Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 517.977

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Станжицкий, Е. А. Самойленко

Аннотация. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах их правых частей и критерия качества получены достаточные условия существования оптимального управления с использованием методов компактности. Рассмотрены задачи на конечном интервале времени и на полуоси.

Ключевые слова: оптимальное управление, теоремы существования оптимального управления, момент выхода, минимизирующая последовательность.

Введение

В работе рассматриваются следующие задачи оптимального управления системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

одна — на конечном временном интервале с критерием качества

$$J(u) = \int_0^\tau L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{2}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in D$, D — некоторая область в $\mathbb{R}^d$, τ — момент выхода решения $x(t)$ на границу области D, другая — на полуоси с критерием качества

$$J(u) = \int_0^\infty g(t)L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{3}$$

где $t \in [0,\infty)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Отметим, что (1), (2) — задача с фазовым ограничениями $x(t) \in D$, $t \in [0,\tau]$, где $\tau \in [0,T]$, так что это задача с не фиксированным временем.

Более точная постановка задач будет дана ниже.

В статье доказываются теоремы существования оптимального управления для задач (1), (2) и (1), (3) в терминах правых частей системы (1) и функции $L(t,x,u)$ из критерия качества. Ранее подобные задачи рассматривались, например, в [1–5], где есть обширная библиография.

Так, в [1, 5] доказывается существование оптимального управления для задач Майера и Больца на фиксированном промежутке времени без ограничений на управление. Например, в [1] с использованием прямых методов получена теорема существования оптимального управления для системы

$$\dot{x} = u(t)$$

на заданной ограниченной области Q:

$$J(u) = \int_{t_0}^{\tau} L(s, x(s), \dot{x}(s))\, ds + \psi(\tau, x(\tau)) \to \inf,$$

где t_0 — начальный момент времени, τ — момент первого выхода решения системы $x(t)$ на границу области Q.

В [6] доказано существование оптимального управления для задачи (1), (2), но в отличие от нашего случая промежуток времени $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным.

В [7] представлена серия теорем существования оптимального управления для подобных задач. Так, в [7, гл. 9] доказаны теоремы существования оптимального управления для задач Лагранжа и Больца при условии, что решение $x(t)$ лежит в некотором компакте. В нашем случае фазовая переменная принадлежит произвольной области D из $\mathbb{R}^d$. В гл. 11 из [7] данная задача решается при условии слабой компактности критерия качества. Отметим также, что во всех представленных теоремах существования из [7] присутствуют некоторые условия связи правых частей системы и критерия качества, фазовая переменная принадлежит ограниченному множеству, а класс допустимых пар (x, u) замкнут.

В данной работе множество, которому принадлежит фазовый вектор, является произвольной областью, при этом функции, входящие в правую часть системы и в критерий качества, не связаны между собой.

Отметим, что в [7] задачи с бесконечным горизонтом не рассматривались.

Эта ситуация еще недостаточно изучена, по этому поводу отметим работу [8], где есть некоторый обзор результатов в этом направлении. Однако в [8] для получения основного результата (существования оптимального управления на полуоси) предполагаются компактность и выпуклость множества U с выполнением условия Филиппова.

В данной работе эти условия не обязательно выполнены, поскольку множество U не компакт.

Отметим также работу [9], где задачи оптимального управления исследуются методом усреднения. Мы получаем подобные результаты для более общих классов задач.

Робота состоит из введения и двух разделов. В первом рассматривается задача на конечном интервале, во втором — на полуоси.

1. Конечный интервал

1.1. Постановка задачи на конечном интервале. Рассмотрим задачу оптимального управления (1), (2), где $x_0 \in D$ — фиксированный вектор, $t \in [0, T]$, $x \in D$ — фазовый вектор, D — область в $\mathbb{R}^d$, ∂D — ее граница, $\overline{D} = D \cup \partial D$, τ — момент первого выхода решения $x(t)$ на границу области D (в случае, когда решения не выходят на границу области за конечный промежуток времени T, считаем, что $\tau = T$), $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор управления, U — выпуклое замкнутое множество и $0 \in U$, вектор-функция $f_1(t,x)$: $[0,T] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d$ и матрица $f_2(t,x) : [0,T] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ — непрерывные по совокупности переменных функции, для которых выполняется условие: для любых $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$ существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|f_1(t,x)| \le C(1+|x|), \quad \|f_2(t,x)\| \le C(1+|x|). \tag{4}$$

Функции $L(t,x,u)$, $L_x(t,x,u)$ и $L_u(t,x,u)$ непрерывны для любых $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$ и $u \in U$, а также удовлетворяют следующим условиям:

1) существуют такие постоянные $k > 0$ и $p > 1$, что

$$L(t,x,u) \ge k|u|^p \tag{5}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$;

2) существуют такие $K > 0$, $\alpha > 0$, что

$$|L_x(t,x,u)| + |L_u(t,x,u)| \le K(1+|u|^{p-1}+|x|^\alpha) \tag{6}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$;

3) $L(t,x,u)$ выпуклая по u для любых фиксированных $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$.

Управление $u(t)$ считают допустимым, если

(a1) $u(.) \in L_p([0,T])$,

(a2) $u(.) \in U$ при $t \in [0,T]$.

Множество управлений, которые удовлетворяют условиям (a1), (a2), будем называть *допустимым* для задачи (1), (2) и обозначать через V.

1.2. Теорема существования для конечного интервала времени.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *с критерием качества* (2) *выполнены условия п.* 1.1. *Тогда задача* (1), (2) *имеет решение в классе допустимых управлений* V, *т. е. существует оптимальное управление* $u^*(t)$, *минимизирующее критерий качества* (2).

Доказательство. Отметим, что управления $u(t) = u_0 = \text{const}$, $u_0 \in U$, допустимы, тогда в силу (5) решения $x(t)$, которые соответствуют управлению u_0, ограничены при $t \in [0,\tau]$, где τ — момент выхода $x(t)$ на границу области D. Поэтому

$$\int_0^\tau L(t,x(t),u_0)\,dt < \infty.$$

Поскольку критерий качества — неотрицательная величина, существует неотрицательная нижняя грань m значений $J(u)$. Поэтому существует последовательность допустимых управлений $\{u_n(t), n \ge 1\}$ таких, что $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$ монотонно, т. е.

$$J(u_n) = \int_0^{\tau_n} L(t,x_n(t),u_n(t))\,dt \to m \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $x_n(t)$ — решения системы (1), соответствующие управлениям $u_n(t)$, τ_n — моменты выхода решения $x_n(t)$ на границу области D.

Заметим, что для достаточно больших n

$$J(u_n) \le m+1.$$

Не теряя общности, будем считать, что $u_n(s) = 0$ для $\tau_n < s \le T$, когда $\tau_n < T$, а значит, используя условие (5), получим

$$\int_0^{\tau_n} |u_n(t)|^p \, dt = \int_0^T |u_n(t)|^p \, dt \le \frac{m+1}{k}, \quad \|u_n(\cdot)\|_p \le \left(\frac{m+1}{k}\right)^{1/p}. \tag{7}$$

Поэтому можно выбрать подпоследовательность (обозначаемую также через $u_n(t)$), слабо сходящуюся к $u^*(t) \in L_p([0,T])$ и такую, что выполняется условие (7). Тогда согласно лемме Мазура [4, с. 173] существует выпуклая комбинация $b_k(t) = \sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u_i(t)$ элементов $u_i(t) \in U$ ($\alpha_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1$) такая, что в L_p она будет сходиться к u^* при $k \to \infty$. Значит, существует почти всюду сходящаяся на $[0,T]$ по мере Лебега подпоследовательность b_{k_l} такая, что $b_{k_l}(t) \to u^*(t)$, $l \to \infty$, для почти всех t. Поскольку U — выпуклое замкнутое множество, $\sum\limits_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_i(t) \in U$ и $u^*(t) \in U$ для почти всех t.

Рассмотрим теперь последовательность решений $x_n(t)$ системы (1), которые соответствуют последовательности управлений $\{u_n(t),\, n \ge 1\}$. В силу теоремы Каратеодори [10, с. 7] все $x_n(t)$ существуют на отрезке $[0,\tau_n]$, где τ_n — момент выхода $x_n(t)$ на границу области D, и для них справедливо интегральное представление

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t)) u_n(t)] \, ds, \quad t \in [0, \tau_n].$$

Покажем равномерную ограниченность решений x_n при $t \in [0,\tau_n]$. Используя неравенство Гёльдера и условие линейного роста (4), для любого $t \in [0,\tau_n]$ и $q = p/(p-1)$ имеем

$$\begin{aligned}
|x_n(t)|^q &= \left| x_0 + \int_0^t f_1(s, x_n(s)) ds + \int_0^t f_2(s, x_n(s)) u_n(s) \, ds \right|^q \\
&\le 3^{q-1} \left(|x_0|^q + \left| \int_0^t f_1(s, x_n(s)) \, ds \right|^q + \left| \int_0^t f_2(s, x_n(s)) u_n(s) \, ds \right|^q \right) \\
&\le 3^{q-1} \left(|x_0|^q + \left(\int_0^t C(1 + |x_n(s)|) \, ds \right)^q + \left(\int_0^t C(1 + |x_n(s)|) |u_n(s)| \, ds \right)^q \right) \\
&\le 3^{q-1} \left(|x_0|^q + \left(CT + C \int_0^t |x_n(s)| \, ds \right)^q + \left(C \int_0^t |u_n(s)| \, ds \right.\right. \\
&\left.\left. + \int_0^t |x_n(s)| |u_n(s)| \, ds \right)^q \right) \le 3^{q-1} \left(|x_0|^q + 2^{q-1} (CT)^q + \right. \\
&+ 2^{q-1} C^q \left(\int_0^t |x_n(s)| \, ds \right)^q + 2^{q-1} C^q \left(\int_0^t |u_n(s)| \, ds \right)^q
\end{aligned}$$

$$
+ 2^{q-1}C^q\left(\left(\int\limits_0^t |x_n(s)||u_n(s)|\,ds\right)^q\right) \le 6^{q-1}C^q\left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q\right.
$$

$$
+ T^{q/p}\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds + T\left(\int\limits_0^T |u_n(s)|^p\,ds\right)^{q/p}
$$

$$
+ \left.\left(\int\limits_0^T |u_n(s)|^p\,ds\right)^{q/p}\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds\right) \le 6^{q-1}C^q\left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q\right.
$$

$$
\left. + T^{q/p}\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds + T\|u_n\|_p^q + \|u_n\|_p^q\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds\right).
$$

Пусть $M_1 = 6^{q-1}C^q\big(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{C^q} + T^q + T\|u_n\|_p^q\big) = \mathrm{const}$, $M_2 = 6^{q-1}C^q\big(T^{q/p} + \|u_n\|_p^q\big)$. Тогда согласно лемме Гроноулла — Беллмана получим

$$
|x_n(t)|^q \le M_1 e^{M_2 T} = A^q < \infty \tag{8}
$$

при $t \in [0,\tau_n]$. Поскольку решения x_n при $t \in [0,\tau_n]$ равномерно ограничены, $|x_n(\tau_n)| \le A$. Поэтому функции x_n можно продлить на весь промежуток $[0,T]$ следующим образом:

$$
y_n(t) = \begin{cases} x_n(t) & \text{при } t \in [0,\tau_n), \\ x_n(\tau_n) & \text{при } t \in [\tau_n, T]. \end{cases} \tag{9}
$$

Докажем равностепенную непрерывность функций $y_n(t)$ при $t \in [0,T]$.

Из неравенства Гёльдера для любых $s_1, s_2 \in [0,\tau_n]$ таких, что $s_1 < s_2$, имеем

$$
|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(s_1) - x_n(s_2)| = \left|\int\limits_{s_1}^{s_2} [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t)]\,dt\right|
$$

$$
\le \int\limits_{s_1}^{s_2} C(1 + |x_n(t)|)(1 + |u_n(t)|)\,dt = C\int\limits_{s_1}^{s_2} |x_n(t)|\,dt + \int\limits_{s_1}^{s_2} |u_n(t)|\,dt
$$

$$
+ \int\limits_{s_1}^{s_2} |x_n(t)||u_n(t)|\,dt \le C\left((s_2 - s_1) + \int\limits_{s_1}^{s_2} |x_n(t)|\,dt + \int\limits_{s_1}^{s_2} |u_n(t)|\,dt\right.
$$

$$
\left. + \int\limits_{s_1}^{s_2} |x_n(t)||u_n(t)|\,dt\right) \le C(s_2 - s_1) + (s_2 - s_1)A + (s_2 - s_1)^{1/q}\|u_n(t)\|_p
$$

$$
+ \|u_n(t)\|_p A(s_2 - s_1)^{1/q} \to 0 \quad \text{при } |s_2 - s_1| \to 0.
$$

Если $s_1 < \tau_n < s_2 < T$, то

$$
|y_n(s_1) - y_n(\tau_n)| = |x_n(s_1) - x_n(\tau_n)| = \left|\int\limits_{s_1}^{\tau_n} [f_1(t, x_n(t)) + f_2(t, x_n(t))u_n(t)]\,dt\right|
$$

$$
\le \int\limits_{s_1}^{\tau_n} C(1 + |x_n(t)|)(1 + |u_n(t)|)\,dt = C\int\limits_{s_1}^{\tau_n} |x_n(t)|\,dt + \int\limits_{s_1}^{\tau_n} |u_n(t)|\,dt
$$

$$+\int_{s_1}^{\tau_n} |x_n(t)\|u_n(t)|\,dt \le C\Bigg((\tau_n - s_1) + \int_{s_1}^{\tau_n} |x_n(t)|\,dt + \int_{s_1}^{\tau_n} |u_n(t)|\,dt$$

$$+\int_{s_1}^{\tau_n} |x_n(t)\|u_n(t)|\,dt\Bigg) \le C(\tau_n - s_1) + (\tau_n - s_1)A + (\tau_n - s_1)^{1/q}\|u_n(t)\|_p$$

$$+\|u_n(t)\|_p A(\tau_n - s_1)^{1/q}) \to 0 \quad \text{при } |s_2 - s_1| \to 0.$$

Если $\tau_n < s_1 < s_2 < T$, то $|y_n(s_1) - y_n(s_2)| = |x_n(\tau_n) - x_n(\tau_n)| = 0$.

Отсюда получаем равностепенную непрерывность функций $y_n(t)$. По теореме Асколи можно выделить подпоследовательность последовательности $\{y_n(t), n \ge 1\}$ (которую также будем обозначать через $\{y_n(t), n \ge 1\}$) такую, что $y_n(t) \to y^*(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на отрезке $[0, T]$.

Обозначим через τ^* момент первого выхода $y^*(t)$ на границу ∂D, т. е.

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] : y^*(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{если } y^*(t) \in D,\ t \in [0,T]; \end{cases}$$

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] : y_n(t) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{если } y_n(t) \in D,\ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Покажем, что $\tau^* \le \varliminf_{n\to\infty} \tau_n$. Предположим, что это не так. Тогда

$$\tau^* > \varliminf_{n\to\infty} \tau_n = \tau.$$

Для любого $\delta > 0$ множество $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau + \delta\}$ бесконечно. Выберем δ так, что $\tau + \delta < \tau^*$. Тогда можно выбрать такую подпоследовательность $\{\tau_{n_k}, n_k \ge 1\}$ последовательности $\{\tau_n, n \ge 1\}$, для которой существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\tau_{n_k} < \tau + \delta$ для любого $n_k \ge N$.

Выберем момент времени t_0 такой, что $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$. Тогда $y_{n_k}(t_0) = x_{n_k}(\tau_{n_k}) \in \partial D$. Ввиду равномерной сходимости $y_n(t)$ к $y^*(t)$ на $[0,T]$ для любого $\epsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n_k \ge N$ выполняется неравенство $|y^*(t) - y_{n_k}(t)| < \epsilon$. Но если выбрать $0 < \epsilon < \inf_{v \in \partial D} |y^*(t_0) - v|$, то $|y^*(t_0) - y_{n_k}(t)| = |y^*(t_0) - x_{n_k}(\tau_{n_k})| > \epsilon$ для фиксированного $t_0 \in (\tau + \delta, \tau^*)$; противоречие. Значит, $\tau^* \le \varliminf_{n\to\infty} \tau_n$.

Положим $x^*(t) = y^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$. Покажем, что $x^*(t)$ является решением системы (1) при $t \in [0, \tau^*]$, которое соответствует управлению $u^*(t)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\tau^* < \varliminf_{n\to\infty} \tau_n$. Тогда множество $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau^*\}$ конечно. Поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{\tau_k, k \ge 0\}$ последовательности $\{\tau_n, n \ge 0\}$ такую, что $\tau_k > \tau^*$ для любого $k > 0$. Для каждого $t \in [0, \tau^*]$ имеем $y_k(t) = x_k(t)$ и $y^*(t) = x^*(t)$. Поскольку $y_k(t) \to y^*(t)$ равномерно по $t \in [0,T]$ при $k \to \infty$, то $x_k(t) \to x^*(t)$ при $k \to \infty$ равномерно по $t \in [0, \tau^*]$.

Так как $x_k(t)$ — решения системы (1), имеем

$$x_k(t) = x_0 + \int_0^t [f_1(s, x_k(s))dt + f_2(s, x_k(s))u_k(s)]\,ds$$

$$= x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x_k(s)) + f_2(s, x_k(s))u^*(s)]\, ds$$

$$+ \int\limits_0^t [f_2(s, x_k(s)) - f_2(s, x^*(s))](u_k(s) - u^*(s))\, ds + \int\limits_0^t f_2(s, x^*(s))[u_k(s) - u^*(s)]\, ds. \tag{10}$$

С учетом (4) и (8) в силу теоремы Лебега второй интеграл стремится к нулю при $k \to \infty$. Сходимость к нулю третьего интеграла следует из (4) и (8) ввиду слабой сходимости $u_k(t)$ к $u^*(t)$ при $k \to \infty$. Аналогично выводим, что первый интеграл стремится к

$$\int\limits_0^t [f_1(s, x^*(s))\, dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds.$$

Предельным переходом в (10) получаем

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x^*(s))\, dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$$

для любого $t \in [0, \tau^*]$.

2. Пусть $\tau^* = \varliminf\limits_{n\to\infty} \tau_n$. Выберем произвольный момент t_2 такой, что $t_2 < \tau^*$. Тогда множество $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < t_2\}$ конечно, а на промежутке (t_2, τ^*) может лежать бесконечное количество τ_n. В этом случае выберем подпоследовательность $\{\tau_k,\, k > 0\}$ последовательности $\{\tau_n,\, n > 0\}$ такую, что $\tau_k \in (t_2, \tau^*)$ для любого $k > 0$. Для каждого $t \in [0, t_2]$ имеем $y_k(t) = x_k(t)$ и $y^*(t) = x^*(t)$. Аналогично случаю 1

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x^*(s))ds + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$$

для любого $t \in [0, t_2]$

Поскольку момент времени t_2 выбран произвольно, а $\tau_k \to \tau^*$ при $k \to \infty$ и функции $\phi_1(t_2) = \int\limits_0^{t_2} f_1(s, x^*(s))\, ds$ и $\phi_2(t_2) = \int\limits_0^{t_2} f_2(s, x^*(s))u^*(s)\, ds$ непрерывны, то $\phi_1(t_2) \to \phi_1(\tau^*)$ и $\phi_2(t_2) \to \phi_1(\tau^*)$ при $t_2 \to \tau^*$. Стало быть,

$$x^*(t) = x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x^*(s))\, dt + f_2(s, x^*(s))u^*(s)]\, ds$$

для любого $t \in [0, \tau^*]$. Значит, $x^*(t)$ — решение системы (1), что соответствует управлению $u^*(t)$ при $t \in [0, \tau^*]$.

Осталось доказать, что управление $u^*(t)$ оптимально.

Снова рассмотрим два случая.

1. $y^*(\tau^*) \in \partial D$. (a) Пусть $\tau^* < \varliminf\limits_{n\to\infty} \tau_n$. Тогда множество $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < \tau^*\}$ конечно. Поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{\tau_k,\, k \geq 0\}$ последовательности $\{\tau_{n_k},\, n_k \geq 0\}$ такую, что $\tau_k > \tau^*$ для любого $k > 0$. Тогда имеем $y_k(t) = x_k(t)$ и $y^*(t) = x^*(t)$ для каждого $t \in [0, \tau^*]$.

Покажем интегрируемость функции $L(t, x^*(t), u_k(t))$ для любого $k > 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
|L(t, x^*(t), u_k(t))| &\le |L(t, x^*(t), u_0)| + |L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_0)| \\
&\le |L(t, x^*(t), u_0)| + \sup_{\lambda \in (0,1)} |L_u(t, x^*(t), u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)\|u_k(t) - u_0| \\
&\le |L(t, x^*(t), u_0)| + K(1 + |x^*(t)|^\alpha + + \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1})|u_k(t) - u_0| \\
&\le |L(t, x^*(t), u_0)| + K|u_k(t) - u_0| + K|x^*(t)|^\alpha |u_k(t) - u_0| \\
&\quad + K \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1}|u_k(t) - u_0|.
\end{aligned}$$

Первые три слагаемых на отрезке $[0, \tau^*]$ интегрируемы. Покажем интегрируемость последнего слагаемого. Пусть $A_k = \{t \in [0, \tau^*] : u_k(t) = u_0\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau^*} \sup_{\lambda \in (0,1)} |u_0 + \lambda(u_k(t) - u_0)|^{p-1}|u_k(t) - u_0|\, dt \\
&\le \int_0^{\tau^*} (|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^{p-1}|u_k(t) - u_0|\, dt \le \int_{A_k} |u_0| + |u_k(t) - u_0|^{p-1}|u_k(t) - u_0|\, dt \\
&\quad + \int_{[0,\tau^*]\setminus A_k} (|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^{p-1}|u_k(t) - u_0|\, dt \\
&\le \int_{[0,\tau^*]\setminus A_k} \frac{(|u_0| + |u_k(t) - u_0|)^p}{|u_0| + |u_k(t) - u_0|}|u_k(t) - u_0|\, dt \\
&\le 2^{p-1} \int_{[0,\tau^*]\setminus A_k} \frac{|u_0|^p + |u_k(t) - u_0|^p}{|u_k(t) - u_0|}|u_k(t) - u_0|\, dt \\
&\le 2^{p-1} \int_0^{\tau^*} (|u_0|^p + |u_k(t) - u_0|^p)\, dt < \infty.
\end{aligned}$$

Значит, функция $L(t, x^*(t), u_k(t))$ интегрируема на отрезке $[0, \tau^*]$ для любого $k > 0$.

Пусть $\chi_R(t)$ — характеристическая функция множества $\{t : |u^*(t)| < R\}$. Пусть $L(t, x, \cdot)$ выпуклая, тогда выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
L(t, x^*(t), v(t))\chi_R(t) &\ge L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t) \\
&\quad + (v(t) - u^*(t))L_v(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t), \quad v(t) \in V,\ t \in [0, \tau^*].
\end{aligned}$$

Положим $v(t) = u_k(t)$, тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t))\chi_R(t)\, dt &\ge \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t)\, dt \\
&\quad + \int_0^{\tau^*} (u_k(t) - u^*(t))L_u(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t)\, dt. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Из условия (5) имеем

$$|L_u(t, x^*(t), u^*(t))|\chi_R(t) \le K(1 + |u^*(t)|^{p-1} + |x^*(t)|^\alpha) \le K(1 + R^{p-1} + A^\alpha).$$

Отсюда вытекает, что второй интеграл в (10) стремится к 0 при $k \to \infty$. Последнее следует из слабой сходимости $u_k(t)$ до $u^*(t)$. Значит,

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t))\chi_R(t)\, dt \ge \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\chi_R(t)\, dt.$$

Поскольку $L(t, x, u) \ge 0$, $\chi_R(t) \le 1$ и $\chi_R(t) \to 1$ при $R \to \infty$, то

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t))\, dt \ge \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\, dt. \tag{12}$$

Рассмотрим также величину

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))]\, dt \right| \\
&\qquad = \left| \int_0^{\tau^*} \int_0^1 L_x(t, x_{\lambda_k}(t), u_k(t))(x_k(t) - x^*(t))\, d\lambda\, dt \right| \\
&\qquad \le \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)| K(1 + |u_k(t)|^{p-1} + |x_k(t) + x^*(t)|^\alpha)\, dt \\
&\qquad \le K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha)\, dt + K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)||u_k(t)|^{p-1}\, dt \\
&\qquad \le K \int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|(1 + (2A)^\alpha)\, dt \\
&\qquad\qquad + K\|u_k\|_p^{p/q} \left(\int_0^{\tau^*} |x_k(t) - x^*(t)|^p\, dt \right)^{1/p},
\end{aligned} \tag{13}$$

где $x_{\lambda_k}(t) = x^*(t) + \lambda(x_k(t) - x^*(t))$.

Поскольку $\|u_k\|_p$ ограничена, правая часть неравенства (12) стремится к 0 при $k \to \infty$. Далее,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\tau^*} L(t, x_k(t), u_k(t))\, dt \pm \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u_k(t))\, dt \pm \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\, dt \\
&\qquad = \int_0^{\tau^*} [L(t, x_k(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u_k(t))]\, dt \\
&\qquad + \int_0^{\tau^*} [L(t, x^*(t), u_k(t)) - L(t, x^*(t), u^*(t))]\, dt + \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\, dt.
\end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части последнего неравенства стремится к 0 при $k \to \infty$ в силу неравенства (13). Ввиду неравенства (12)

$$J(u^*) = \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\, dt \le \varliminf_{k\to\infty} \int_0^{\tau^*} L(t, x_k(t), u_k(t))\, dt$$

$$\le \varliminf_{k\to\infty} \int_0^{\tau_k} L(t, x_k(t), u_k(t))\, dt = m.$$

Отсюда $J(u^*) = m$. Следовательно, $u^*(t)$ — оптимальное управление.

(b) Пусть $\tau^* = \varliminf\limits_{n\to\infty} \tau_n$. Выберем произвольный момент t_2 такой, что $t_2 < \tau^*$. Множество $\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n < t_2\}$ конечно. На промежутке (t_2, τ^*) может лежать бесконечное количество τ_n. В этом случае выберем подпоследовательность $\{\tau_k,\, k > 0\}$ последовательности $\{\tau_n,\, n > 0\}$ такую, что $\tau_k \in (t_2, \tau^*)$ для любого $k > 0$. Тогда $y_k(t) = x_k(t)$ и $y^*(t) = x^*(t)$ для каждого $t \in [0, t_2]$.

Аналогично предыдущему случаю для любого $t_2 \in [0, \tau^*)$ получаем

$$\int_0^{t_2} L(t, x^*(t), u^*(t))\, dt \le m.$$

Отсюда предельным переходом при $t_2 \to \tau^*$ выводим, что

$$J(u^*) = \int_0^{\tau^*} L(t, x^*(t), u^*(t))\, dt \le m.$$

Поэтому $J(u^*) = m$. Значит, $u^*(t)$ — оптимальное управление.

2. Пусть $y^*(\tau^*) \in D$, тогда $\tau^* = T$. Следовательно, $\tau_{n_k} = T$ для достаточно больших n_k.

Далее доказательство аналогично случаю 1 с заменой τ^* и τ_k на T.

Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда вместо условия линейного роста (4) для функций $f_1(t,x)$ и $f_2(t,x)$ для некоторого $\alpha > 0$ выполняется условие

$$|f_1(t,x)| \le C(1 + |x|^\alpha), \quad \|f_2(t,x)\| \le C(1 + |x|^\alpha). \tag{14}$$

Отметим, что при $\alpha > 1$ данное условие допускает выход решения задачи Коши (1) на бесконечность за конечное время (взрыв). Однако, используя доказанную теорему, можно получить достаточные условия оптимальности и в этом случае.

Следствие. *Пусть в задаче оптимального управления* (1), (2) *вместо условия линейного роста* (4) *выполняется условие* (14), *а для функции* $L(t,x,u)$ *выполняются условия теоремы с заменой условий* (1) *и* (2) *условиями*

(1′) *существуют такие постоянные* $k > 0$, $\alpha > 0$ *и* $p > 1$, *что выполняется неравенство*

$$L(t,x,u) \ge k(|u|^p + |x|^{\alpha q}) \tag{15}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$;

(2′) *существует* $K > 0$, *для которого*

$$|L_x(t,x,u)| + |L_u(t,x,u)| \le K(1 + |u|^{p-1} + |x|^{\alpha(q-1)}). \tag{16}$$

Кроме того, пусть существует хотя бы одно допустимое управление $u_1(t)$ такое, что

$$\int\limits_0^{\tau_1} L(t, x_1(t), u_1(t))dt < \infty. \tag{17}$$

Тогда задача (1), (2) *имеет решение в классе допустимых управлений V.*

Доказательство. В силу (17) существуют неотрицательная нижняя грань m значений $J(u)$ и последовательность допустимых управлений $\{u_n(t),\, n \geq 1\}$ такие, что $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$. Значит, $J(u_n) \leq m + 1$ для достаточно больших n. Тогда из (15) получаем

$$k \int\limits_0^{\tau_n} (|u_n(t)|^p + |x_n(t)|^{\alpha q})\, dt \leq \int\limits_0^{\tau_n} L(t, x_n, u_n)\, dt \leq m + 1.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{\tau_n} |x_n(t)|^{\alpha q}\, dt \leq \left(\frac{m+1}{k}\right),$$

но

$$\begin{aligned}
|x_n(t)| &= \left| x_0 + \int\limits_0^t f_1(s, x_n(s))\, ds + \int\limits_0^t f_2(s, x_n(s)) u_n(s)\, ds \right| \\
&\leq |x_0| + \int\limits_0^t C(1 + |x_n(s)|^\alpha)\, ds + \int\limits_0^t C(1 + |x_n(s)|^\alpha) u_n(s)\, ds \\
&\leq |x_0| + CT + C\int\limits_0^t |x_n(s)|^\alpha\, ds + C\int\limits_0^t |u_n(s)|\, ds + \int\limits_0^t |x_n(s)|^\alpha |u_n(s)|\, ds \\
&\leq |x_0| + CT + CT^{1/p}\left(\int\limits_0^t |x_n(s)|^{\alpha q}\, ds\right)^{1/q} + CT^{1/p}\|u_n(s)\|_p \\
&\quad + C\left(\int\limits_0^t |x_n(s)|^{\alpha q}\, ds\right)^{1/q} \|u_n(s)\|_p \leq |x_0| + CT \\
&\quad + 2CT^{1/p}\left(\frac{m+1}{k}\right)^{1/q} + C\left(\frac{m+1}{k}\right)^{2/q}.
\end{aligned}$$

Значит, для любых $t \in [0, \tau_n]$ решения $x_n(t)$ равномерно ограничены, поэтому $x_n(\tau_n) < \infty$.

Далее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы.

2. Постановка задачи для полуоси

Рассмотрим задачу оптимального управления (1), (3), где $x_0 \in \mathbb{R}^d$ — фиксированный вектор, $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^d$ — фазовый вектор, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор управления, U — выпуклое замкнутое множество и $0 \in U$, вектор-функция $f_1(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и матрица $f_2(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ — непрерывные по совокупности переменных функции, для которых выполняются условие линейного роста (4) и локальное для $t \geq 0$ условие Липшица по переменной $x \in \mathbb{R}^d$.

Пусть вектор-функция $f_1(t, x)$ такова, что нулевое решение системы

$$\dot{x} = f_1(t, x) \tag{18}$$

экспоненциально устойчиво в целом, т. е. существуют такие постоянные $K_2 > 0$ и $\gamma > 0$, что

$$|x(t, x_0)| \leq K_2 e^{-\gamma t} |x_0| \tag{19}$$

для всех $t \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Здесь $x(t, x_0)$ — решение системы (18) такое, что $x(0, x_0) = x_0$.

Функции $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ и $L_u(t, x, u)$ непрерывны по совокупности переменных для любых $t \in [0, \infty)$, $x \in D$ и $u \in U$, а также выполняются следующие условия:

1) существуют такие постоянные $b > 0$ и $p \geq 1$, что

$$L(t, x, u) \geq b|u|^p; \tag{20}$$

2) существует такое $C > 0$, что

$$L(t, x, u) \leq C(1 + |u|^p); \tag{21}$$

3) существует такое $K_1 > 0$, что выполняется

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K_1(1 + |u|^{p-1});$$

4) $L(t, x, u)$ выпуклая по u для любых фиксированных $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^d$.

Имеем $g(t) \in L_1([0, \infty))$, $g(t) \in L_p([0, \infty))$ и $g(t) \in L_q([0, \infty))$, где $q = p/(p - 1)$, $p \geq 2$. Пусть также выполняется условие: $0 \leq g(t) \leq 1$ для любого $t \geq 0$.

Для задачи (1), (3) определим множество допустимых управлений следующим образом. Допустимыми управлениями будем считать такие функции $u(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, что

(b1) $u(t) \in L_p([0, \infty))$ для некоторого $p > 1$,

(b2) $u(t) \in U$ при $t \geq 0$,

(b3) $J(u) < \infty$.

Множество управлений, которые удовлетворяют условиям (b1)–(b3), будем называть *допустимым* для задачи (1), (3) и обозначать через V.

Теорема 2 (существования на полуоси). *Пусть в системе* (1) *с критерием качества* (3) *для функций $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $g(t)$ и $L(t, x, u)$ выполняются условия постановки задачи на полуоси. Тогда задача* (1), (3) *имеет решение в классе допустимых управлений V.*

Доказательство. Для начала заметим, что множество допустимых управлений V непустое. Для этого докажем, что $0 \in V$. Действительно, выполнение условия (b1) очевидно. Выполнение условия (b2) гарантируется определением множества U. Условие (b1) выполняется в силу экспоненциальной устойчивости системы (18). Покажем выполнение условия (b3). Используя неравенство (21), имеем

$$J(0) = \int_0^\infty g(t) L(t, x(t), 0)\, dt \leq C \int_0^\infty g(t)\, dt < \infty.$$

Следовательно, $u(t) \equiv 0 \in V$.

Повторяя рассуждения разд. 1, получаем, что существуют неотрицательная нижняя грань m значений $J(u)$ и последовательность допустимых управлений $\{u_n(t),\, n \geq 1\}$ таких, что $J(u_n) \to m$ при $n \to \infty$ монотонно, т. е.

$$J(u_n) = \int\limits_0^\infty g(t)L(t, x_n(t), u_n(t))\,dt \to m \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $x_n(t)$ — решения системы (1), отвечающие управлениям $u_n(t)$, $t \in [0, \infty)$.

Аналогично имеем оценку

$$\|u_n(\cdot)\|_p \leq \left(\frac{m+1}{k}\right)^{1/p}. \tag{22}$$

Поэтому можно выбрать подпоследовательность (будем обозначать ее также через $u_n(t)$), которая слабо сходится к пределу $u^*(t) \in L_p([0,\infty))$. При этом для $u^*(t)$ выполнено условие (22) и $u^*(t) \in U$ почти при всех t относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательность решений $x_n(t)$ системы (1), соответствующих последовательности управлений $\{u_n(t),\, n \geq 1\}$ при $t \in [0, \infty)$. Имеем

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t [f_1(s, x_n(s)) + f_2(s, x_n(s))u_n(s)]\,ds.$$

Поскольку $u_n(t)$ — допустимые управления, все $x_n(t)$ определены при $t \geq 0$. Выберем произвольный момент $T \in [0, \infty)$. Тогда, применив неравенство (13) и неравенство Гёльдера, для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\begin{aligned}
|x_n(t)|^q &= \left| x_0 + \int\limits_0^t f_1(s, x_n(s))\,ds + \int\limits_0^t f_2(s, x_n(s))u_n(s)\,ds \right|^q \\
&\leq 3^{q-1}\left(|x_0|^q + \left| \int\limits_0^t f_1(s, x_n(s))\,ds \right|^q + \left| \int\limits_0^t f_2(s, x_n(s))u_n(s)\,ds \right|^q \right) \\
&\leq 3^{q-1}\left(|x_0|^q + \left(\int\limits_0^t K(1 + |x_n(s)|)\,ds \right)^q + \left(\int\limits_0^t K(1 + |x_n(s)|)|u_n(s)|\,ds \right)^q \right) \\
&\leq 3^{q-1}\left(|x_0|^q + \left(KT + K\int\limits_0^t |x_n(s)|\,ds \right)^q + \left(K\int\limits_0^t |u_n(s)|\,ds \right.\right. \\
&\left.\left. + \int\limits_0^t |x_n(s)||u_n(s)|\,ds \right)^q \right) \leq 3^{q-1}\left(|x_0|^q + 2^{q-1}(KT)^q + 2^{q-1}K^q\left(\int\limits_0^t |x_n(s)|\,ds \right)^q \right. \\
&\left. + 2^{q-1}K^q\left(\int\limits_0^t |u_n(s)|\,ds \right)^q + 2^{q-1}K^q\left(\int\limits_0^t |x_n(s)||u_n(s)|\,ds \right)^q \right) \\
&\leq 6^{q-1}K^q\left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{K^q} + T^q + T^{q/p}\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds + T\left(\int\limits_0^t |u_n(s)|^p\,ds \right)^{q/p} \right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\int\limits_0^T |u_n(s)|^p\,ds\right)^{q/p}\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds\Bigg) \le 6^{q-1}K^q\left(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{K^q}+T^q\right.$$

$$\left.+T^{q/p}\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds + T\|u_n(s)\|_p^q + \|u_n(s)\|_p^q\int\limits_0^t |x_n(s)|^q\,ds\right).$$

Пусть $M_1 = 6^{q-1}K^q\big(\frac{|x_0|^q 2^{1-q}}{K^q}+T^q+T\|u_n(s)\|_p^q\big) = \mathrm{const}$, $M_2 = 6^{q-1}K^q\big(T^{q/p}+\|u_n(s)\|_p^q\big)$. Тогда по лемме Гроноулла — Беллмана

$$|x_n(t)|^q \le M_1 e^{M_2 T} = L_1 < \infty, \tag{23}$$

т. е. на каждом конечном отрезке времени $[0,T]$ функции $x_n(t)$, $n \ge 1$, равномерно ограничены.

Докажем равностепенную непрерывность решений $x_n(t)$, $n \ge 1$, при $t \in [0,T]$. Из неравенств Гёльдера, (23) и (4) для любых $s_1, s_2 \in [0,T]$ и $s_1 < s_2$ имеем

$$|x_n(s_1)-x_n(s_2)|^q = \left|\int\limits_{s_1}^{s_2}[f_1(t,x_n(t))+f_2(t,x_n(t))u_n(t)]\,dt\right|^q$$

$$\le \left|\int\limits_{s_1}^{s_2} K(1+|x_n(t)|)(1+|u_n(t)|)\,dt\right|^q = K^q\Bigg|(s_2-s_1)^q+\int\limits_{s_1}^{s_2}|x_n(t)|\,dt+\int\limits_{s_1}^{s_2}|u_n(t)|\,dt$$

$$+\int\limits_{s_1}^{s_2}|x_n(t)\|u_n(t)|\,dt\Bigg|^q \le K^q 4^{q-1}\left((s_2-s_1)^q+\left(\int\limits_{s_1}^{s_2}|x_n(t)|\,dt\right)^q+\left(\int\limits_{s_1}^{s_2}|u_n(t)|\,dt\right)^q\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{s_1}^{s_2}|x_n(t)\|u_n(t)|\,dt\right)^q\right) \le K^q 4^{q-1}\Bigg((s_2-s_1)^q+(s_2-s_1)^{1/p}\int\limits_{s_1}^{s_2}|x_n(t)|^q\,dt$$

$$+(s_2-s_1)\|u_n(t)\|_p^q+\|u_n(t)\|_p^q\int\limits_{s_1}^{s_2}|x_n(t)|^q\,dt\Bigg) \le K^q4^{q-1}\big((s_2-s_1)^q+L_1(s_2-s_1)^{(1/p)+1}$$

$$+(s_2-s_1)\|u_n(t)\|_p^q+L_1\|u_n(t)\|_p^q(s_2-s_1)\big)\to 0 \quad \text{при } |s_2-s_1|\to 0.$$

Значит, семейство $\{x_n(t),\, n\ge 1\}$, $t\in[0,T]$, равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Тогда по теореме Арцела — Асколи для каждого компактного отрезка времени $[0,T]$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность (также обозначаемую через $\{x_n(t),\, n\ge 1\}$) такую, что $x_n(t)\to x^*(t)$ при $n\to\infty$ для $t\in[0,T]$.

Аналогично рассуждениям разд. 1 можно показать, что функция $x^*(t)$ — решение системы (1), что соответствует управлению $u^*(t)$ при $t\in[0,T]$.

В силу произвольности T и единственности решения задачи Коши (1) отсюда следует, что $x^*(t)$ — решение системы (1), соответствующее управлению $u^*(t)$ при $t\ge 0$.

Осталось показать, что управление $u^*(t)$ оптимально. Для начала покажем, что функция $g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))$ интегрируема на $[0,\infty)$:

$$\int\limits_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))\,dt \le \int\limits_0^\infty g(t)(L(t,x^*(t),u_n(t))-L(t,x^*(t),0))\,dt$$

$$+\int\limits_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),0)\,dt \le \int\limits_0^\infty g(t)\int\limits_0^1 L_u(t,x^*(t),\lambda u_n(t))|u_n(t)|\,d\lambda dt$$

$$+\,C\int\limits_0^\infty g(t)\,dt \le K_1\int\limits_0^\infty g(t)(1+|u_n(t)|^{p-1})|u_n(t)|\,dt + C\int\limits_0^\infty g(t)\,dt$$

$$= K_1\int\limits_0^\infty g(t)|u_n(t)|^p\,dt + K_1\int\limits_0^\infty g(t)|u_n(t)|^p\,dt + C\int\limits_0^\infty g(t)\,dt$$

$$\le K_1\left(\int\limits_0^\infty g^q(t)\,dt\right)^{1/q}\left(\int\limits_0^\infty |u_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + C\int\limits_0^\infty g(t)\,dt < \infty,$$

что и требовалось.

Поскольку $L(t,x,\cdot)$ выпуклая, выполняется неравенство

$$g(t)L(t,x^*(t),v(t)) \ge g(t)L(t,x^*(t),u^*(t)) + (v(t)-u^*(t))g(t)L_v(t,x^*(t),u^*(t))$$

для всех $v\in U$, $t\in[0,\tau^*]$. Положим $v=u_n(t)$, тогда имеет место оценка

$$\int\limits_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))\,dt \ge \int\limits_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt$$

$$+\int\limits_0^\infty (u_n(t)-u^*(t))g(t)L_u(t,x^*(t),u^*(t))\,dt. \qquad (24)$$

Поскольку

$$\left(\int\limits_0^\infty g(t)^q L_u^q(t,x^*(t),u^*(t))\,dt\right)^{1/q} \le \left(K_1^q\int\limits_0^\infty g(t)^q(1+|u^*(t)|^{p-1})^q\,dt\right)^{1/q}$$

$$\le 2^{q-1}K_1\left(\int\limits_0^\infty g(t)^q\,dt + \int\limits_0^\infty |u^*(t)|^q\right)^{1/q} < \infty,$$

второй интеграл в (24) стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу слабой сходимости $u_n(t)$ к $u^*(t)$. Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u_n(t))\,dt \ge \int\limits_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt. \qquad (25)$$

Рассмотрим также величину

$$\left|\int\limits_0^\infty g(t)[L(t,x_n(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u_n(t))]\,dt\right|$$

$$= \left|\int\limits_0^\infty g(t)\int\limits_0^1 L_x(t,(1-\lambda)x_n(t)+\lambda x^*(t),u_n(t))|x_n(t)-x^*(t)|d\lambda\,dt\right|$$

$$\leq \left| \int_0^\infty g(t)K(1+|u_n(t)|^{p-1})|x_n(t)-x^*(t)|\,dt \right|$$

$$\leq K\left(\int_0^\infty g(t)|x_n(t)-x^*(t)|\,dt + \int_0^\infty g(t)|u_n(t)|^{p-1}|x_n(t)-x^*(t)|\,dt \right)$$

$$\leq K\left(\int_0^\infty g(t)|x_n(t)-x^*(t)|\,dt \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^\infty |u_n(t)|^p\,dt \right)^{1/q} \left(\int_0^\infty g(t)^p|x_n(t)-x^*(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \right). \quad (26)$$

Из поточечной сходимости $x_n(t)$ к $x^*(t)$ при $t \geq 0$ и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что данная величина стремится к 0 при $n \to \infty$:

$$J(u_n) = \int_0^\infty g(t)L(t,x_n(t),u_n(t))\,dt \pm \int_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u_{n_k}(t))\,dt$$

$$\pm \int_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt = \int_0^\infty g(t)[L(t,x_n(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u_n(t))]\,dt$$

$$+ \int_0^\infty g(t)[L(t,x^*(t),u_n(t)) - L(t,x^*(t),u^*(t))]\,dt + \int_0^\infty g(t)L(t,x^*(t),u^*(t))\,dt.$$

Используя (25) и (26), из последнего равенства получаем

$$\inf_{u\in U} J(u) \leq J(u^*) \leq \varliminf_{n\to\infty} J(u_n) = m.$$

Тогда $J(u^*) = m$. Значит, $u^*(t)$ — оптимальное управление.

Теорема доказана.

Проиллюстрируем доказанные теоремы.

Пример 1. Пусть задача (1), (2) имеет вид

$$\dot{x} = x^2 e^{tx} + x^2 u(t), \quad x(0) = 1 \quad (27)$$

с критерием качества

$$J(u) = \int_0^\tau (e^{tx^2} + e^{tx^2}u^2)\,dt \to \inf, \quad (28)$$

где $|x| < 2$, $t \in [0,1]$, $T = 1$ и $u \in U$, U — произвольное выпуклое замкнутое множество, содержащее 0.

Легко проверить, что для задачи (27), (28) выполнены все условия теоремы 1 при $p = 2$, поэтому оптимальное управление существует при $T = 1$ и $p = 2$.

Значит, задача (27), (28) имеет решение при указанных условиях.

Пример 2. Пусть задача оптимального управления (1), (3) имеет вид

$$\dot{x} = -x + e^{-t^2} u(t), \quad x(0) = 1/2, \tag{29}$$

с критерием качества

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-3t}(x^6 + 2u^6)\, dt \to \inf, \tag{30}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty)$ и $u \in U$, U — произвольное выпуклое замкнутое множество, содержащее 0.

Нетрудно видеть, что задача (29), (30) удовлетворяет всем условиям теоремы 2 при $p = 6$ и $a = 4$. Значит, задача (29), (30) имеет решение при указанных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov processes and viscosity solution. New York: Springer Sci., 2005.
2. *Cesari L.* Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints. II. Existence theorems for weak solutions // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. P. 413–430.
3. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. *Плотников В. А.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: Астропринт, 1999.
5. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.
6. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
7. *Cesari L.* Optimization: Theory and applications. Problems with ordinary differential equations. New York: Springer-Verl., 1983.
8. *Дмитрук А. В., Кузькина Н. В.* Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 4. С. 503–518.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
10. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 18 июля 2012 г., окончательный вариант — 19 сентября 2013 г.

Станжицкий Александр Николаевич, Самойленко Елена Александровна
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка,
механико-математический факультет, пр. Академика Глушкова, 4-Е, Киев 03022
ostanzh@gmail.com, anelka.s@mail.ru