Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 510.5

НЕПРЕДСТАВИМОСТЬ ПОЛУГРУППЫ ω^ω НАД $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$

А. С. Морозов

Аннотация. Доказывается невозможность однозначной Σ-представимости с параметрами для полугруппы всех функций из множества натуральных чисел в себя относительно композиции в наследственно конечной надстройке над вещественными числами.

Ключевые слова: определимость, вычислимость, сигма-определимость, сигма-представимость, допустимые множества, полугруппа отображений.

В классической теории вычислимых моделей можно выделить устойчивую группу наиболее популярных вопросов, вокруг которых так или иначе концентрируются современные исследования. Это прежде всего вопросы существования вычислимых представлений для конкретных структур и структур из определенных классов, вопросы о количестве изоморфных, но не вычислимо изоморфных представлений (изучение автоустойчивости и алгоритмической размерности), вопросы существования вычислимой параметризации классов вычислимых структур, изучения относительно вычислимых представлений и т. п.

Весьма естественно ставить и изучать подобные вопросы также и для обобщений понятия вычислимой модели, возникающих при замене классической вычислимости различными ее обобщениями. В частности, при замене понятия вычислимости более общим понятием Σ-определимости над допустимыми множествами возникает вполне естественное определение Σ-представимых структур над допустимыми множествами, сформулированное Ю. Л. Ершовым [1] и являющееся аналогом классического определения вычислимых структур. По мнению автора, одним из наиболее интересных допустимых множеств, над которыми прежде всего стоит рассматривать данное обобщение, является наследственно конечная надстройка $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ над вещественными числами, поскольку Σ-представимость над этим допустимым множеством в некотором смысле отражает вычислимость на гипотетическом компьютере, в котором реализованы настоящие вещественные числа, а не их приближения. В [2–5] начато изучение данного круга вопросов, там же можно найти и обсуждения постановок задач.

Данная работа посвящена доказательству невозможности однозначного Σ-представления с параметрами полугруппы ω^ω всех функций из ω в ω по композиции в наследственно-конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$.

Отметим отдельные особенности ситуации, в которой мы находимся. Доказательство отсутствия классического вычислимого представления для некоторой структуры иногда можно провести путем построения в ней конечно-порожденной подструктуры с неразрешимой проблемой равенства. Например,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–91001–АНФ_а).

этот метод действует для группы всех вычислимых перестановок на ω или полугруппы всех вычислимых отображений на натуральных числах и группы всех вычислимых автоморфизмов упорядочения на рациональных числах. В рассматриваемую здесь полугруппу ω^ω можно вложить, например, любую счетную полугруппу, поэтому мы можем построить в ω^ω конечно порожденные подполугруппы со сколь угодно сложными проблемами равенства и вышеуказанный метод здесь уже не сработает. Более того, в классическом случае при доказательстве несуществования вычислимого представления для счетной структуры мы доказываем несуществование изоморфизма — отображения из ω в ω. Когда структура имеет мощность 2^ω, задача выглядит сложнее: нужно доказать отсутствие некоторого изоморфизма из множества мощности $(2^\omega)^{(2^\omega)}$. Отсюда следует, что при изучении Σ-представлений структур над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ имеется необходимость в создании и применении новых методов.

Перейдем к основным определениям и обозначениям. С основными понятиями, относящимися к допустимым множествам, можно ознакомиться по [6, 7]. В понятиях и определениях, относящихся к арифметической и аналитической иерархиям, автор в основном следует монографиям [8, 9].

Для работы с внутренней структурой элементов наследственно-конечной надстройки понадобится понятие s-*терма*, в том или ином виде уже возникавшее ранее в работах по допустимым множествам.

Определение 1. 1. Любая переменная есть s-терм.

2. Символ пустого множества $\varnothing$ есть s-терм.

3. Если $t_1, \dots, t_k$ — s-термы, то $\{t_1, \dots, t_k\}$ также является s-термом.

4. Других s-термов нет.

Семантика таких термов определяется очевидным образом. Легко видеть, что любой элемент из $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ имеет вид $t(\bar{r})$ для подходящего s-терма t и кортежа вещественных чисел $\bar{r}$. Нетрудно доказать по индукции, что для любых s-термов $u(\bar{x})$ и $v(\bar{x})$ формулы $u(\bar{x}) = v(\bar{x})$ и $u(\bar{x}) = y$ эквивалентны Δ_0-формулам от своих переменных. Отсюда следует, что если $\psi(y, \bar{z})$ — Σ-формула и $u(\bar{x})$ — s-терм, то свойство $\psi(u(\bar{x}), \bar{z})$ эквивалентно Σ-формуле от $\bar{x}, \bar{z}$.

С использованием последнего замечания легко доказать, что любая Σ-формула с параметрами эквивалентна подходящей Σ-формуле с параметрами-праэлементами. Поэтому в качестве параметров Σ-формул в наследственно конечных надстройках будет достаточно рассмотреть только праэлементы.

Через $\mathrm{sp}(a)$ будем обозначать носитель элемента a, т. е. множество праэлементов, участвующих в его построении (см. [6]); в нашей ситуации это наименьшее конечное множество вещественных чисел, из элементов которого можно построить кортеж $\bar{q}$ такой, что для некоторого s-терма t будет справедливо $a = t(\bar{q})$. Если $\bar{p} \in \mathbb{R}$, то через $\mathrm{D}(\bar{p})$ будем обозначать множество всех геделевых номеров бескванторных формул, истинных на $\bar{p}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — подмодель $\mathfrak{B}$. Будем называть $\mathfrak{A}$ 1-*подмоделью* $\mathfrak{B}$ и писать $\mathfrak{A} \leqslant_1 \mathfrak{B}$, если для любой $\exists$-формулы $\varphi(\bar{x})$ и любых $\bar{a} \in \mathfrak{A}^{<\omega}$ условие $\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a})$ влечет $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$.

Если $\varphi(x, \bar{z})$ — формула и $\bar{p}$ — кортеж параметров, то будем обозначать множество $\{x \mid \mathfrak{N} \models \varphi(x, \bar{p})\}$ через $\varphi[\mathfrak{N}, \bar{p}]$.

Следующее определение Σ-представимости структур над допустимыми множествами принадлежит Ю. Л. Ершову (см. [1]).

Определение 3. Будем говорить, что алгебраическая система

$$\mathfrak{A} = \left\langle A; P_0^{m_0}, \ldots, P_{k-1}^{m_{k-1}} \right\rangle$$

Σ-*представима* над $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, если существуют конечный кортеж параметров $\bar{p} \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и Σ-формулы

$$V(x,z), \quad E^+(x,y,z), \quad E^-(x,y,z),$$

$$P_0^+(x,z),\ P_0^-(x,z), \ldots,\ P_{k-1}^+(x,z),\ P_{k-1}^-(x,z)$$

такие, что

1) множество $V[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]^2$ является дизъюнктным объединением множеств $E^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]$ и $E^-[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]$;

2) для всех $i < k$ множество $V[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]^{m_i}$ есть дизъюнктное объединение множеств $P_i^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]$ и $P_i^-[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]$;

3) формула $E^+(x,y,\bar{p})$ определяет конгруэнцию на алгебраической системе

$$\mathfrak{B} = \langle V[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}]; P_0^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}], \ldots, P_{k-1}^+[\mathbb{HF}(\mathfrak{M}), \bar{p}] \rangle$$

(обозначаемую в дальнейшем через E) и $\mathfrak{B}/\mathrm{E} \cong \mathfrak{A}$.

Если в данном определении отношение E совпадает с диагональю, т. е. $\langle x, y\rangle \in \mathrm{E} \Leftrightarrow x = y$, то мы будем говорить об *однозначной* Σ-*представимости.*

В своей оригинальной работе Ю. Л. Ершов называет это свойство Σ-*определимостью* алгебраических систем. Тем не менее здесь будем применять также используемое для этого свойства словосочетание Σ-*представимость*, поскольку считаем, что сегодня уже имеет смысл различать алгебраические системы вида $\mathfrak{B}/\mathrm{E}$ из определения (и называть их Σ-*определимыми системами*) и системы, им изоморфные (и называть их Σ-*представимыми системами*).

Следующее техническое определение содержится в эквивалентном виде в [6; упражнение 8.10] (там употребляется обозначение $\prec_1$).

Определение 4. Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — допустимые множества, причем $\mathbb{B}$ — концевое расширение $\mathbb{A}$. Будем говорить, что $\mathbb{A}$ является Σ-*подструктурой* в $\mathbb{B}$, и писать $\mathbb{A} \leqslant_\Sigma \mathbb{B}$, если для любой Σ-формулы $\varphi(\bar{x})$ и любых $\bar{a} \in \mathbb{A}$ условие $\mathbb{B} \models \varphi(\bar{a})$ влечет $\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a})$.

Имеет место

Предложение 1 [2, теорема 1.4]. *Пусть* $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$. *Тогда справедлива эквивалентность*

$$\mathfrak{A} \leqslant_1 \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \leqslant_\Sigma \mathbb{HF}(\mathfrak{B}).$$

Напомним некоторые свойства упорядоченного поля вещественных чисел $\mathbb{R}$, используемые в работе. Первое из них состоит в том, что эта структура допускает эффективную элиминацию кванторов [10], т. е. любая формула ее языка первого порядка может быть эффективно преобразована в эквивалентную ей бескванторную формулу с теми же свободными переменными. Более того, легко установить, что любая такая формула эквивалентна дизъюнкции так называемых *базовых формул*, т. е. формул вида $f(\bar{x}) = 0 \wedge \big(\bigwedge\limits_{i<k} g(\bar{x}) > 0\big)$ (см., например, [3]), где f и все g_i — полиномы с рациональными коэффициентами.

Пусть $\mathbb{R}'$ — упорядоченное подполе в упорядоченном поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Назовем его *алгебраически замкнутым в* $\mathbb{R}$, если оно совпадает со своим алгебраическим замыканием в $\mathbb{R}$. Легко видеть, что для любого $X \subseteq \mathbb{R}$ существует наименьшее алгебраически замкнутое подполе в $\mathbb{R}$, содержащее X, и оно совпадает с множеством всех корней нетривиальных многочленов с коэффициентами из поля $\mathbb{R}(X)$, принадлежащих $\mathbb{R}$. Будем обозначать его через $\mathrm{alg}(X)$. Аналогичное обозначение будет использоваться и для алгебраических замыканий кортежей.

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{R}'$ — алгебраически замкнутое в $\mathbb{R}$ упорядоченное подполе $\mathbb{R}$. Тогда $\mathbb{HF}(\mathbb{R}') \leqslant_\Sigma \mathbb{HF}(\mathbb{R})$. В частности, для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^{<\omega}$ выполнено $\mathbb{HF}(\mathrm{alg}(\bar{a})) \leqslant_\Sigma \mathbb{HF}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Ввиду того, что $\mathbb{R}'$ и $\mathbb{R}$ — модели модельно полной теории вещественно замкнутых полей [11], имеем $\mathbb{R}' \preccurlyeq \mathbb{R}$, в частности, $\mathbb{R}' \leqslant_1 \mathbb{R}$. Отсюда по предложению 1 получаем $\mathbb{HF}(\mathbb{R}') \leqslant_\Sigma \mathbb{HF}(\mathbb{R})$. Предложение доказано.

Также полезна следующая лемма о разложении, ставшая фольклором. Доказательство ее можно найти в [12].

Лемма 1 (о разложении). *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная структура. Существует эффективная процедура, которая по любой Σ-формуле $\varphi(\bar{x})$ строит вычислимое семейство $\exists$-формул $(\varphi_i(\bar{x}))_{i<\omega}$ такое, что для любых $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ выполнено*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(\bar{a}) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M} \models \bigvee_{i<\omega} \varphi_i(\bar{a}).$$

Заметим, что в силу эффективной элиминации кванторов для $\mathbb{R}$ в случае $\mathfrak{M} = \mathbb{R}$ можно утверждать в лемме о разложении существование такого семейства $(\varphi_i(\bar{x}))_{i<\omega}$, состоящего из бескванторных формул.

В дальнейшем будем обозначать через ω^ω как множество всех отображений из ω в ω, так и полугруппу, образуемую этим множеством относительно композиции. Будет также удобно пользоваться стандартными лямбда-обозначениями: через $\lambda x.g(x)$ будет обозначаться функция, значения которой на x всегда равны $g(x)$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Полугруппа ω^ω всех функций из ω в ω по композиции не представима над $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ с тривиальной эквивалентностью ни с какими параметрами, т. е. невозможно одновременное существование следующих объектов:*

(1) *кортежа параметров $\bar{p} \in \mathbb{R}$,*

(2) *Σ-определимого с параметрами $\bar{p}$ множества $F \subseteq \mathbb{HF}(\mathbb{R})$,*

(3) *Σ-определимой с параметрами $\bar{p}$ операции $\circ : F \times F \to F$,*

(4) *изоморфизма γ из ω^ω на $\langle F; \circ\rangle$.*

Доказательство. Предположим, что $\bar{p} \in \mathbb{R}$ — кортеж параметров, F — Σ-определимое с параметрами $\bar{p}$ подмножество в $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, $\circ$ — Σ-определимая с параметрами $\bar{p}$ бинарная операция на F и γ — изоморфизм из ω^ω на $\langle F; \circ\rangle$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{p}$ содержит

1) все элементы из $\mathrm{sp}(\gamma(\mathrm{id}_\omega))$, где id_ω — тождественное отображение на ω,

2) все элементы из $\mathrm{sp}(\gamma(a_0))$, где a_0 — отображение, тождественно равное 0, $a_0 = \lambda x.0$,

3) все элементы из $\mathrm{sp}(\gamma(\mathrm{Sc}))$, где Sc — функция следования на натуральных числах, $\mathrm{Sc}(x) = x + 1$.

Кодом вещественного числа x назовем последовательность натуральных чисел (функцию из ω в ω) $\langle s, a, a_0, a_1, a_2, \dots\rangle$ такую, что

1) $s \in \{0,1\}$ и $a \in \omega$,
2) для всех $i < \omega$ выполнены условия $a_i \in \{0,1\}$ и $\neg(\exists n \forall m \geqslant n (a_m = 1))$,
3) из $a = 0$ и $\forall i < \omega (a_i = 0)$ следует $s = 0$,
4) $x = (-1)^s \bigl(a + \sum\limits_{i<\omega} a_i 2^{-i-1}\bigr)$.

Множество всех кодов для вещественных чисел образует Π^0_2-подмножество в ω^ω, которое будем обозначать через $\mathfrak{C}$. Если x — число с кодом $b \in \omega^\omega$, то записываем это как $x = \xi_b$.

Лемма 2. 1. *Пусть $f(v_1, \dots, v_k, \overline{w})$ — полином с рациональными коэффициентами. Тогда для любых $\bar p \in \mathbb{R}^{<\omega}$*

(a) $\{\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in \mathfrak{C}^k \mid f(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p) = 0\} \in \Pi^{0,\mathrm{D}(\bar p)}_3$ *равномерно по* f;

(b) $\{\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in \mathfrak{C}^k \mid f(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p) > 0\} \in \Delta^{0,\mathrm{D}(\bar p)}_3$ *равномерно по* f.

2. *Пусть $\varphi(v_1, \dots, v_k, \overline{w})$ — бескванторная формула. Тогда для любых $\bar p \in \mathbb{R}^{<\omega}$*

$$\{\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in \mathfrak{C}^k \mid \varphi(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p)\} \in \Pi^{0,\mathrm{D}(\bar p)}_3$$

равномерно по φ.

3. *Пусть $\varphi(v_1, \dots, v_k, \overline{w})$ — Σ-формула. Тогда для любых $\bar p \in \mathbb{R}^{<\omega}$*

$$\{\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in \mathfrak{C}^k \mid \varphi(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p)\} \in \Sigma^{0,\mathrm{D}(\bar p)}_4$$

равномерно по φ.

Доказательство. Для произвольных $x = \langle s, a, a_0, a_1, \dots\rangle \in \mathfrak{C}$ и $n < \omega$ обозначим через $x^{(n)}$ последовательность $\langle s, a, a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots\rangle \in \mathfrak{C}$.

Условие $f(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p) = 0$ можно переписать в виде

$$\forall l \exists m \forall n > m [|f(\xi_{x_1^{(n)}}, \dots, \xi_{x_k^{(n)}}, \bar p)| < (l+1)^{-1}],$$

а условие $f(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p) > 0$ — в виде

$$\exists l \exists m \forall n > m [f(\xi_{x_1^{(n)}}, \dots, \xi_{x_k^{(n)}}, \bar p) > (l+1)^{-1}].$$

Заметим, что условия на $x_1, \dots, x_k \in \omega^\omega$ и $n, l \in \omega$, стоящие в квадратных скобках, вычислимы с оракулом $\mathrm{D}(\bar p)$. Учитывая, что $\mathfrak{C} \in \Pi^0_2$, отсюда легко получаем справедливость п. 1.

П. 2 следует из п. 1 и представимости любой формулы в виде эквивалентной дизъюнкции базовых формул.

Докажем п. 3. Для произвольной Σ-формулы $\varphi(\bar u, \bar z)$ условие

$$\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in \mathfrak{C} \wedge \varphi(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p)$$

на кортеж $\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in (\omega^\omega)^k$ можно равномерно по φ переписать в эквивалентном виде:

$$\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in \mathfrak{C} \wedge \bigvee_i \varphi_i(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p),$$

где φ_i — бескванторная формула, эффективно зависящая от i, что, в свою очередь, равносильно

$$\bigvee_i (\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in \mathfrak{C} \wedge \varphi_i(\xi_{x_1}, \dots, \xi_{x_k}, \bar p)).$$

Применяя уже доказанный п. 2, получим эквивалентное ему представление в виде

$$\bigvee_i \forall z_0 \exists z_1 \forall z_2 \overline{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_k, i, z_0, z_1, z_2),$$

где $\overline{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_k, i, z_0, z_1, z_2)$ — $\mathrm{D}(\bar{p})$–вычислимый предикат на $(\omega^\omega)^k \times \omega^4$. Отсюда непосредственно получаем п. 3.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует Σ-определимая с параметрами $\bar{p}$ функция $c : \omega \to \mathbb{HF}(\mathbb{R})$ такая, что для любого $n < \omega$ выполнено $c(n) = \gamma(\lambda x.n)$.*

Доказательство. Искомая функция c может быть определена по индукции с помощью схемы

$$\left[\begin{array}{c} c(0) = a_0, \\ c(n+1) = \gamma(\mathrm{Sc}) \circ c(n). \end{array}\right.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любой $\mathrm{D}(\bar{p})$-вычислимой функции $f \in \omega^\omega$ множество $\mathrm{sp}(\gamma(f))$ состоит из вещественных чисел, коды которых принадлежат $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$.*

Доказательство. Пусть f — $\mathrm{D}(\bar{p})$-вычислимая функция. Тогда очевидно, что f — единственная функция, удовлетворяющая условию

$$\bigwedge_{n<\omega} \exists m (m = f(n) \wedge \lambda x.m = f(\lambda x.n)).$$

Применяя изоморфизм γ, получим, что $x = \gamma(f)$ — единственный элемент из $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$, удовлетворяющий условию

$$\bigwedge_{n\in\omega} \exists m (m = f(n) \wedge c(m) = x \circ c(n)).$$

Пусть $\gamma(f) = \tau(\overline{w})$, где τ — s-терм, $\mathrm{sp}(\gamma(f)) = \overline{w}$ и $\overline{w} \in \mathbb{R}^{<\omega}$, причем все элементы в $\overline{w}$ попарно различны и расположены по возрастанию. Тогда $\bar{x} = \overline{w} = w_1, \ldots, w_k$ — единственный кортеж, удовлетворяющий условию

$$(x_1 < \cdots < x_k) \wedge \bigwedge_{n<\omega} \exists m (m = f(n) \wedge c(m) = \tau(\bar{x}) \circ c(n)).$$

Здесь для каждого n условие $\Psi_n(\bar{x}, \bar{p}) = \exists m (m = f(n) \wedge c(m) = \tau(\bar{x}) \circ c(n))$ выражается Σ-формулой от $\bar{x}$ с параметрами $\bar{p}$, равномерно вычисляемой с оракулом $\mathrm{D}(\bar{p})$ по n.

Кортеж функций $\bar{z}$ поэлементно кодирует вещественные числа из кортежа $\overline{w}$, если и только если

$$\bar{z} \in \mathfrak{C}^k \wedge (\xi_{z_1} < \cdots < \xi_{z_k}) \wedge \bigwedge_{n<\omega} \Psi_n(\xi_{z_1}, \ldots, \xi_{z_k}, \bar{p}). \tag{1}$$

По лемме 2 каждое условие $\Psi_n(\xi_{z_1}, \ldots, \xi_{z_k}, \bar{p})$ можно заменить эквивалентным условием

$$\exists u_0 \forall u_1 \exists u_2 \forall u_3 P_n(u_0, u_1, u_2, u_3, z_1, \ldots, z_k),$$

где P_n — $\mathrm{D}(\bar{p})$-вычислимый предикат на $\omega^4 \times (\omega^\omega)^k$, алгоритм для вычисления которого находится эффективно по формуле Ψ_n. Поскольку Ψ_n находится эффективно по n с оракулом $\mathrm{D}(\bar{p})$, можно переписать последнее условие в виде

$$\exists u_0 \forall u_1 \exists u_2 \forall u_3 \widehat{P}(n, u_0, u_1, u_2, u_3, z_1, \ldots, z_k),$$

где $\widehat{P}$ — $\mathrm{D}(\bar{p})$-вычислимый предикат. Все условие (1), таким образом, будет иметь тип $\Pi_5^{0,\mathrm{D}(\bar{p})}$, и поскольку ему удовлетворяет единственный кортеж $\bar{z}$, а именно кортеж с условием $\xi_{\bar{z}} = \overline{w}$, все элементы $\bar{z}$ будут принадлежать $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$.

Лемма доказана.

В следующей формулировке, как обычно, обозначаем через $\mathrm{Sym}(\omega)$ группу всех перестановок на ω.

Лемма 5. *Существует конечное семейство, состоящее из* $\mathrm{D}(\bar{p})$*-вычислимых отображений, такое, что любой нетривиальный элемент из* $\mathrm{Sym}(\omega)$*, коммутирующий с ними, не принадлежит* $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$.

Доказательство. Сначала заметим, что известный результат о существовании вычислимого дерева без бесконечных гиперарифметических ветвей [8, следствие XLI(b)] может быть корректно релятивизован к $\mathrm{D}(\bar{p})$, и, таким образом, можно утверждать, что существует $\mathrm{D}(\bar{p})$-вычислимое дерево, не имеющее бесконечных $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-ветвей. Применив процедуру, описанную в [13] (более позднее упрощение см. в [14]), получим из этого дерева $\mathrm{D}(\bar{p})$-вычислимую структуру $\mathfrak{A} = \langle \omega; \ell_n \rangle_{n<\omega}$ с унарными операциями, которая имеет нетривиальные автоморфизмы, но не имеет нетривиальных $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-автоморфизмов. Теперь, пользуясь этой структурой $\mathfrak{A}$, определим $\mathrm{D}(\bar{p})$-вычислимые унарные функции s и e на ω так, чтобы структура $\mathfrak{B} = \langle \omega; s, e \rangle$ имела нетривиальные автоморфизмы, но не имела нетривиальных $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-автоморфизмов. Фактически будем кодировать в структуре $\mathfrak{B}$ структуру $\mathfrak{A}$.

Опишем построение. Запустим процесс перечисления с оракулом $\mathrm{D}(\bar{p})$ всех троек натуральных чисел $\langle n, a, b \rangle$, для которых выполнено соотношение $\ell_n(a) = b$. Каждый раз, когда в этом перечислении появляется новая тройка, $\langle n, a, b \rangle$, выбираем среди еще не задействованных нечетных чисел очередные числа $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ и полагаем

$$\begin{gathered} s(a_0) = 2a, \\ s(x) = x \quad \text{при } x \in \{2a, 2b, a_1, \ldots, a_n\}, \\ e(2a) = 2a, \\ e(2b) = 2b, \\ e(a_i) = a_{i+1} \quad \text{при всех } i < n, \\ e(a_n) = 2b. \end{gathered}$$

Таким образом, $\ell_n(a) = b$ эквивалентно тому, что $2a$ и $2b$ связаны с помощью некоторых попарно различных нечетных элементов $a_0 < \cdots < a_n$ соотношениями $s(a_0) = 2a$, $e(a_0) = a_1$, $e(a_1) = a_2$, … , $e(a_n) = 2b$. Более того, нетрудно видеть, что для каждого $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ существует единственный $\widehat{\varphi} \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{B}$ со свойством

$$\forall a, b \in \omega (\varphi(a) = b \Leftrightarrow \widehat{\varphi}(2a) = 2b).$$

При этом соответствие $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ является изоморфизмом между группами $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ и $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{B}$. Значит, и структура $\mathfrak{B}$ имеет нетривиальные автоморфизмы. Покажем, что среди автоморфизмов этой структуры нет нетривиальных $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-автоморфизмов. Если бы структура $\mathfrak{B}$ имела нетривиальный $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-автоморфизм ψ, то мы могли бы определить $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ с условием $\widehat{\varphi} = \psi$ как

$$\varphi(a) = b \Leftrightarrow \psi(2a) = 2b \quad \text{для всех } a, b < \omega.$$

Отсюда и из нетривиальности ψ следует нетривиальность φ. Таким образом, φ оказался бы нетривиальным $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-автоморфизмом структуры $\mathfrak{A}$, что невозможно. Лемма доказана.

Заметим, что произвольное отображение $\varphi \in \omega^\omega$ является автоморфизмом структуры $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда φ обратим и коммутирует с s и e. Поскольку эта структура имеет нетривиальный автоморфизм, имеем

$$\omega^\omega \models \exists\varphi(\exists\psi(\psi\varphi = \varphi\psi = \mathrm{id}_\omega) \wedge (\varphi \neq \mathrm{id}_\omega) \wedge (\varphi e = e\varphi) \wedge (\varphi s = s\varphi)).$$

Переходя к образам при изоморфизме γ, получим следующее Σ-утверждение, истинное на $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$:

$$\exists x\exists y[x, y \in F \wedge (y \circ x = x \circ y = \gamma(\mathrm{id}_\omega))\wedge \\ \wedge (x \neq \gamma(\mathrm{id}_\omega)) \wedge (x \circ \gamma(e) = \gamma(e) \circ x) \wedge (x \circ \gamma(s) = \gamma(s) \circ x)]. \quad (2)$$

По лемме 4 все элементы из $\mathrm{sp}(\gamma(s))$ и $\mathrm{sp}(\gamma(e))$ принадлежат $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$. Это означает, что можно расширить $\bar{p}$ до кортежа $\bar{p}_1$ так, чтобы $\bar{p}_1$ содержал все элементы из $\mathrm{sp}(\gamma(s))$ и $\mathrm{sp}(\gamma(e))$ и все элементы кортежа $\bar{p}_1$ принадлежали $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$, и рассматривать (2) как Σ-утверждение с параметрами $\bar{p}_1$. Ввиду того, что $\mathbb{HF}(\mathrm{alg}(\bar{p}_1)) \leqslant_\Sigma \mathbb{HF}(\mathbb{R})$, можем выбрать в $\mathbb{HF}(\mathrm{alg}(\bar{p}_1))$ элементы $x = x_0$ и $y = y_0$, для которых справедлива часть формулы (2), заключенная в квадратные скобки. Это войдет в противоречие с последующими леммами.

Лемма 6. *Если $a \in F \cap \mathbb{HF}(\mathrm{alg}(\bar{p}_1))$, то $\gamma^{-1}(a)$ является $\mathrm{D}(\bar{p}_1)$-вычислимым отображением.*

Доказательство. Поскольку γ — изоморфизм, имеем

$$\gamma^{-1}(a)(m) = n \Leftrightarrow \gamma^{-1}(a)(\lambda x.m) = \lambda x.n \Leftrightarrow a \circ c(m) = c(n).$$

Укажем $\mathrm{D}(\bar{p}_1)$-эффективную процедуру для вычисления $\gamma^{-1}(a)$. Одновременно для всех пар натуральных чисел $\langle m, n\rangle$ строим разложения формул $a \circ c(m) = c(n)$ в бесконечные вычислимые дизъюнкции бескванторных утверждений о $\bar{p}_1$ и, используя оракул $\mathrm{D}(\bar{p}_1)$ для проверки их истинности, ждем появления в одной из них истинного утверждения. Для той пары m и n, для которой это произошло, будет верно утверждение $\gamma^{-1}(a)(m) = n$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Если функция $\mathrm{D}(\bar{p}_1)$-вычислима, то она принадлежит $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что множество $\mathrm{D}(\bar{p}_1)$ принадлежит $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$.

Пусть $\bar{p}_1 = p_{1,1}, \ldots, p_{1,l}$ и $\bar{z} = z_1, \ldots, z_l \in \omega^\omega$ — соответствующие им коды, т. е. $p_{1,i} = \xi_{z_i}$, для всех $i = 1, \ldots, l$. Известно, что все z_i принадлежат $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$. Поскольку любая формула эквивалентна дизъюнкции базовых формул, достаточно показать, что множество истинных формул видов $f(\bar{p}_1) = 0$ и $f(\bar{p}_1) > 0$, где f — полином с рациональными коэффициентами, принадлежит $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$. Имеем

$$f(\bar{p}_1) = 0 \Leftrightarrow \forall u\exists m\forall n > m\left[|f(\xi_{z_1^{(n)}}, \ldots, \xi_{z_l^{(n)}})| < \frac{1}{u+1}\right],$$

$$f(\bar{p}_1) > 0 \Leftrightarrow \exists u\exists m\forall n > m\left[f(\xi_{z_1^{(n)}}, \ldots, \xi_{z_l^{(n)}}) > \frac{1}{u+1}\right].$$

Поскольку выражения в квадратных скобках являются вычислимыми отношениями от $f, \bar{z}, u, n$, нетрудно видеть, что множество бескванторных формул, истинных на $\bar{p}_1$, т. е. $\mathrm{D}(\bar{p}_1)$, принадлежит классу $\Delta_1^{1,z_1,\dots,z_l}$.

Отсюда ввиду того, что с $z_1,\dots,z_l \in \Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$, по известному результату Шенфильда о том, что $A \in \Delta_1^{1,B}$ и $B \in \Delta_1^{1,C}$ влечет $A \in \Delta_1^{1,C}$ [8, теорема XXXIV], получаем, что $\mathrm{D}(\bar{p}_1) \in \Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$.

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Из леммы 6 следует, что $\gamma^{-1}(x_0)$ будет $\mathrm{D}(\bar{p}_1)$-вычислимой перестановкой на ω, которая по лемме 7 будет принадлежать $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$. С другой стороны, она же будет являться нетривиальным $\Delta_1^{1,\mathrm{D}(\bar{p})}$-автоморфизмом структуры $\mathfrak{B}$, чего быть не может; противоречие.

Теорема доказана.

Автор благодарит рецензента за замечания, существенно способствовавшие улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ershov Yu. L.* Σ-Definability of algebraic systems // Handbook of Recursive Mathematics. V. 1. Recursive Model Theory. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. P. 235–260. (Stud. Logic Found. Math.).
2. *Морозов А. С., М. В. Коровина.* О Σ-определимости счетных структур над вещественными, комплексными числами и кватернионами // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 335–363.
3. *Морозов А. С.* О некоторых представлениях поля вещественных чисел // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 1. С. 96–128.
4. *Морозов А. С.* О Σ-представлениях вещественного порядка // Алгебра и логика (в печати).
5. *Морозов А. С.* Σ-жесткие представления вещественного порядка // Сиб. мат. журн. (в печати).
6. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
7. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.
8. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw–Hill Book Comp., 1967.
9. *Sacks G. E.* Higher recursion theory. Heidelberg: Springer-Verl., 1990.
10. *Tarski A.* A decision method for elementary algebra and geometry. Santa Monica, California: Rand Corporation, 1948.
11. *Marker D.* Model theory. An introduction. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2002. (Grad. Texts Math.).
12. *Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I.* $\mathbb{HF}$-Computability // Computability in context. Computation and logic in the real world / Ed. by S. B. Cooper, A. Sorbi. London: Imperial College Press / World Sci., 2011. P. 169–242.
13. *Морозов А. С.* Функциональные деревья и автоморфизмы моделей // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 19–39.
14. *Morozov A. S.* Groups of computable automorphisms. Chapter 8 // Handbook of recursive mathematics. V. 1. Recursive model theory. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. P. 311–345. (Stud. Logic Found. Math.).

Статья поступила 23 апреля 2013 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru