*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1*

*УДК 517.51*

# ФУНКЦИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ СУММИРУЕМОСТИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

**А. С. Романов**

**Аннотация.** Рассматриваются различные теоремы вложения для определенных на метрическом пространстве классов функций соболевского типа с переменным показателем суммируемости.

**Ключевые слова:** метрическое пространство, мера, функции соболевского типа, теоремы вложения.

В классическом определении пространств Соболева можно выделить два основных условия принадлежности функции $u$ пространству $W_p^1(G)$: во-первых, существование обобщенных производных, что является характеристикой гладкости функции $u$, во-вторых, принадлежность модуля градиента функции $u$ пространству Лебега $L_p(G)$.

Естественные обобщения пространств Соболева возникают при замене в исходном определении пространств Лебега другими классами функций, выбор которых диктуется спецификой рассматриваемой задачи. Хорошо известны различные применения весовых пространств Соболева, а в [1], к примеру, изучаются соболевские классы функций с переменным показателем суммируемости и их приложения к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных с коэффициентами, имеющими переменные характеристики.

С другой стороны, в евклидовом случае для пространств Соболева $W_p^1$ известны различные эквивалентные описания, не использующие в явном виде понятия дифференциала и обобщенных производных и допускающие адекватную формулировку в терминах метрики и меры. Это позволяет ввести аналоги соболевских классов функций на метрических пространствах, не имеющих линейной структуры. Стандартный подход к определению таких классов заключается в выделении некоторого «метрического аналога модуля градиента функции» и предположении о его принадлежности соответствующему пространству Лебега [2, 3]. Получаемые для таких функциональных пространств результаты, в частности теоремы вложения, имеют весьма универсальный характер, поскольку их доказательства используют минимальный набор исходных условий, основным из которых является соотношение между метрикой и мерой. Результаты, полученные в метрическом случае, оказываются полезными при изучении классических пространств Соболева в евклидовых областях с нерегулярной границей,

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН–ДВО РАН № 56.

при описании следов соболевских функций на фракталах и при решении ряда других вопросов [4, 5].

Как и в евклидовом случае, замена пространства Лебега $L_p$, участвующего в определении функционального класса соболевского типа, иным пространством функций приводит к определению новых функциональных классов на метрических пространствах. В данной работе изучаются некоторые свойства классов функций соболевского типа с переменным показателем суммируемости $M^1_{p(x)}(X, d, \mu)$, определяемых на метрическом пространстве $(X, d)$ с борелевской мерой $\mu$, удовлетворяющей условию удвоения. Характеристические свойства таких функциональных пространств существенным образом зависят от метрических свойств показателя суммируемости $p(x)$. В предположении непрерывности функции $p(x)$ удается доказать теоремы вложения в пространства Лебега, вполне аналогичные евклидовым результатам из [1], а также получить теоремы вложения в пространства соболевского типа, определяемые гёльдеровыми метриками. При более сильном предположении о липшицевости показателя суммируемости $p(x)$ удается уточнить полученные ранее результаты и доказать для пространств $M^1_{p(x)}(X, d, \mu)$ метрические аналоги теорем вложения, полученных в евклидовом случае в [6].

## 1. Пространства Лебега с переменными показателями суммируемости

Рассмотрим метрическое пространство $(X, d)$ с конечным диаметром и конечную борелевскую меру $\mu$ с носителем в $X$. Фиксируем положительную измеримую функцию $p : X \to [1, \infty)$ и положим $p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} p(x)$, $p^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} p(x)$. При $1 < p(x) < \infty$ сопряженный показатель $p'(x)$ определим стандартным равенством $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.

На множестве измеримых функций $f : X \to R$ введем функционал

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int\limits_X |f(x)|^{p(x)}\, d\mu.$$

*Пространство Лебега с переменным показателем суммируемости* $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ определим как класс всех таких функций $f$, что $\rho_{p(\cdot)}(\lambda f) < \infty$ при некотором значении $\lambda > 0$.

В евклидовых пространствах такие классы функций введены достаточно давно и хорошо изучены (см., к примеру, [1, 7]). Свойства функциональных классов с переменными показателями суммируемости во многом похожи на свойства пространств Лебега с постоянным показателями, однако некоторые доказательства существенно отличаются от привычных. При этом доказательства основных структурных свойств для таких классов функций, определенных на метрических пространствах с мерой, вполне аналогичны доказательствам соответствующих утверждений в евклидовом случае [8, 9].

Для удобства приведем сводку основных определений и нужных нам результатов, а также отметим основные идеи некоторых доказательств, конструкция которых подходящим образом адаптирована для случая пространств с переменным показателем суммируемости. Более полные и строгие доказательства можно найти, к примеру, в [1, 7–9].

При $p(x) \geq 1$ норма в пространстве $L_{p(\cdot)}(X,\mu)$ вводится равенством

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f \mid L_{p(\cdot)}(X,\mu)\| = \inf\left\{\alpha > 0 \mid \rho_{p(\cdot)}(f/\alpha) = \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right)^{p(x)} d\mu \leq 1\right\}.$$

Отметим, что при $0 < \|f\|_{p(\cdot)} < \infty$ выполняется неравенство

$$\int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu \leq 1, \tag{1.1}$$

которое легко доказать, выбирая минимизирующую последовательность $\alpha_k \to \|f\|_{p(\cdot)}$ и используя лемму Фату.

Первые два свойства введенной нормы:

1) $\|f\|_{p(\cdot)} \geq 0$ и $\|f\|_{p(\cdot)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ почти всюду;

2) $\|\lambda f\|_{p(\cdot)} = |\lambda|\|f\|_{p(\cdot)}$,

очевидны, а неравенство треугольника

3) $\|f+g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p(\cdot)} + \|g\|_{p(\cdot)}$

следует из выпуклости функции $t^p$ при $p \geq 1$, неравенства (1.1) и оценки

$$\int\limits_X \left(\frac{|f(x)+g(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}+\|g\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu \leq \int\limits_X \biggl(\frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)}+\|g\|_{p(\cdot)}} \cdot \frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}$$
$$+ \frac{\|g\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)}+\|g\|_{p(\cdot)}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p(\cdot)}}\biggr)^{p(x)} d\mu \leq \frac{\|f\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)}+\|g\|_{p(\cdot)}} \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu$$
$$+ \frac{\|g\|_{p(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)}+\|g\|_{p(\cdot)}} \int\limits_X \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu \leq 1.$$

При $p(x) = p = \mathrm{const}$ введенная норма совпадает со стандартной нормой в $L_p$. Норма в пространстве $L_{p(\cdot)}(X,\mu)$ монотонна, т. е. из условия $|f| \leq |g|$ почти всюду следует неравенство $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \|g\|_{p(\cdot)}$. Функционал $\rho_{p(\cdot)}(f)$ также монотонен, а функция $\alpha \longmapsto \rho_{p(\cdot)}(f/\alpha)$ непрерывна и убывает.

Далее будем предполагать, что $p^+ < \infty$. При условии ограниченности функции $p(x)$ можно получить дополнительные оценки, которые не выполняются в общем случае. В частности, в соотношении (1.1) будет выполняться равенство, т. е.

$$\rho_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu = 1. \tag{1.2}$$

Предположим противное, пусть $\rho_{p(\cdot)}(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = \lambda < 1$. Тогда, выбирая $\alpha = \|f\|_{p(\cdot)} \cdot \lambda^{1/p^+}$, получим неравенство

$$\int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\alpha}\right)^{p(x)} d\mu = \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{p(x)/p^+} d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu = 1,$$

которое противоречит определению нормы, так как $\alpha < \|f\|_{p(\cdot)}$.

Если $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \le \infty$, то

$$\min\left(\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}}, \frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}^{p^+}}\right) \cdot \rho_{p(\cdot)}(f) \le \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu$$
$$\le \max\left(\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}}, \frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}^{p^+}}\right) \cdot \rho_{p(\cdot)}(f).$$

Учитывая (1.2), получаем

$$\min\left(\|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \|f\|_{p(\cdot)}^{p^+}\right) \le \rho_{p(\cdot)}(f) \le \max\left(\|f\|_{p(\cdot)}^{p_-}, \|f\|_{p(\cdot)}^{p^+}\right). \tag{1.3}$$

**Следствие 1.1.** *Из оценки* (1.3) *следует, что*
1) *условия* $\|f\|_{p(\cdot)} \le 1$ *и* $\rho_{p(\cdot)}(f) \le 1$ *эквивалентны;*
2) $\|f_n\|_{p(\cdot)} \to 0$ *тогда и только тогда, когда* $\rho_{p(\cdot)}(f_n) \to 0$;
3) *если* $\rho_{p(\cdot)}(f) \le L < \infty$, *то* $\|f\|_{p(\cdot)} \le K = K(p(x), L) < \infty$.

Эти свойства позволяют при изучении ограниченности (непрерывности) операторов в пространстве $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ наряду с оценками нормы использовать оценки функционала $\rho_{p(\cdot)}(*)$.

Учитывая конечность меры $\mu$, легко показать, что при $1 \le p(x) \le q(x) < \infty$ пространство $L_{q(\cdot)}(X, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$.

Пусть $f \in L_{q(\cdot)}(X, \mu)$, $\|f\|_{q(\cdot)} \le 1$ и $E = \{x \in X \mid |f(x)| \le 1\}$. Согласно следствию 1.1 выполняется неравенство $\rho_{q(\cdot)}(f) \le 1$, поэтому

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int\limits_E |f(x)|^{p(x)}\, d\mu + \int\limits_{X\setminus E} |f(x)|^{p(x)}\, d\mu \le \mu(E) + \int\limits_{X\setminus E} |f(x)|^{q(x)}\, d\mu$$
$$\le \mu(X) + \rho_{q(\cdot)}(f) \le 1 + \mu(X).$$

Из этого вытекает ограниченность оператора вложения, но несложно оценить и его норму. Применяя предыдущую оценку к функции $g(x) = f(x)/\|f\|_{q(\cdot)}$, получаем

$$\int\limits_X \left(\frac{|g(x)|}{1 + \mu(X)}\right)^{p(x)} d\mu \le \frac{1}{1 + \mu(X)} \cdot \rho_{p(\cdot)}(g) \le 1.$$

Стало быть,

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le (1 + \mu(X))\|f\|_{q(\cdot)}.$$

В силу конечности меры $\mu$ пространство $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ всегда непрерывно вложено в пространство Лебега $L_{p_-}(X, \mu)$ с постоянным показателем суммируемости. Поэтому из сходимости функций $f_n \to f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ следуют сходимость в пространстве $L_{p_-}(X, \mu)$ и сходимость почти всюду.

В различных вопросах оказываются полезными оценки типа неравенства Чебышева.

**Следствие 1.2.** *Пусть* $f \in L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ *и* $E_\lambda = \{x \in X \mid |f(x)| \ge \lambda\}$. *Тогда*
1) *при* $\lambda \ge 1$

$$\mu(E_\lambda) = \int\limits_{E_\lambda} d\mu \le \frac{1}{\lambda^{p_-}} \int\limits_{E_\lambda} |f(x)|^{p(x)}\, d\mu \le \frac{\rho_{p(\cdot)}(f)}{\lambda^{p_-}};$$

2) *поскольку* $\mu(E_\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to +\infty$, *в силу абсолютной непрерывности интеграла имеем*

$$\int\limits_{E_\lambda} \lambda^{p(x)}\, d\mu \le \int\limits_{E_\lambda} |f(x)|^{p(x)}\, d\mu \to 0 \quad \text{при } \lambda \to +\infty.$$

Обозначим через $\mathscr{P}$ множество функций $p : X \to (1, \infty)$, удовлетворяющих условию

$$1 < p_- \le p(x) \le p^+ < \infty.$$

При $p(x) \in \mathscr{P}$ довольно просто доказывается аналог классического неравенства Гёльдера:

$$\int\limits_X |f(x)g(x)|\, d\mu \le \left(1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p^+}\right) \|f\|_{p(\cdot)} \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}. \tag{1.4}$$

Используя числовое неравенство $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ и учитывая (1.2), получаем

$$\int\limits_X \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)} \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}}\, d\mu$$
$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} \frac{1}{p(x)} \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)} d\mu + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} \frac{1}{p'(x)} \int\limits_X \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{p'(\cdot)}}\right)^{p'(x)} d\mu$$
$$= 1 + \frac{1}{p_-} - \frac{1}{p^+}.$$

Неравенство Гёльдера позволяет при $p \in \mathscr{P}$ стандартным образом определить новую норму

$$|||f|||_{p(\cdot)} = \sup_{\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1} \int\limits_X |f(x)g(x)|\, d\mu,$$

которая эквивалентна введенной ранее, т. е.

$$C_1 \|f\|_{p(\cdot)} \le |||f|||_{p(\cdot)} \le C_2 \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Новую норму удобно использовать, к примеру, при доказательстве полноты пространства $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$.

Пусть $p(x) \in \mathscr{P}$. Если последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в пространстве $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0$, что

$$\int\limits_X |f_m(x) - f_n(x)||g(x)|\, d\mu < \varepsilon$$

для всех $m, n \ge n_0$ и всякой функции $g$ такой, что $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$.

В силу непрерывности оператора вложения $I : L_{p(\cdot)}(X, \mu) \to L_{p_-}(X, \mu)$ последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в полном пространстве $L_{p_-}(X, \mu)$ и сходится в нем к некоторой функции $f$. Учитывая лемму Фату и тот факт, что из сходимости в пространстве Лебега следует сходимость почти всюду, получаем

$$\int\limits_X |f(x) - f_n(x)||g(x)|\, d\mu \le \sup_m \int\limits_X |f_m(x) - f_n(x)||g(x)|\, d\mu \le \varepsilon$$

для всех $m, n \ge n_0$ и всякой функции $g$ такой, что $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$. Значит,

$$|||f(x) - f_n(x)|||_{p(\cdot)} \le \varepsilon,$$

и последовательность сходится к функции $f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$.

## 2. Функции соболевского типа на метрических пространствах

К настоящему времени на метрических пространствах с мерой введены различные классы функций, являющиеся в некотором смысле обобщением классических пространств Соболева с первыми производными. В евклидовых областях $G \subset \mathbb{R}^n$ с регулярной границей эти функциональные классы совпадают с пространствами Соболева $W^1_p(G)$, однако в общем случае на метрических пространствах они могут существенно различаться между собой [3]. В данной работе будем рассматривать введенные Хайлашем [2] классы функций соболевского типа $M^1_p(X,d,\mu)$ и их обобщения на случай переменных показателей суммируемости.

Функцию $g : X \to [0,\infty)$ называют *допустимой* для $\mu$-измеримой функции $u : X \to \overline{R}$, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \le d(x,y)(g(x) + g(y)) \tag{2.1}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$. Для функции $u$ обозначим через $D(u)$ множество всех допустимых функций и положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(X,\mu)$.

Пространство соболевского типа $M^1_p(X,d,\mu)$ определим условием

$$M^1_p(X,d,\mu) = \{u \in L_p(X,\mu) \mid D_p(u) \ne \varnothing\},$$

а норму — равенством

$$\left\|u \mid M^1_p\right\| = \|u \mid L_p\| + \inf_{g\in D_p(u)} \|g \mid L_p\|. \tag{2.2}$$

Пространство $M^1_p(X,d,\mu)$ банахово [2]. Для произвольной евклидовой области $G \subset \mathbb{R}^n$ пространство $M^1_p(B,|*|,m_n)$, рассматриваемое относительно обычной евклидовой метрики $|*|$ и $n$-мерной меры Лебега $m_n$, вложено в пространство Соболева $W^1_p(G)$. В областях с достаточно гладкой границей, к примеру, липшицевой, пространства $M^1_p(B,|*|,m_n)$ и $W^1_p(G)$ совпадают, а нормы их эквивалентны [2].

Если в метрическом случае не предполагать никакой взаимосвязи между метрикой $d$ и мерой $\mu$, то довольно сложно ожидать, что для функций из пространств $M^1_p(X,d,\mu)$ удастся получить содержательные аналоги евклидовых результатов, выполняющихся для функций из пространств Соболева. Достаточно развитая теория пространств $M^1_p$, включающая в себя различные теоремы вложения, получается в случае, когда мера $\mu$ удовлетворяет простому геометрическому «условию удвоения», согласно которому мера шара удвоенного радиуса оценивается сверху через меру исходного шара, т. е.

$$\mu(B(x,2\rho)) \le C_d\mu(B(x,\rho))$$

при всех $x \in X$ и $\rho > 0$.

Из условия удвоения следует оценка снизу для меры шара через его радиус:

$$\mu(B(x,\rho)) \ge b\rho^s, \tag{2.3}$$

где $s = \log_2 C_d$. Меру $\mu$, удовлетворяющую оценке (2.3), называют *$s$-регулярной*. При этом показатель $s$ играет роль «размерности» метрического пространства $(X,d)$ в аналогах классических соболевских теорем вложения, получаемых для пространств $M^1_p$.

В случае меры, удовлетворяющей условию удвоения, свойства суммируемых функций во многом похожи на соответствующие свойства, выполняющиеся в евклидовом случае относительно меры Лебега: максимальный оператор Харди — Литтлвуда ограничен в пространствах Лебега $L_p(X,\mu)$ при $p>1$, верна теорема Лебега о дифференцировании интеграла, почти все точки области определения локально суммируемой функции являются ее точками Лебега [10].

Всюду далее будем предполагать, что мера $\mu$ удовлетворяет условию удвоения, $s$-регулярна и $s>1$.

Из всего многообразия результатов, связанных с функциональными классами соболевского типа, нас в первую очередь будут интересовать аналоги соболевских теорем вложения. Пока ограничимся формулировкой двух утверждений, результаты которых использованы в разд. 3.

**Лемма 2.1.** *Пусть* $1<p<\infty$. *Тогда оператор вложения* $I: M_p^1(X,d,\mu)\to L_q(X,\mu)$ *компактен при*

1) $1\le q<\frac{ps}{s-p}$, *если* $p<s$;
2) $1\le q<\infty$, *если* $p=s$;
3) $1\le q\le\infty$, *если* $p>s$.

Первые два пункта являются следствием результатов из [2, 3], доказательство третьего приведено в [11]. Утверждения леммы имеют весьма универсальный характер, они не зависят от конкретной природы метрического пространства и полностью определяются показателем регулярности $s$, характеризующим взаимосвязь меры и метрики.

Для произвольного значения $\gamma\in(0,1)$ в неравенстве (2.1) можно заменить $d(x,y)$ на $(d(x,y))^\gamma$ и ввести гёльдеровы классы $M_p^\gamma(X,d,\mu)$. Однако в данном случае вместо рассмотрения гёльдеровых классов относительно исходной метрики удобнее определить их как классы функций с «единичной» гладкостью относительно гёльдеровой метрики, определяемой равенством

$$d_\gamma(x,y)=(d(x,y))^\gamma.$$

Для получения теоремы вложения пространства $M_p^1(X,d\gamma,\mu)$ в пространства Лебега достаточно пересчитать показатель регулярности меры $\mu$ относительно гёльдеровой метрики $d_\gamma$ и воспользоваться леммой 2.1.

Следующее утверждение является внутренней теоремой вложения в шкале пространств $M_p^1$ и показывает взаимосвязь между классами функций, определяемыми различными метриками [11].

**Лемма 2.2.** *Пусть* $1<p<\infty$, $0<\gamma<1$. *Тогда оператор вложения* $I: M_p^1(X,d,\mu)\to M_r^1(X,d_\gamma,\mu)$ *компактен при*

1) $1\le r<\frac{ps}{s-(1-\gamma)p}$, *если* $(1-\gamma)p<s$;
2) $1\le r<\infty$, *если* $(1-\gamma)p=s$;
3) $1\le r\le\infty$, *если* $(1-\gamma)p>s$.

Заметим, что из п. 3 следует гёльдеровость функции, понимаемая в обычном смысле, т. е. $|u(x)-u(y)|\le C(d(x,y))^\gamma$.

Поскольку при $\gamma=0$ получаем тривиальную метрику $d_0(x,y)=1$ для $x\ne y$, то $M_p^1(X,d_0,\mu)=L_p(\mu)$. Непосредственно из формулировок видно, что утверждение леммы 2.1 соответствует предельному случаю леммы 2.2. Очевидно, что пересчет показателя регулярности меры относительно метрики $d_\gamma$ и лемма 2.2 позволяют получить условия вложения пространства $M_{r_1}^1(X,d_{\gamma_1},\mu)$ в пространство $M_{r_2}^1(X,d_{\gamma_2},\mu)$ при $\gamma_2<\gamma_1$.

## 3. Функции соболевского типа с переменным показателем суммируемости

Используя результаты разд. 2, определим классы функций соболевского типа с переменным показателем суммируемости.

Для функции $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим через $D(u)$ множество всех допустимых функций, удовлетворяющих неравенству (2.1), и положим $D_{p(\cdot)}(u) = D(u) \cap L_{p(\cdot)}(X, \mu)$.

При $p(x) \in \mathscr{P}$ пространство соболевского типа с переменным показателем суммируемости $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ определим условием

$$M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu) = \{u \in L_{p(\cdot)}(X, \mu) \mid D_{p(\cdot)}(u) \neq \varnothing\},$$

а норму — равенством

$$\|u\|_{1,p(\cdot)} = \|u \mid M^1_{p(\cdot)}\| = \|u\|_{p(\cdot)} + \inf_{g \in D_{p(\cdot)}(u)} \|g\|_{p(\cdot)}. \tag{3.1}$$

Пространство $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ банахово. При учете полноты пространства Лебега $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ доказательство этого факта может быть получено практически дословным повторением соответствующего доказательства из [2].

Отметим, что из непрерывности вложения пространства Лебега $L_{q(\cdot)}(X, \mu)$ в пространство $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ при $1 < p(x) \leq q(x) < \infty$ непосредственно следует непрерывность вложения пространства $M^1_{q(\cdot)}(X, d, \mu)$ в $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$.

Пространства $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ можно считать естественным обобщением пространств Соболева с переменным показателем суммируемости, определенных в областях евклидова пространства.

На евклидовом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ при достаточно регулярном показателе суммируемости $p(x) \in \mathscr{P}$ максимальный оператор Харди — Литтлвуда ограничен в пространстве $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ [8, 9]. Если $u \in M^1_{p(\cdot)}(B, |*|, m_n)$, где $|*|$ — евклидова метрика, $m_n$ — мера Лебега, то $u \in M^1_{p_-}(B, |*|, m_n)$, при этом, как уже отмечено в разд. 2, $u \in M^1_{p_-}(B, |*|, m_n) = W^1_{p_-}(B)$ [2]. Поэтому функция $u$ имеет первые обобщенные производные и согласно [2] из неравенства (2.1) следует оценка

$$\left| \int_B \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dm_n \right| \leq \int_B |\varphi| M(g) \, dm_n,$$

выполняющаяся для произвольной функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Учитывая рефлексивность пространства $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$, плотность пространства $C_0^\infty(B)$ в пространстве $L_{p'(\cdot)}(X, \mu)$ [1] и ограниченность максимального оператора, получаем $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_{p(\cdot)}(X, \mu)$. Следовательно, $u \in W^1_{p(\cdot)}(B)$.

Если $u \in W^1_{p(\cdot)}(B)$, то $u \in W^1_{p_-}(B)$ и согласно [2] для почти всех точек $x, y \in B$ выполняется оценка

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(M(|\nabla u|)(x) + M(|\nabla u|)(y)).$$

Поэтому из ограниченности максимального оператора в $L_{p(\cdot)}(X, \mu)$ следует, что $u \in M^1_{p(\cdot)}(B, |*|, m_n)$. Таким образом,

$$M^1_{p(\cdot)}(B, |*|, m_n) = W^1_{p(\cdot)}(B).$$

В силу ограниченности диаметра множества $X$ и конечности меры $\mu$ липшицевы функции принадлежат пространству $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ при всех показателях $p \in \mathscr{P}$. Более того, небольшая модификация основанного на срезке функции доказательства из [1] позволяет показать плотность липшицевых функций в пространстве $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$.

**Теорема 3.1.** *Пусть $p(x) \in \mathscr{P}$ и $u \in M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая липшицева функция $h$, что*

1) $\mu(\{x \in X \mid u(x) \neq h(x)\}) < \varepsilon$;

2) $\|u - h\|_{1,p(\cdot)} < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $u \in M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ и $g \in D_{p(\cdot)}(u)$. Рассмотрим множества

$$E_{u,\lambda} = \{x \in X \mid |u| \geq \lambda\}, \quad E_{g,\lambda} = \{x \in X \mid |g| \geq \lambda\},$$

$$E_\lambda = E_{u,\lambda} \cup E_{g,\lambda}, \quad D_\lambda = X \setminus E_\lambda.$$

Функция $u_\lambda = u|_{D_\lambda}$ липшицева на множестве $D_\lambda$ и может быть продолжена на все $X$ до липшицевой функции $\bar{u}$ без увеличения постоянной Липшица [12], т. е.

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(x)| \leq 2\lambda\, d(x, y).$$

Рассмотрим срезку функции $\bar{u}$, полагая

$$h_\lambda = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \bar{u} \geq \lambda, \\ \bar{u}, & \text{если } |\bar{u}| < \lambda, \\ -\lambda, & \text{если } \bar{u} \leq -\lambda. \end{cases}$$

Функция $h_\lambda$ липшицева, $|h_\lambda| \leq \lambda$ и $h_\lambda(x) = u(x)$ при $x \in D_\lambda$. Согласно следствию 1.2 при $\lambda \to +\infty$

$$\mu(X \setminus D_\lambda) = \mu(E_\lambda) \leq \mu(E_{u,\lambda}) + \mu(E_{g,\lambda}) \to 0,$$

поэтому остается показать, что $\|u - h_\lambda\|_{1,p(\cdot)} \to 0$.

Учитывая ограниченность показателя $p(x)$, абсолютную непрерывность интеграла и следствие 1.2, получаем

$$\rho_{p(\cdot)}(u - h_\lambda) \leq \int\limits_{E_\lambda} |u(x) - h_\lambda(x)|^{p(x)}\, d\mu$$
$$\leq C\biggl(\int\limits_{E_\lambda} |u(x)|^{p(x)}\, d\mu + \int\limits_{E_{u,\lambda}} \lambda^{p(x)}\, d\mu + \int\limits_{E_{g,\lambda}} \lambda^{p(x)}\, d\mu\biggr) \to 0.$$

При этом $\|u - h_\lambda\|_{p(\cdot)} \to 0$ согласно следствию 1.1.

Рассмотрим функцию $v(x) = u(x) - h_\lambda(x)$ и найдем для нее допустимую функцию $g_\lambda$. Если $x, y \in D_\lambda$, то

$$v(x) - v(y) = 0;$$

если $x, y \in E_\lambda$, то

$$|v(x) - v(y)| \leq |u(x) - u(y)| + |h_\lambda(x) - h_\lambda(y) \leq d(x, y)(g(x) + g(y) + 2\lambda);$$

если $x \in D_\lambda, y \in E_\lambda$, то

$$|v(x) - v(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y) + 2\lambda) \leq d(x, y)(g(y) + 3\lambda).$$

Таким образом, в качестве допустимой можно выбрать функцию

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D_\lambda, \\ g(x) + 3\lambda, & \text{если } x \in E_\lambda. \end{cases}$$

Из следствия 1.2 получаем $\|g_\lambda\|_{p(\cdot)} \to 0$, а значит, и $\|u - h_\lambda\|_{1,p(\cdot)} \to 0$. Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно так выбрать значение $\lambda$, что будут выполняться все утверждения теоремы.

Далее нас в первую очередь будут интересовать теоремы вложения. В евклидовом случае на шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ при постоянном показателе суммируемости $p(x) \equiv p < n$ пространство Соболева $W^1_p(B)$ непрерывно вложено в пространство Лебега $L_q(B)$, где $q = \frac{pn}{n-p}$. Хотелось бы иметь аналогичный результат и в случае переменного показателе суммируемости, полагая $q(x) = \frac{p(x)n}{n-p(x)}$. Однако свойства функциональных пространств $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ существенным образом зависят от свойств показателя $p(x)$. В частности, в [1] построен пример, показывающий, что даже для ступенчатой функции $p(x)$, принимающей всего два различных значения на связных открытых подмножествах шара $B$, пространство Соболева $W^1_{p(\cdot)}(B)$ может содержать функцию, которая не принадлежит пространству Лебега $L_{q(\cdot)}(B)$.

При этом, предполагая непрерывность функции $p(x)$ и используя результаты разд. 2, можно довольно просто получить аналоги теорем вложения, доказанных в [1].

Метрическое пространство $(X, d)$ с заданной на нем мерой $\mu$ будем называть *локально $s$-регулярным*, если сужение меры $\mu$ на всякий шар $B \subset X$ оказывается $s$-регулярной мерой.

При $1 < p(x) < s$ положим $q(x) = \frac{p(x)s}{s-p(x)}$.

**Теорема 3.2.** *Пусть компактное метрическое пространство $(X, d)$ с удовлетворяющей условию удвоения мерой $\mu$ локально $s$-регулярно, показатель $p(x)$ непрерывен и $1 < p_- \leq p(x) \leq p^+ < s$. Тогда для всякого $\varepsilon \in (0, (s-1)^{-1})$ и произвольной функции $r(x)$, удовлетворяющей оценке $1 \leq r(x) \leq q(x) - \varepsilon$, оператор вложения $I : M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu) \to L_{r(\cdot)}(X, \mu)$ компактен.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и функцию $r(x)$, удовлетворяющую условию теоремы. Поскольку $p^+ < s$, то $|q(x) - q(y)| \leq L|p(x) - p(y)|$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/2L$. Непрерывная на компактном пространстве функция $p(x)$ равномерно непрерывна. Поэтому множество $X$ можно покрыть конечным семейством шаров $\{B_k\}$ таких, что $|p(x) - p(y)| < \varepsilon_1$ для всех $x, y \in B_k$.

Положим $p_{(k,-)} = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in B_k} p(x)$ и $q_k = \frac{sp_{(k,-)}}{s-p_{(k,-)}}$, тогда $r(x) \leq q(x) - \varepsilon \leq q_k - \varepsilon/2$ для всех $x \in B_k$.

Пространство $M^1_{p(\cdot)}(B_k, d, \mu)$ непрерывно вложено в $M^1_{p_{(k,-)}}(B_k, d, \mu)$, которое, в свою очередь, согласно лемме 2.1 компактно вложено в $L_\omega(B_k, \mu)$ при всех значениях $\omega$, удовлетворяющих неравенству $q_k - \varepsilon/2 \leq \omega < q_k$. При этом пространство $L_\omega(B_k, \mu)$ непрерывно вложено в $L_{r(\cdot)}(B_k, \mu)$. Следовательно, оператор вложения $I : M^1_{p(\cdot)}(B_k, d, \mu) \to L_{r(\cdot)}(B_k, \mu)$ компактен как композиция компактного и непрерывных операторов.

Поскольку семейство шаров $\{B_k\}$ конечно, пространство $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ вложено в $L_{r(\cdot)}(X, \mu)$ и из всякого ограниченного в $M^1_{p(\cdot)}(X, d, \mu)$ множества функций можно выбрать последовательность функций $\{u_n\}$, сужения которых на каждом шаре $B_k$ будут образовывать фундаментальную последовательность в соответствующем пространстве $L_{r(\cdot)}(B_k, \mu)$. Согласно следствию 1.1

$$\int\limits_{B_k} |u_n(x) - u_m(x)|^{r(x)}\, d\mu \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty,$$

$$\rho_{r(\cdot)}(u_n - u_m) = \int\limits_X |u_n(x) - u_m(x)|^{r(x)}\, d\mu$$
$$\le \sum_k \int\limits_{B_k} |u_n(x) - u_m(x)|^{r(x)}\, d\mu \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty.$$

В силу этого же следствия 1.1 получаем $\|u_n - u_m\|_{X,r(\cdot)} \to 0$, т. е. последовательность функций $\{u_n\}$ фундаментальна в пространстве $L_{r(\cdot)}(X,\mu)$, что и завершает доказательство компактности оператора вложения.

Как и при постоянном показателе суммируемости, можем в данном случае рассмотреть вложение в пространства соболевского типа, определяемые гёльдеровой метрикой $d_\gamma$. При $0 < \gamma < 1$ и $(1-\gamma)p(x) < s$ положим

$$q_\gamma(x) = \frac{p(x)s}{s - (1-\gamma)p(x)}.$$

**Теорема 3.3.** *Пусть компактное метрическое пространство $(X,d)$ с удовлетворяющей условию удвоения мерой $\mu$ локально $s$-регулярно, $0 < \gamma < 1$, показатель $p(x)$ непрерывен и $1 < p_- \le p(x) \le p^+ < s/(1-\gamma)$. Тогда для всякого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-\gamma}{s-1+\gamma}\right)$ и произвольной функции $r(x)$, удовлетворяющей оценке $1 \le r(x) \le q_\gamma(x) - \varepsilon$, оператор вложения $I : M^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu) \to M^1_{r(\cdot)}(X,d_\gamma,\mu)$ компактен.*

С учетом леммы 2.2 доказательство данного утверждения практически ничем не отличается от доказательства теоремы 3.2. Все изменения сводятся к формальной замене $q(x)$ на $q_\gamma(x)$, пространства $L_{r(\cdot)}(B_k,\mu)$ пространством $M^1_{r(\cdot)}(B_k, d_\gamma\mu)$ и проверке фундаментальности в пространстве $L_{r(\cdot)}(X,\mu)$ последовательности допустимых функций $\{g_{\gamma,n}\}$ таких, что

$$|u_n(x) - u_n(y)| \le (d(x,y))^\gamma (g_{\gamma,n}(x) + g_{\gamma,n}(y)).$$

Для функциональных классов соболевского типа размерность области определения (в нашем случае $s$ — показатель регулярности меры $\mu$) разделяет различные типы теорем вложения. При показателях суммируемости, меньших $s$, получаем вложения в пространства Лебега, а при показателях, больших $s$, — вложения в пространства непрерывных функций. При этом для переменных показателей суммируемости рассматриваются две ситуации: либо $p(x) \le s - \varepsilon$ для всех $x \in X$, либо всюду $p(x) \ge s + \varepsilon$.

**Теорема 3.4.** *Рассмотрим метрическое пространство $(X,d)$ с удовлетворяющей условию удвоения $s$-регулярной мерой $\mu$. Если $p(x) \in \mathscr{P}$ и $s < p_-$, то для всякой функции $u \in M^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$ существует эквивалентная ей функция $\tilde u$, удовлетворяющая условию Гёльдера $|\tilde u(x) - \tilde u(y)| \le C(d(x,y))^\gamma$, где $0 < \gamma < 1 - \frac{s}{p_-}$. При этом оператор вложения $I : M^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu) \to C^\gamma(X,d)$ компактен.*

Пространство $M^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в $M^1_{p_-}(X,d,\mu)$, которое согласно п. 3 леммы 2.2 компактно вложено в $M^1_\infty(X,d_\gamma,\mu)$. Следовательно, существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(X \setminus E) = 0$ и для всех точек $x, y \in E$ выполняется неравенство $|u(x) - u(y)| \le C(d(x,y))^\gamma$. Функцию $u|_E$ можно продолжить по непрерывности во все предельные точки множества $E$ с сохранением гёльдеровой оценки. Остается заметить, что множество $E$ содержит все изолированные точки, поскольку из условия $s$-регулярности меры $\mu$ следует, что мера изолированной точки должна быть положительной.

В теореме 3.4 никак не используются локальные свойства функции $p(x)$, а единый для всего пространства показатель гёльдеровости $\gamma$ определяется значением $p_-$. При этом в окрестности конкретной точки показатель гёльдеровости может быть большим.

## 4. Функции соболевского типа с липшицевым показателем суммируемости

При изучении функциональных классов соболевского типа с постоянным показателем суммируемости на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, важную роль играет ограниченность максимального оператора Харди — Литтлвуда в пространствах Лебега при $p > 1$.

Для среднего значения функции $f$ на множестве $E \subset X$ будем использовать обозначения
$$f_E = \fint_E f\,d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu,$$
а максимальный оператор определим равенством
$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} f\,d\mu.$$

В случае переменного показателя суммируемости решение вопроса об ограниченности максимального оператора существенно зависит от свойств функции $p(x)$. Ограничимся рассмотрением липшицевых функций $p(x)$, поскольку именно для таких показателей суммируемости планируем получить теоремы вложения. При $p_- > 1$ выполнение для меры $\mu$ условия удвоения и липшицевость показателя суммируемости обеспечивают ограниченность максимального оператора [8, 9], т. е.
$$\|M(f)\|_{p(\cdot)} \le C\|f\|_{p(\cdot)}.$$

При изучении функций с «дробной гладкостью» удобно использовать «уточненные максимальные функции», полагая по определению при $0 < \gamma \le 1$
$$f_\gamma^{\#}(x) = \sup_{r>0} r^{-\gamma} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\,d\mu.$$

В [13] показано, что для всех точек Лебега локально суммируемой функции $f : X \to R$ выполняется оценка
$$|f(x) - f(y)| \le C(d(x,y))^\gamma \big(f_\gamma^{\#}(x) + f_\gamma^{\#}(y)\big). \tag{4.1}$$

Оценка для приращения функции позволяет по аналогии с [13] получить различные описания для пространств соболевского типа $M^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$.

**Лемма 4.1.** *Пусть мера $\mu$ удовлетворяет условию удвоения, а показатель $p(x)$ липшицев и $1 < p_- \le p(x) \le p^+ < \infty$. Тогда для функции $u \in L_{p(\cdot)}(X,\mu)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$u \in M^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$, т. е. существует такая функция $g \in L_{p(\cdot)}(X,\mu)$, что для почти всех $x, y \in X$*
$$|u(x) - u(y)| \le d(x,y)(g(x) + g(y)); \tag{4.2}$$

2) *существует такая функция* $h \in L_{p(\cdot)}(X,\mu)$, *что неравенство Пуанкаре*

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \leq \quad r \fint_{B(x,r)} h\, d\mu \tag{4.3}$$

*выполняется для произвольных* $x \in X$ *и* $r > 0$;

3) $u_1^{\#} \in L_{p(\cdot)}(X,\mu)$.

*При этом*

$$\big\|u_1^{\#}\big\|_{p(\cdot)} \leq C_1 \inf_{h\in H(u)} \|h\|_{p(\cdot)} \leq C_2 \inf_{g\in D_{p(\cdot)}(u)} \|g\|_{p(\cdot)} \leq C_3 \big\|u_1^{\#}\big\|_{p(\cdot)}, \tag{4.4}$$

*где через* $H(u)$ *обозначено семейство функций* $h$, *удовлетворяющих неравенству Пуанкаре* (4.3).

Неравенство (4.3) получается двукратным интегрированием неравенства (4.2) по шару $B(x,r)$, п. 3 является следствием неравенства Пуанкаре и ограниченности максимального оператора, в свою очередь, п. 1 является следствием п. 3 и оценки (4.1).

Нам понадобится оценка нормы характеристической функции шара в пространстве $L_{p(\cdot)}(X,\mu)$.

**Лемма 4.2.** *Пусть* $s$*-регулярная мера* $\mu$ *удовлетворяет условию удвоения, а показатель* $p(x) \in \mathscr{P}$ *и липшицев. Тогда существует такая постоянная* $C_0 < \infty$, *что для характеристической функции произвольного шара* $B(x,r) \subset X$ *выполняется оценка*

$$\|\chi_{B(x,r)}\|_{p(\cdot)} \leq C_0[\mu(B(x,r))]^{1/p(x)}.$$

Положим $p(y) - p(x) = \Delta(x,y)$. Тогда

$$\int_X \left(\frac{\chi_{B(x,r)}}{[\mu(B(x,r))]^{1/p(x)}}\right)^{p(y)} d\mu(y) = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{[\mu(B(x,r))]^{\Delta(x,y)/p(x)}}.$$

Поскольку показатель суммируемости липшицев, для всех точек $y \in B(x,r)$ выполняется оценка

$$-Lr \leq \Delta(x,y) \leq Lr,$$

а в силу $s$-регулярности меры

$$br^s \leq \mu(B(x,r)) \leq \mu(X) < \infty.$$

Учитывая конечность диаметра множества $X$ и предел $\lim\limits_{r\to+0} r^r = 1$, получаем

$$\frac{1}{[\mu(B(x,r))]^{\Delta(x,y)/p(x)}} \leq C < \infty,$$

где постоянная $C$ не зависит от точки $x$. Считая $C \geq 1$, положим $C_0 = C^{1/p_-}$. Тогда

$$\int_X \left(\frac{\chi_{B(x,r)}}{[C_0\mu(B(x,r))]^{1/p(x)}}\right)^{p(y)} d\mu(y)$$

$$= \frac{1}{C\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{[\mu(B(x,r))]^{\Delta(x,y)/p(x)}} \leq 1,$$

следовательно, $\|\chi_{B(x,r)}\|_{p(\cdot)} \le C_0[\mu(B(x,r))]^{1/p(x)}$.

Можно доказать теорему вложения для пространств соболевского типа с липшицевым показателем суммируемости.

В данном случае будет удобнее рассматривать классы функций с полунормой, которые определим условием

$$S^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu) = \{u : X \to R \mid u \in L_1(X,\mu),\ D_{p(\cdot)}(u) \ne \varnothing\},$$

а полунорму определим равенством

$$\left\| u \mid S^1_{p(\cdot)} \right\| = \inf_{g \in D_{p(\cdot)}(u)} \|g\|_{p(\cdot)}.$$

При $p(x) \in \mathscr{P}$ пространства $S^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$ и $M^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$ совпадают как множества функций. Действительно, если функция $u$ принадлежит пространству $S^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$, то, фиксируя точку $y_0 \in X$, в которой $|u(y_0)| < \infty$ и $g(y_0) < \infty$, приходим к неравенству

$$|u(x)| \le |u(y_0)| + \operatorname{diam} X (g(x) + g(y_0)),$$

интегрируя которое, с учетом конечности меры получаем $u \in L_{p(\cdot)}(X,\mu)$.

Из леммы 4.1 следует, что пространство $S^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$ допускает описание в терминах выполнения неравенства Пуанкаре и в терминах уточненных максимальных функций, при этом соответствующие нормировки оказываются эквивалентными (4.4).

Как и в разд. 3, при $0 < \gamma < 1$ рассмотрим гёльдеровы метрики $d_\gamma$ и определяемые ими полунормированные пространства $S^1_{p(\cdot)}(X,d_\gamma,\mu)$. Следующее утверждение является внутренней теоремой вложения в шкале таких пространств.

**Теорема 4.3.** *Пусть $(X,d)$ — метрическое пространство с $s$-регулярной мерой $\mu$, удовлетворяющей условию удвоения, $0 < \gamma < 1$, а показатель $p(x)$ липшицев и $1 < p_- \le p(x) \le p^+ < s/(1-\gamma)$. Тогда пространство $S^1_{p(\cdot)}(X,d,\mu)$ непрерывно вложено в пространство $S^1_{q(\cdot)}(X,d_\gamma,\mu)$, где $q(x) = \frac{sp(x)}{s-(1-\gamma)p(x)}$.*

Доказательство. Согласно неравенству (4.1) для доказательства принадлежности функции $u$ пространству $S^1_{q(\cdot)}(X,d_\gamma,\mu)$ достаточно показать, что $u^\#_\gamma \in L_{q(\cdot)}(X,\mu)$. Для постоянной функции результат очевиден, поскольку $u^\#_\gamma(x) \equiv 0$, если же функция $u$ отлична от постоянной, то $u^\#_\gamma(x) > 0$ для всех $x \in X$.

Положим $u^\#_\gamma(x) = \lambda$ и рассмотрим такой шар $B(x,r)$, что

$$r^{-\gamma} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \ge \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\lambda}{2} r^{\gamma-1} \le r^{-1} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \le u^\#_1(x).$$

С другой стороны, используя неравенство Пуанкаре (4.3), неравенство Гёльдера (1.4), лемму 4.2 и $s$-регулярность меры, получаем

$$\frac{\lambda}{2} \le r^{-\gamma} \fint\limits_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \le r^{1-\gamma} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} h\, d\mu$$
$$\le C r^{1-\gamma} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \|h\|_{p(\cdot)} \cdot \|\chi_{B(x,r)}\|_{p'(\cdot)} \le C_1 r^{1-\gamma} [\mu(B(x,r)]^{-1/p(x)} \|h\|_{p(\cdot)}$$
$$\le C_2 \|h\|_{p(\cdot)} r^{-s/q(x)}.$$

Следовательно,

$$r^{1-\gamma} \ge \left( \frac{C_3 \lambda}{\|h\|_{p(\cdot)}} \right)^{\frac{(1-\gamma) q(x)}{s}} = \left( \frac{C_3 \lambda}{\|h\|_{p(\cdot)}} \right)^{\frac{q(x)}{p(x)} - 1},$$

$$\frac{\lambda}{2} \left( \frac{C_3 \lambda}{\|h\|_{p(\cdot)}} \right)^{\frac{q(x)}{p(x)} - 1} \le \frac{\lambda}{2} r^{\gamma - 1} \le u_1^{\#}(x).$$

Последняя оценка эквивалентна неравенству

$$\left[u_\gamma^{\#}(x)\right]^{q(x)} = \lambda^{q(x)} \le C_4 \|h\|_{p(\cdot)}^{(q(x)-p(x))} \left[u_1^{\#}(x)\right]^{p(x)}.$$

Учитывая соотношение (4.4), выберем такую функцию $h$, что ее норма оценивается через норму уточненной максимальной функции $u_1^{\#}$. Используя ограниченность показателя $q(x)$ и неравенство (1.1), получаем

$$\int\limits_X \left( \frac{u_\gamma^{\#}(x)}{\left\|u_1^{\#}\right\|_{p(\cdot)}} \right)^{q(x)} d\mu \le \int\limits_X \frac{C_4 \|h\|_{p(\cdot)}^{(q(x)-p(x))} \left[u_1^{\#}(x)\right]^{p(x)}}{\left\|u_1^{\#}\right\|_{p(\cdot)}^{q(x)}}\, d\mu$$
$$\le C_5 \int\limits_X \left( \frac{u_1^{\#}}{\left\|u_1^{\#}\right\|_{p(\cdot)}} \right)^{p(x)} d\mu \le C_5.$$

Непосредственно из определения нормы вытекает оценка, доказывающая непрерывность оператора вложения:

$$\left\|u_\gamma^{\#}\right\|_{q(\cdot)} \le C \left\|u_1^{\#}\right\|_{p(\cdot)} \le C_0 \left\|u \mid S_{p(\cdot)}^1\right\|,$$

где $C = C_5^{1/q_-}$.

**Теорема 4.4.** *Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство с $s$-регулярной мерой $\mu$, удовлетворяющей условию удвоения, а показатель $p(x)$ липшицев и $1 < p_- \le p(x) \le p^+ < s$. Тогда существует такая постоянная $C < \infty$, что для всякой функции $u \in S_{p(\cdot)}^1(X, d, \mu)$*

$$\|u - u_X \mid L_{q(\cdot)}\| \le C \left\|u \mid S_{p(\cdot)}^1\right\|,$$

*где $q(x) = \frac{sp(x)}{s - p(x)}$.*

Доказательство. Несколько модифицируем доказательство теоремы 4.3. Положим $u_1^{\#}(x) = \lambda$ и рассмотрим удовлетворяющую неравенству Пуанкаре (4.3) функцию $h$, норма которой допускает двустороннюю оценку через норму уточненной максимальной функции $u_1^{\#}$. Существование такой функции является следствием соотношения (4.4). Для постоянной функции утверждение теоремы очевидно, поэтому можно считать, что $u \neq \mathrm{const}$. Тогда $u_1^{\#}(x) > 0$ всюду и $u_1^{\#}(x) < \infty$ почти всюду. Пусть точка $x \in X$ является точкой Лебега функции $u$ и $u_1^{\#}(x) < \infty$. Поскольку мера $\mu$ удовлетворяет условию удвоения, таковыми являются почти все точки множества $X$. Положим $r_k = \frac{\operatorname{diam} X}{2^k}$, тогда

$$|u(x) - u_X| = \lim_{k\to\infty} |u_X - u_{B(x,r_k)}| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} (u_{B(x,r_k)} - u_{B(x,r_{k+1})})\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(B(x,r_k))}{\mu(B(x,r_{k+1}))} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu \leq C_d \sum_{k=0}^{\infty} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu. \tag{4.5}$$

Возможны два случая: 1) $\big(\frac{\|h\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\big)^{p(x)/s} \geq \operatorname{diam} X$; 2) $\big(\frac{\|h\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\big)^{p(x)/s} < \operatorname{diam} X$.

В первом случае получаем

$$|u(x) - u_X| \leq C_d \sum_{k=0}^{\infty} r_k \Bigg(r_k^{-1} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu\Bigg)$$
$$\leq C_1 \lambda \cdot \operatorname{diam} X \leq C_1 \|h\|_{p(\cdot)}^{p(x)/s} \lambda^{(1-p(x)/s)} = C_1 \|h\|_{p(\cdot)}^{(1-p(x)/q(x))} u_1^{\#}(x)^{p(x)/q(x)}. \tag{4.6}$$

Во втором случае разобьем в оценке (4.5) сумму на две части:

$$|u(x) - u_X| \leq C_d \Bigg(\sum_{k=0}^{n_0} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu + \sum_{n_0+1}^{\infty} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu\Bigg),$$

где $n_0$ таково, что $r_{n_0} \leq \big(\frac{\|h\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\big)^{p(x)/s} < 2r_{n_0}$.

Используя неравенство Пуанкаре, неравенство Гёльдера, лемму 4.2 и учитывая $s$-регулярность меры $\mu$, получаем

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, d\mu \leq \frac{r}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} h\, d\mu$$
$$\leq C_1 \frac{r}{\mu(B(x,r))} \|h\|_{p(\cdot)} \cdot \|\chi_{B(x,r)}\|_{p'(\cdot)} \leq C_2 r [\mu(B(x,r)]^{-1/p(x)} \|h\|_{p(\cdot)}$$
$$\leq C_3 \|h\|_{p(\cdot)} r^{-s/q(x)}.$$

Для первой суммы имеем

$$\sum_{k=0}^{n_0} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu \leq C_3 \|h\|_{p(\cdot)} \sum_{k=0}^{n_0} r_k^{-s/q(x)} \leq C_4 \|h\|_{p(\cdot)}\, r_{n_0}^{-s/q(x)}$$
$$\leq C_5 \|h\|_{p(\cdot)} \bigg(\frac{\|h\|_{p(\cdot)}}{\lambda}\bigg)^{-p(x)/q(x)} = C_5 \|h\|_{p(\cdot)}^{(1-p(x)/q(x))}\, u_1^{\#}(x)^{p(x)/q(x)}. \tag{4.7}$$

Оценка для второй суммы получается аналогично неравенству (4.6):

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} r_k \Bigg(r_k^{-1} \fint_{B(x,r_k)} |u - u_{B(x,r_k)}|\, d\mu\Bigg)$$
$$\leq C_6 \lambda \cdot r_{n_0} \leq C_7 \|h\|_{p(\cdot)}^{p(x)/s} \lambda^{(1-p(x)/s)} = C_7 \|h\|_{p(\cdot)}^{(1-p(x)/q(x))}\, u_1^{\#}(x)^{p(x)/q(x)}. \tag{4.8}$$

Согласно оценкам (4.6)–(4.8) получаем

$$|u(x) - u_X|^{q(x)} \leq C_0 \|h\|_{p(\cdot)}^{(q(x)-p(x))} \left[u_1^{\#}(x)\right]^{p(x)}.$$

Утверждение теоремы следует из последнего неравенства и практически дословного повторения завершающей части доказательства теоремы 4.3. Таким образом,

$$\|u - u_X \mid L_{q(\cdot)}\| \leq C \big\| u \mid S^1_{p(\cdot)} \big\|.$$

Утверждение теоремы 4.4 вполне аналогично классическому результату о непрерывном вложении пространств Соболева в пространства Лебега. Наличие леммы 4.2 и ограниченность максимального оператора позволяют при доказательстве теорем 4.3 и 4.4 использовать методы, аналогичные ранее применявшимся для случая постоянного показателя суммируемости в [14]. В свою очередь, в доказательстве леммы 4.2 используется липшицевость функции $p(x)$. Возможно, утверждения теорем 4.3 и 4.4 остаются верными и при более слабых условиях на показатель суммируемости, но это требует специального изучения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Kovacik O., Rákosnik J.* In spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czech. Math. J. 1991. V. 41, N 4. P. 592–618.
2. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
3. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincare. Providence, RI: Amer Math. Soc., 2000. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 145, N 688).
4. *Hajlasz P., Martio O.* Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains // J. Funct. Anal. 1997. V. 143. P. 221–246.
5. *Романов А. С.* О следах соболевских функций на границе пика с гёльдеровой особенностью // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 176–184.
6. *Edmunds D., Rákosnik J.* Sobolev embeddings with variable exponent // Stud. Math. 2000. V. 143, N 3. P. 267–293.
7. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.
8. *Harjulehto P., Hästö P., Pere M.* Variable exponent Lebesgue spaces on metric spaces: The Hardy–Littlewood maximal operator // Real Anal. Exch. 2004/2005. V. 30, N 1. P. 87–104.
9. *Adamowicz T., Harjulehto P., Hästö P.* Maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces // http://www.helsinki.fi/pharjule/varsob/pdf/maximal-submitted.pdf). (Received by the editors 14.12.2012). 13 P.
10. *Strömberg J. O., Torchinsky A.* Weighted Hardy spaces. Berlin, etc.: Springer-Verl., 1989. (Lect. Notes Math.; V. 1381).
11. *Романов А. С.* О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 848–866.
12. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
13. *Hajlasz P., Kinnunen J.* Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoam. 1998. V. 14, N 3. P. 601–622.
14. *Романов А. С.* О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931–937.


*Статья поступила 1 апреля 2013 г.*

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru