Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.98

ОБ АДДИТИВНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЯХ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Доказана аддитивность регулярных l-аддитивных отображений $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$ наследственного конуса $\mathscr{K}$ в пространстве измеримых функций на пространстве с мерой. Построены примеры l-аддитивных не d-аддитивных отображений T. Установлена монотонность l-аддитивных отображений $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$. Построены примеры d-аддитивных не монотонных отображений T.

Пусть $(S, +)$ — коммутативная полугруппа с сокращением. Для отображения $T : \mathscr{K} \to S$ доказана эквивалентность условий аддитивности и l-аддитивности. Доказано, что l-субаддитивное сильно регулярное 2-однородное отображение T субаддитивно. Все результаты являются новыми даже в случае конуса $\mathscr{K} = L_\infty^+$.

Ключевые слова: пространство с мерой, измеримая функция, аддитивное отображение, конус, вес, монотонное отображение, полугруппа с сокращением, векторная решетка.

Введение

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — векторное пространство (классов эквивалентности) измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Для $f, g \in \mathfrak{M}$ полагаем $fg = 0$, если $\mu\{\omega \in \Omega : f(\omega)g(\omega) \neq 0\} = 0$.

Пусть $\mathscr{E}$ — векторное подпространство $\mathfrak{M}$. Функционал $F : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ называется *дизъюнктно аддитивным*, если $f, g \in \mathscr{E}$ и $fg = 0 \Rightarrow F(f+g) = F(f) + F(g)$. При выполнении дополнительных условий в [1–6] получены интегральные представления таких функционалов.

В теории интегрирования важную роль играют неограниченные отображения $T : L_\infty^+ \to [0, +\infty]$. В случае локализуемого пространства с мерой в [7] для нормальных аддитивных однородных T и в [8] для нормальных монотонных субаддитивных однородных T получены представления через нормальные ограниченные линейные функционалы на L_∞.

Пусть $\mathscr{K}$ — наследственный конус в $\mathfrak{M}^+$, т. е. 1) $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $f \in \mathscr{K} \Rightarrow \lambda f \in \mathscr{K}$; 2) $f, g \in \mathscr{K} \Rightarrow f + g \in \mathscr{K}$; 3) $f \in \mathscr{K}$, $g \in \mathfrak{M}^+$ и $g \leq f \Rightarrow g \in \mathscr{K}$. Для $f, g \in \mathscr{K}$ функции $f \vee g$ и $f \wedge g$ определяются формулами

$$(f \vee g)(\omega) = \max\{f(\omega), g(\omega)\}, \quad (f \wedge g)(\omega) = \min\{f(\omega), g(\omega)\} \quad (\omega \in \Omega)$$

соответственно. Имеем $f \vee g$, $f \wedge g \in \mathscr{K}$ и

$$f \vee g + f \wedge g = f + g. \tag{1}$$

Отображение $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$ называется *l-аддитивным* (т. е. решеточно-аддитивным (lattice-additive)), если

$$T(f \vee g) + T(f \wedge g) = T(f + g) \quad \text{для всех } f, g \in \mathscr{K};$$

аддитивным, если $T(f+g)=T(f)+T(g)$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$. В силу (1) аддитивное отображение является l-аддитивным.

В этой работе доказана аддитивность регулярных l-аддитивных отображений $T:\mathscr{K}\to[0,+\infty]$ (теорема 2.1). Построены примеры l-аддитивных, но не d-аддитивных отображений T (пример 2.1). В теореме 2.2 установлена монотонность l-аддитивных отображений $T:\mathscr{K}\to[0,+\infty]$. В примере 2.1 показано существование d-аддитивных не монотонных отображений T.

Пусть $(S,+)$ — коммутативная полугруппа с сокращением. Для отображения $T:\mathscr{K}\to S$ доказана эквивалентность условий аддитивности и l-аддитивности (теорема 2.3).

В теореме 3.1 доказано, что l-субаддитивное сильно регулярное 2-однородное отображение $T:\mathscr{K}\to[0,+\infty]$ субаддитивно. Приведены примеры отображений а) однородных l-субаддитивных, но не регулярных и не субаддитивных (пример 2.1); б) субаддитивных сильно регулярных $\mathbb{Q}$-однородных, но не однородных; субаддитивных сильно регулярных, но не 2-однородных (пример 3.1); в) регулярных однородных l-субаддитивных, но не субаддитивных и не сильно регулярных (пример 3.2); г) субаддитивных сильно регулярных однородных, но не монотонных (пример 3.3).

Все результаты являются новыми даже в случае конуса $\mathscr{K}=L_\infty^+$.

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ — пространство с мерой, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ — векторное пространство (классов эквивалентности) измеримых функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\mathfrak{M}^+$ — конус всех неотрицательных функций из $\mathfrak{M}$, $\mathscr{K}$ — наследственный конус в $\mathfrak{M}^+$. Пусть $L_\infty=L_\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ — пространство (классов эквивалентности) измеримых существенно ограниченных функций на Ω, $L_\infty^+=L_\infty\cap\mathfrak{M}^+$.

Отображение $T:\mathscr{K}\to[0,+\infty]$ называется

- *аддитивным*, если $T(f+g)=T(f)+T(g)$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$;
- d-*аддитивным*, если $T(f+g)=T(f)+T(g)$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$ с $fg=0$;
- l-*аддитивным*, если $T(f\vee g)+T(f\wedge g)=T(f+g)$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$;
- *монотонным*, если $f\le g\Rightarrow T(f)\le T(g)$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$;
- *однородным*, если $T(\lambda f)=\lambda T(f)$ для всех $f\in\mathscr{K}$ и $\lambda\ge 0$, при этом $0\cdot(+\infty)\equiv 0$;
- *регулярным*, если $T(f+g)=+\infty\Rightarrow T(f)+T(g)=+\infty$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$ с $fg=0$;
- *субаддитивным*, если $T(f+g)\le T(f)+T(g)$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$;
- l-*субаддитивным*, если $T(f+g)\le T(f\vee g)+T(f\wedge g)$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$;
- 2-*однородным*, если $T(2f)=2T(f)$ для всех $f\in\mathscr{K}$;
- *сильно регулярным*, если $T(f+g)=+\infty\Rightarrow T(f)+T(g)=+\infty$ для всех $f,g\in\mathscr{K}$.

Аддитивное однородное отображение $T:L_\infty^+\to[0,+\infty]$ называется *весом*, монотонное однородное субаддитивное отображение $T:L_\infty^+\to[0,+\infty]$ — *субаддитивным весом* [7]. Широкий класс таких весов исследован в [8].

Коммутативная полугруппа $(S,+)$ называется *полугруппой с сокращением*, если

$$x+y=x+z\Rightarrow y=z\quad\text{для всех } x,y,z\in S.$$

2. Об аддитивности отображений $T : \mathscr{K} \to [0,+\infty]$

Лемма 2.1. *Аддитивное отображение $T : \mathscr{K} \to [0,+\infty]$ является l-аддитивным, монотонным и сильно регулярным.*

Доказательство. Сильная регулярность T очевидна, l-аддитивность T следует из представления (1). Монотонность T: для $f, g \in \mathscr{K}$ с $g \le f$ имеем

$$T(g) \le T(g) + T(f-g) = T(g + (f-g)) = T(f). \qquad \square$$

Лемма 2.2. *Пусть отображение $T : \mathscr{K} \to [0,+\infty]$ l-аддитивно.*

(1) *$T(q\varphi) = qT(\varphi)$ для всех $q \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty)$ и $\varphi \in \mathscr{K}$.*

(2) *Если $T(f) < +\infty$ для некоторого $f \in \mathscr{K}$, то $T(0) = 0$.*

(3) *Если $f, g \in \mathscr{K}$ и $g \le f$, то $T(f+g) = T(f) + T(g)$.*

Доказательство. (1) Пусть $\varphi \in \mathscr{K}$ и $q = \frac{n}{m}$ с $n, m \in \mathbb{N}$. Методом математической индукции покажем, что $T(k\varphi) = kT(\varphi)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для $k = 1$ утверждение выполнено. Предположение индукции: пусть $T(j\varphi) = jT(\varphi)$. Тогда $T((j+1)\varphi) = T((j\varphi) \vee \varphi) + T((j\varphi) \wedge \varphi) = jT(\varphi) + T(\varphi)$. Итак, $T(k\varphi) = kT(\varphi)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Теперь $T\big(\frac{n}{m}\varphi\big) = \frac{1}{m} mT\big(\frac{n}{m}\varphi\big) = \frac{1}{m}T\big(m\frac{n}{m}\varphi\big) = \frac{1}{m}T(n\varphi) = \frac{n}{m}T(\varphi)$ и $T(q\varphi) = qT(\varphi)$.

(2) Имеем $T(f) + T(0) = T(f \vee 0) + T(f \wedge 0) = T(f+0) = T(f)$ и $T(0) = 0$.

(3) Если $f, g \in \mathscr{K}$ и $g \le f$, то $T(f) + T(g) = T(f \vee g) + T(f \wedge g) = T(f+g)$, т. е. T аддитивно на парах сравнимых функций. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть $T : \mathscr{K} \to [0,+\infty]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *T аддитивно;*

(ii) *T l-аддитивно и регулярно.*

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) установлена в лемме 2.1. Докажем, что (ii)$\Rightarrow$(i).

Шаг 1. Покажем сначала, что T d-аддитивно. В силу l-аддитивности T для всех $f, g \in \mathscr{K}$ с $fg = 0$ получаем

$$T(f+g) + T(g) = T((f+g) \vee g) + T((f+g) \wedge g) = T(f+2g),$$

тем самым

$$T(f+g) + T(g) = T(f+2g). \tag{2}$$

В силу регулярности T можно ограничиться рассмотрением случая $T(f+g) < +\infty$. Также ввиду l-аддитивности T и п. (1) леммы 2.2 имеем

$$T(f+2g) + T(f) = T((f+2g) \vee f) + T((f+2g) \wedge f) = T(2f+2g) = 2T(f+g).$$

Подставив сюда $T(f+2g)$ из (2), получаем

$$T(f+g) + T(f) + T(g) = 2T(f+g).$$

Поскольку $T(f+g) < +\infty$, имеем $T(f) + T(g) = T(f+g)$.

Шаг 2. Рассмотрим общий случай. Для произвольных $f, g \in \mathscr{K}$ введем множество

$$\mathscr{A} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \ge g(\omega)\}.$$

Тогда $\mathscr{A}^{\mathrm{c}} = \Omega \setminus \mathscr{A} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < g(\omega)\}$. Через $\chi_{\mathscr{B}}$ обозначим индикатор множества $\mathscr{B} \in \mathfrak{A}$. Функции $f\chi_{\mathscr{A}}, f\chi_{\mathscr{A}^{\mathrm{c}}}, g\chi_{\mathscr{A}}, g\chi_{\mathscr{A}^{\mathrm{c}}}$ принадлежат $\mathscr{K}$ в силу наследственности конуса $\mathscr{K}$. Имеем $f\chi_{\mathscr{A}} \geq g\chi_{\mathscr{A}}$, $f\chi_{\mathscr{A}^c} \leq g\chi_{\mathscr{A}^c}$, поэтому по п. (3) леммы 2.2

$$T(f\chi_{\mathscr{A}}) + T(g\chi_{\mathscr{A}}) = T((f+g)\chi_{\mathscr{A}}), \quad T(f\chi_{\mathscr{A}^c}) + T(g\chi_{\mathscr{A}^c}) = T((f+g)\chi_{\mathscr{A}^c}).$$

Сложив эти равенства почленно, с учетом шага 1 получаем

$$T(f) + T(g) = T(f\chi_{\mathscr{A}}) + T(f\chi_{\mathscr{A}^c}) + T(g\chi_{\mathscr{A}}) + T(g\chi_{\mathscr{A}^c}) \\ = T((f+g)\chi_{\mathscr{A}}) + T((f+g)\chi_{\mathscr{A}^c}) = T(f+g).$$

Теорема доказана. □

Следствие. *Пусть отображение* $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty)$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) T *аддитивно;*

(ii) T l*-аддитивно.*

Доказательство. Если T принимает только конечные значения, то оно автоматически регулярно. □

Теорема 2.2. *Пусть отображение* $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$ l*-аддитивно. Тогда* T *монотонно.*

Доказательство. Предположим, что T не монотонно, т. е. существуют такие $f, h \in \mathscr{K}$, что $f \leq h$, но $T(h) < T(f)$. Для $g = h - f$ имеем $g \in \mathscr{K}$ и $T(f+g) < T(f)$. Следовательно, $T(f+g) < +\infty$. Повторением рассуждений из шага 1 доказательства теоремы 2.1 (без дополнительного условия $fg = 0$) получаем, что $T(f) + T(g) = T(f+g)$. Тем самым $T(f) \leq T(h)$; противоречие.

Теорема доказана. □

Существуют а) не d-аддитивные l-аддитивные отображения $T:\mathscr{K} \to [0, +\infty]$; б) однородные l-аддитивные отображения $T : L_\infty^+ \to [0, +\infty]$, не являющиеся весами.

Пример 2.1. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = 2^\Omega$ — множество всех подмножеств Ω и μ — считающая мера на Ω. Тогда $L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = l_\infty$ — пространство всех ограниченных числовых последовательностей с покоординатными операциями. Для $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty \in l_\infty^+$ определим носитель $\mathrm{s}(f) = \{k \in \mathbb{N} : f_k > 0\}$.

Для каждого натурального $n \geq 2$ зададим отображение $T_n : l_\infty^+ \to [0, +\infty]$ формулой

$$T_n(f) = \begin{cases} \sum\limits_k f_k, & \text{если } \operatorname{card} \mathrm{s}(f) \leq n; \\ +\infty, & \text{если } \operatorname{card} \mathrm{s}(f) > n. \end{cases}$$

Поскольку $\mathrm{s}(f \vee g) = \mathrm{s}(f+g)$ для всех $f, g \in l_\infty^+$, отображение T_n l-аддитивно. Очевидно, T_n однородно, не d-аддитивно и не регулярно для каждого $n \geq 2$.

Отображение $T : l_\infty^+ \to [0, +\infty]$, заданное формулой $T(f) = \operatorname{card} \mathrm{s}(f)$, монотонно, d-аддитивно, не 2-однородно и не l-аддитивно.

Пусть функция $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ не возрастает и $\psi \neq \mathrm{const}$. Отображение $T_\psi : l_\infty^+ \to [0, +\infty]$, заданное формулой $T_\psi(f) = \sum\limits_{k \in \mathrm{s}(f)} \psi(f_k)$, d-аддитивно, не 2-однородно и не монотонно.

Теорема 2.3. *Пусть* $(S, +)$ *— коммутативная полугруппа с сокращением. Для отображения* $T : \mathscr{K} \to S$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $T(f+g) = T(f) + T(g)$ *для всех* $f, g \in \mathscr{K}$;

(ii) $T(f \vee g) + T(f \wedge g) = T(f+g)$ *для всех* $f, g \in \mathscr{K}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

3. О субаддитивных отображениях $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$

Теорема 3.1. *Пусть отображение* $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty]$ l*-субаддитивно, сильно регулярно и 2-однородно. Тогда* T *субаддитивно.*

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathscr{K}$. Ввиду сильной регулярности T можно ограничиться рассмотрением случая $T(f+g) < +\infty$. В силу l-субаддитивности T получаем

$$T(f+g) + T(g) = T((f+g) \vee g) + T((f+g) \wedge g) \geq T(f+2g). \tag{3}$$

Согласно l-субаддитивности и 2-однородности T имеем

$$T(f+2g) + T(f) = T((f+2g) \vee f) + T((f+2g) \wedge f) \geq T(2f+2g) = 2T(f+g). \tag{4}$$

Достаточно рассмотреть случай $T(f) < +\infty$. Прибавив число $T(f)$ к обеим частям неравенства (3), с учетом (4) получаем

$$T(f+g) + T(f) + T(g) \geq 2T(f+g).$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть отображение* $T : \mathscr{K} \to [0, +\infty)$ l*-субаддитивно и 2-однородно. Тогда* T *субаддитивно.*

В обозначениях примера 2.1 для каждого натурального $n \geq 2$ отображение T_n однородно и l-субаддитивно, но не регулярно и не субаддитивно.

Пример 3.1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $\mathscr{A} \in \mathfrak{A}$ такое, что $0 < \mu(\mathscr{A}) < +\infty$. Для $f \in L_\infty^+$ положим

$$T(f) = \begin{cases} \int\limits_{\mathscr{A}} f d\mu, & \text{если } \int\limits_{\mathscr{A}} f d\mu \in \mathbb{Q}, \\ +\infty, & \text{если } \int\limits_{\mathscr{A}} f d\mu \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тогда отображение $T : L_\infty^+ \to [0, +\infty]$ субаддитивно, сильно регулярно и 2-однородно (и даже удовлетворяет п. (1) леммы 2.2), но не однородно и не аддитивно.

Для $f \in L_\infty^+$ положим

$$D(f) = \begin{cases} \int\limits_{\mathscr{A}} f d\mu, & \text{если } \int\limits_{\mathscr{A}} f d\mu \leq 1, \\ 1, & \text{если } \int\limits_{\mathscr{A}} f d\mu > 1. \end{cases}$$

Тогда отображение $D : L_\infty^+ \to [0, +\infty)$ субаддитивно, сильно регулярно, но не 2-однородно.

Пример 3.2. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ для натурального $n \geq 3$, $\mathfrak{A} = 2^\Omega$ — множество всех подмножеств Ω и $\mu(\mathscr{A}) = \operatorname{card} \mathscr{A}$ для $\mathscr{A} \in \mathfrak{A}$. Имеем $L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = \mathbb{R}^n$ с покоординатными операциями. Для $f = \{f_k\}_{k=1}^n \in L_\infty^+$ определим носитель $\mathrm{s}(f) = \{k \in \Omega : f_k > 0\}$ и положим

$$T(f) = \begin{cases} \sum\limits_k f_k, & \text{если } \operatorname{card} \mathrm{s}(f) \text{ четно}, \\ +\infty, & \text{если } \operatorname{card} \mathrm{s}(f) \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Тогда T регулярно, однородно и l-субаддитивно, но не субаддитивно и не сильно регулярно.

Пример 3.3. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathfrak{A}$ такие, что $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \varnothing$ и $\mu(\mathscr{A}), \mu(\mathscr{B}) \in (0, +\infty)$. Положим

$$T(f) = \left| \int\limits_{\mathscr{A}} f\, d\mu - \int\limits_{\mathscr{B}} f\, d\mu \right| \quad \text{для всех } f \in L_\infty^+.$$

Тогда отображение $T : L_\infty^+ \to [0, +\infty)$ однородно, сильно регулярно и субаддитивно, но не монотонно. Поэтому теорема 2.2 не обобщается на субаддитивные отображения.

Замечание 3.1. Утверждения лемм 2.1 и 2.2, теорем 2.2 и 3.1 почти без изменения их доказательств обобщаются на случай конусов в произвольных векторных решетках (а не только L_∞). Утверждения теорем 2.1 и 2.3 справедливы для конусов в любой векторной решетке с главными проекциями. Эти результаты и их приложения будут изложены в следующей работе.

Автор выражает свою признательность рецензенту за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martin A. D., Mizel V. J.* A representation theorem for certain nonlinear functionals // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 15, N 5. P. 353–367.
2. *Mizel V. J., Sundaresan K.* Representation of additive and biadditive functionals // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968. V. 30, N 2. P. 102–126.
3. *Sundaresan K.* The additive functionals on Orlicz spaces // Stud. Math. 1969. V. 32, N 3. P. 269–276.
4. *Woyczynski W. A.* Additive operators // Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 1969. V. 17, N 7. P. 447–451.
5. *Drewnowski L., Orlicz W.* Continuity and representation of orthogonally additive functionals // Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 1969. V. 17, N 10. P. 647–653.
6. *Mizel V. J., Sundaresan K.* Additive functionals on spaces with non-absolutely-continuous norm // Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 1970. V. 18, N 7. P. 385–389.
7. *Haagerup U.* Normal weights on W^*-algebras // J. Funct. Anal. 1975. V. 19, N 3. P. 302–317.
8. *Бикчентаев А. М.* О задаче Хаагерупа о субаддитивных весах на W^*-алгебрах // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 94–98.

Статья поступила 30 января 2013 г. окончательный вариант — 18 октября 2013 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Airat.Bikchentaev@kpfu.ru`