и 13 с заменой для $\alpha > 0$ значения $\frac{\alpha}{M}$ величиной

$$\frac{\min\{\alpha l_1, \min\limits_{p,q,k}\{\deg X_p + \deg X_q - \deg X_k\}\}}{l_P}$$

(см. замечание 8). Кроме того, этой величиной можно заменить $\frac{\min\{\alpha l_1, 1\}}{l_P}$ в теореме 14.

Замечание 10. Если производные координатных функций базисных векторных полей гёльдеровы с показателем $\alpha > 0$ относительно d_∞, то справедлив аналог соотношения (10) с заменой $\min\{\alpha l_1, 1\}$ значением α. Кроме того, справедливы аналоги теорем 6–9, 12 и 13 с заменой для $\alpha > 0$ значения $\frac{\alpha}{M}$ величиной $\frac{\alpha}{l_P}$.

Замечание 11. В статьях [15, 16] автором допущены неточности в формулировках основных результатов. В формулировки теорем 5–9 и замечания 6 статьи [15] (и аналогичных теорем в [16]) следует добавить требование $d_\infty(u, v) = O(\varepsilon)$, $d_\infty(u', u) = O(\varepsilon)$ и $d_\infty(u, w_0) = O(\varepsilon)$, а оценки для $\alpha > 0$ заменить на $O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}})$ в теоремах 5–9 и на $O(\varepsilon^{1+\frac{\min\{\alpha l_1, 1\}}{l_M}})$ в замечании 6. Кроме того, в следствии 2 из [15] (пп. 1, 2) следует добавить условие локальной эквивалентности $\mathfrak{d}$ и d_∞, и оценки заменить на $O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}})$. Отметим, что п. 3 следствия 2 в этих условиях не имеет смысла.

Автор выражает благодарность С. К. Водопьянову за поддержку и ценные советы по улучшению статьи, а также рецензенту за конструктивные замечания, способствовавшие усовершенствованию статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser-Verl., 1996. P. 79–318.
2. *Petitot J.* Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
3. *Jurdjevic V.* Geometric control theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (Cambridge Stud. Math.; V. 52).
4. *Agrachev A. A., Sachkov Yu. L.* Control theory from the geometric viewpoint. Berlin: Springer-Verl., 2004.
5. *Montgomery R.* A Tour of Subriemannian geometries, Their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
6. *Basalaev S. G., Vodopyanov S. K.* Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
7. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and mathematical physics. Basel: Birkhäuser-Verl., 2009. P. 233–335.
8. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.
9. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
10. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin: Springer-Verl., 2007.
11. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.

12. *Ли С.* Теория групп преобразований: в 3-х ч. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011 (Ч. 1); 2012 (Ч. 2); 2013 (Ч. 3).

13. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

14. *Грешнов А. В.* Доказательство теоремы Громова об однородной нильпотентой аппроксимации для векторных полей класса C^1 // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 72–88.

15. *Karmanova M.* The new approach to investigation of Carnot–Carathéodory geometry // Geom. Funct. Anal. 2011. V. 21, N 6. P. 1358–1374.

16. *Карманова М. Б.* Новый подход к исследованию геометрии пространств Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2012. Т. 434, № 3. С. 309–314.

17. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Локальная аппроксимационная теорема на многообразиях Карно в условиях минимальной гладкости // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 6. С. 731–736.

18. *Karmanova M., Vodopyanov S.* On local approximation theorem on equiregular Carnot–Carathéodory spaces // Proc. INDAM meeting on geometric control and sub-Riemannian geometry (Cortona, May 2012). 2014. (Springer INDAM Ser.) (to appear).

19. *Karmanova M.* Fine properties of weighted Carnot–Carathéodory spaces under minimal assumptions on smoothness // Ann. Univ. Bucharest (Math. Ser.), 2014. (to appear).

20. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Метрические аспекты пространств Карно — Каратеодори // Успехи мат. наук. (В печати).

21. *Селиванова С. В.* Локальная геометрия нерегулярных весовых квазиметрических пространств Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 1. С. 16–21.

Статья поступила 29 ноября 2013 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru