Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 512.5

ОПИСАНИЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОВ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ МЕТАБЕЛЕВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко

Аннотация. Дано полное описание централизаторов элементов из метабелева произведения свободных абелевых групп. Доказательство опирается на каноническую запись элементов из указанного произведения групп.

Ключевые слова: метабелево произведение, централизатор элемента, каноническая запись элемента.

Свободной n-ступенно разрешимой группой F_n называется фактор-группа $F/F^{(n)}$ свободной группы F по ее n-му коммутанту $F^{(n)}$. А. И. Мальцев [1], доказывая неразрешимость элементарной теории свободной разрешимой группы, установил, что при $n \geq 2$ любые два коммутирующих элемента этой группы принадлежат либо ее последнему неединичному коммутанту $F_n^{(n-1)}$, либо одной циклической подгруппе. Этот результат чрезвычайно полезен при исследовании различных вопросов, связанных со свободными разрешимыми группами.

Естественным обобщением свободной разрешимой группы является *n-ступенно разрешимое произведение* S_n свободных абелевых групп A_i, $i \in I$. Оно определяется как фактор-группа свободного произведения $S = \prod\limits_{i \in I}^{*} A_i$ по его n-му коммутанту $S^{(n)}$.

При $n = 2$ разрешимое произведение называется *метабелевым.*

Если все группы A_i бесконечные циклические, то S_n — свободная n-ступенно разрешимая группа. Очевидно, что если хотя бы одна из групп A_i не циклическая, то появляются перестановочные элементы $a, b \in A_i$, не принадлежащие $S_n^{(n-1)}$ и не лежащие в одной и той же циклической группе. Поэтому описание коммутирующих элементов в свободной разрешимой группе не переносится на разрешимые произведения свободных абелевых групп.

Мы приводим необходимые и достаточные условия для перестановочных элементов в метабелевом произведении свободных абелевых групп.

Теорема 1. *Пусть группа M является метабелевым произведением свободных абелевых групп A_i, $i \in I$, $A = A_1 \times \dots \times A_n$. Два элемента $g, h \in M$ перестановочны тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:*

(1) *элементы g и h принадлежат коммутанту M' группы M;*

(2) *элементы g и h являются степенями одного и того же элемента;*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00084) и Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 2014/138 (проект 1052).

(3) *существуют элементы a и b, принадлежащие некоторой подгруппе A_i, целое неотрицательное m, элементы $g_1, \dots, g_m \in M$, а также элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z}A$ такие, что*

$$g = a[a, g_1]^{\alpha_1} \dots [a, g_m]^{\alpha_m}, \quad h = b[b, g_1]^{\alpha_1} \dots [b, g_m]^{\alpha_m}.$$

Доказательство теоремы опирается на каноническую запись элементов группы M, полученную в § 2. Из доказательства теоремы 1 вытекает теорема 2, дающая описание централизаторов элементов метабелева произведения свободных абелевых групп.

§ 1. Предварительные сведения

При изучении свободных разрешимых групп часто полезными бывают вложение Магнуса и производные Фокса. В случае разрешимых произведений аналогичную роль играют вложение Шмелькина и обобщенные производные Фокса. Кратко напомним эти понятия. Более подробное изложение можно найти в [2–4].

Пусть G — некоторая группа. Обозначим через ε естественный гомоморфизм целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$ на $\mathbb{Z}$:

$$\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}.$$

Правым дифференцированием D группового кольца $\mathbb{Z}G$ произвольной группы G называется отображение $D : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$, удовлетворяющее условиям

$$D(u + v) = D(u) + D(v), \quad D(uv) = D(u)v + \varepsilon(u)D(v) \tag{1}$$

для любых $u, v \in \mathbb{Z}(G)$.

Предположим, что группа G является свободным произведением $G = \prod\limits_{i \in I}^{*} G_i$ некоторых групп G_i. Для каждого $i \in I$ и для каждого свободного множителя G_m определим отображение D_i группы G_m в кольцо $\mathbb{Z}G_m$ по правилу $D_i(g) = g - 1$, если $g \in G_i$, и $D_i(g) = 0$, если $g \in G_j$, $i \neq j$. Используя формулы (1), продолжим каждое отображение D_i на кольцо $\mathbb{Z}G$. Получим дифференцирование D_i кольца $\mathbb{Z}G$. Для $\gamma \in \mathbb{Z}G$ элемент $D_i(\gamma)$ называется *i-й правой обобщенной производной Фокса* от элемента γ.

Аналогично определяются левые обобщенные производные Фокса. Меняется только второе условие из (1).

В дальнейшем используются только правые обобщенные производные Фокса. Для краткости будем называть их *обобщенными производными Фокса.*

Для любых элементов $u, v \in G$ обозначим

$$u^v = v^{-1}uv, \quad [u, v] = u^{-1}v^{-1}uv.$$

Используя (1), легко получить формулы

$$\begin{gathered} D_i(u^n) = D_i(u)\frac{u^n - 1}{u - 1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ D_i([u, v]) = D_i(u)(v - [u, v]) + D_i(v)(1 - u^v), \\ D_i(u^v) = D_i(v)(1 - u^v) + D_i(u)v. \end{gathered} \tag{2}$$

Следующая теорема является частным случаем вложения Шмелькина. Приводим ее формулировку из работы Н. С. Романовского [4].

Пусть $G = G_1 * \dots * G_n$ — свободное произведение групп G_i, $1 \leq i \leq n$, R — нормальная подгруппа из декартовой подгруппы группы G, $\overline{G} = G/R$, T — свободный правый $\mathbb{Z}\overline{G}$-модуль с базой $\{t_1, \dots, t_n\}$. Отображение

$$g_i \longmapsto \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ t_i(g_i - 1) & 1 \end{pmatrix}, \quad g_i \in G_i,$$

задает вложение каждой группы G_i в группу матриц $\mathbf{M}_n(\overline{G}) = \begin{pmatrix} \overline{G} & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$. Эти вложения определяют гомоморфизм $\sigma : G \to \mathbf{M}_n(\overline{G})$. Тогда

(1) *образом элемента $g \in G$ является матрица*

$$\begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ t_1 D_1(g) + \dots + t_n D_n(g) & 1 \end{pmatrix},$$

где $\bar{g}$ — образ элемента g в группе $\overline{G}$, $D_i(g)$ — значения обобщенных производных Фокса в кольце $\mathbb{Z}\overline{G}$;

(2) *ядро отображения σ равно $[R, R]$;*

(3) *матрица $\begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ t_1 u_1 + \dots + t_n u_n & 1 \end{pmatrix}$ из $\mathbf{M}_n(A)$ лежит в $G/[R, R]$ тогда и только тогда, когда*

$$u_i \in \Delta_i \cdot \mathbb{Z}\overline{G}, \quad u_1 + \dots + u_n = a - 1, \tag{3}$$

где Δ_i — фундаментальный идеал кольца $\mathbb{Z}G_i$.

Из этой теоремы получаем представление метабелева произведения M свободных абелевых групп A_i матрицами над целочисленным групповым кольцом свободной абелевой группы $A = A_1 \times \dots \times A_n$.

Так как абелевы подгруппы A_i группы $S = \prod\limits_{i \in I}^{*} A_i$ не пересекаются с коммутантом S', отождествим группы A_i с их образами в метабелевом произведении $M = S/S''$ и в фактор-группе $M/M' \cong S/S' \cong A$.

Сделаем еще одно замечание, которое постоянно используется при изучении метабелевых групп. В произвольной метабелевой группе G коммутант G' является G-модулем, а именно, группа G действует на коммутанте сопряжением: для $c \in G'$ и $g \in G$ полагаем $c \cdot g = c^g$. Так как элементы из G' действуют на G' тождественно, коммутант G' является правым $\mathbb{Z}(G/G')$-модулем относительно этого действия. Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}(G/G')$ и любого $c \in G'$ однозначно определен элемент c^α. Именно такой смысл имеет запись, использованная в условии (3) теоремы 1.

§ 2. Каноническая запись элементов метабелева произведения свободных абелевых групп

Утверждение. *Пусть A_i, $i = 1, \dots, n$, — свободные абелевы группы и $J_i = \{1, \dots, m_i\}$, $m_i \geq 1$, $\mathfrak{A}_i = \{a_{i,j},\ j \in J_i\}$ — базис группы A_i, $A = A_1 \times \dots \times A_n$, $\mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A}_i$ — базис группы A. Упорядочим элементы из $\mathfrak{A}$ отношением $\leq$ сначала по первому индексу, а затем по второму. Пусть M — метабелево произведение групп A_i. Тогда каждый элемент $g \in M$ можно однозначно записать в виде*

$$g = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} a_{i,j}^{l_{i,j}} \cdot \prod [a_p, a_q]^{\alpha_{p,q}}, \tag{4}$$

где a_p пробегает все элементы из $\mathfrak{A}_p$, а a_q — все элементы из $\mathfrak{A}_q$, $1 \le p \le q \le n$, $\alpha_{p,q}$ — элемент из кольца $\mathbb{Z}A$, не зависящий от элементов из $\mathfrak{A}$, меньших a_p, и не зависящий от элементов из $\mathfrak{A}_q$, меньших чем a_q.

Доказательство. Покажем вначале, что любой элемент c из коммутанта M' можно записать в виде произведения элементов $[a_p, a_q]^{\alpha_{p,q}}$ с указанными ограничениями на $\alpha_{p,q}$.

Очевидно, что элемент c можно представить в виде произведения элементов $[a_p, a_q]^{\alpha_{p,q}}$, $\alpha_{p,q} \in \mathbb{Z}A$, без всяких ограничений на $\alpha_{p,q}$.

Для любых элементов x, y, z метабелевой группы G коммутатор $[x, y, z]$ можно записать в виде $[x, y, z] = [x, y]^{z-1}$. Поэтому хорошо известное тождество Якоби, справедливое в любой метабелевой группе G, в «показательной» форме принимает вид $[x, y]^{1-z}[y, z]^{1-x}[z, x]^{1-y} = 1$.

Предположим, что в запись элемента $\alpha_{p,q}$ входит элемент $a \in \mathfrak{A}_p$, причем $a < a_p$. Из тождества Якоби получим $[a_p, a_q]^{1-a}[a_q, a]^{1-a_p}[a, a_p]^{1-a_q} = 1$. Следовательно, можно сделать замену:

$$[a_p, a_q]^a = [a, a_q]^{a_p - 1}[a_p, a_q]. \tag{5}$$

Аналогичную замену сделаем в том случае, когда в запись элемента $\alpha_{p,q}$ входит элемент из $\mathfrak{A}_q$, меньший чем a_q.

Предположим, что в запись $\alpha_{p,q}$ входит элемент из $\mathfrak{A}_r$, $r < p$. Используя тождество Якоби, произведем замену:

$$[a_p, a_q]^{a_r} = [a_p, a_q][a_r, a_q]^{a_p - 1}[a_r, a_p]^{1-a_q}. \tag{6}$$

Так как в любой метабелевой группе имеет место тождество

$$[y, z]^{x^{-1}} = [y, z][x, z]^{-x^{-1}(y-1)}[x, y]^{-x^{-1}(1-z)}, \tag{7}$$

используя (5)–(7), придем к записи элемента c, удовлетворяющей ограничениям на вхождение элементов базиса $\mathfrak{A}$ в запись $\alpha_{p,q}$.

Осталось показать однозначность такой записи. Доказательство проведем индукцией по n.

Пусть $n = 2$, $\{b_1, \ldots, b_s\}$ — базис группы A_1, $\{d_1, \ldots, d_t\}$ — базис A_2. Предположим, что

$$1 = \prod [b_p, d_q]^{\alpha_{p,q}}, \tag{8}$$

где $\alpha_{p,q}$ — элемент из кольца $\mathbb{Z}(A_1 \times A_2)$, не зависящий от элементов b_r, меньших b_p, и от элементов d_e, меньших чем d_q.

Из вложения Шмелькина следует, что для элементов метабелева произведения M однозначно определены значения обобщенных производных в кольце $\mathbb{Z}(A_1 \times A_2)$.

Из формул (2) получим, что для любых b_p, d_q и любого $\alpha \in \mathbb{Z}(A_1 \times A_2)$ имеют место формулы

$$D_1([b_p, d_q]^\alpha) = (b_p - 1)\alpha, \quad D_2([b_p, d_q]^\alpha) = (1 - d_q)\alpha, \tag{9}$$

где значения обобщенных производных рассматриваются в кольце $\mathbb{Z}(A_1 \times A_2)$.

Применим формулу (9) для вычисления производной D_2 от левой и правой частей равенства (8). В кольце $\mathbb{Z}(A_1 \times A_2)$ получим

$$\sum_{p=1}^{s} \sum_{q=1}^{t} \alpha_{p,q}(b_p - 1)(1 - d_q) = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим эндоморфизм свободной абелевой группы $A_1 \times A_2$, при котором элементы базиса b_s и d_t остаются на месте, а остальные элементы отображаются в единицу. Так как элемент $\alpha_{s,t}$ не зависит от b_p при $p < s$ и d_q при $q < t$, при этом эндоморфизме элемент $\alpha_{s,t}(b_s - 1)(1 - d_t)$ отображается в себя. Остальные слагаемые в (10) отображаются в единицу. Поскольку кольцо $\mathbb{Z}(A_1 \times A_2)$ не содержит делителей нуля, $\alpha_{s,t}$ равно нулю.

Далее применим к (10) эндоморфизм группы $A_1 \times A_2$, при котором фиксированными остаются элементы b_s, b_{s-1}, c_t, а остальные отображаются в единицу. Получим $\alpha_{s-1,t} = 0$.

На следующем шаге в (10) положим $b_s = c_t = c_{s-1} = 1$, а остальные элементы базиса группы $A_1 \times A_2$ оставим без изменения. Получим $\alpha_{s,t-1} = 0$. Продолжая этот процесс, придем к выводу, что все элементы $\alpha_{p,q}$ равны нулю.

Предположим, что предложение справедливо для $(n-1)$-го сомножителя A_i, и докажем утверждение для n сомножителей. Пусть $\mathfrak{A}_{n-1} = \{b_1, \dots, b_s\}$ — базис A_{n-1}, а $\mathfrak{A}_n = \{d_1, \dots, d_t\}$ — базис A_n. Предположим, что

$$1 = \prod [a_p, a_q]^{\alpha_{a_p, b_q}}, \tag{11}$$

причем показатели α_{a_p,a_q} удовлетворяют ограничениям на вхождение в них элементов базиса $\mathfrak{A}$.

Вычислим производную D_n от равенства (11). Получим систему равенств

$$\sum_{d \in \mathfrak{A}_n} \sum_{a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_n} \alpha_{a,d}(d-1)(1-a) = 0. \tag{12}$$

Применим к (12) эндоморфизм группы A, при котором элементы b_s и d_t остаются неподвижными, а остальные элементы базиса $\mathfrak{A}$ переходят в единицу. Получим $\alpha_{b_s,d_t} = 0$. Затем оставляем неподвижными только элементы d_t, d_{t-1}, b_s, а остальные отображаем в единицу. Получаем $\alpha_{b_s,d_{t-1}} = 0$. Продолжим этот процесс. На предпоследнем шаге в единицу отобразим только первый элементы базиса $\mathfrak{A}_1$, а на последнем шаге — только d_1. Придем к выводу, что в запись элемента c не входят элементы базиса $\mathfrak{A}_n$. Далее применимо предположение индукции. Утверждение доказано.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Элементы g и g' из $M \setminus M'$ назовем *подобными*, если для некоторого $m \geq 1$ найдутся элементы $f_1, \dots, f_m \in M$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z}A$, а также $a \neq 1$ и $a' \neq 1$ из некоторого множителя A_i такие, что либо

$$g = a[a, g_1]^{\alpha_1} \dots [a, g_m]^{\alpha_m}, \quad g' = a'[a', g_1]^{\alpha_1} \dots [a', g_m]^{\alpha_m},$$

либо g и g' принадлежат одному и тому же множителю A_i.

Покажем, что приведенные в теореме условия достаточны для коммутирования элементов g и h. Нужно лишь проверить, что элементы

$$g = a[a, g_1]^{\alpha_1} \dots [a, g_m]^{\alpha_m}, \quad h = b[b, g_1]^{\alpha_1} \dots [b, g_m]^{\alpha_m}$$

перестановочны в группе M, если $[a, b] = 1$.

Используя тождество Якоби, получим

$$\begin{aligned}
[g, h] &= [a[a, g_1]^{\alpha_1} \dots [a, g_m]^{\alpha_m}, b[b, g_1]^{\alpha_1} \dots [b, g_m]^{\alpha_m}] \\
&= ([a, g_1]^{\alpha_1} \dots [a, g_m]^{\alpha_m})^{1-b} ([b, g_1]^{\alpha_1} \dots [b, g_m]^{\alpha_m})^{a-1} \\
&= [b, g_1]^{(1-a)\alpha_1} \dots [b, g_m]^{(1-a)\alpha_m} [b, g_1]^{(a-1)\alpha_1} \dots [b, g_m]^{(a-1)\alpha_m} = 1.
\end{aligned}$$

Докажем, что условия теоремы необходимы для перестановочности элементов g и h.

Случай 1. Один из элементов g или h лежит в коммутанте M'.

Предположим, что $1 \neq g \in M'$, и проверим, что $h \in M'$. Так как $1 = [g, h] = g^{1-\bar{h}}$, $\bar{h} = hM'$, вычисляя обобщенные производные Фокса от этого равенства, в кольце $\mathbb{Z}A$ получим

$$Di(g)(1-\bar{h}) = 0$$

для $i = 1, \ldots, n$. Если $h \notin M'$, то $D_i(g) = 0$ для всех i. Из вложения Шмелькина следует $g = 1$. Противоречие доказывает, что $h \in M'$.

Случай 2. Ни один из элементов g и h не лежит в коммутанте M'.

Возможно несколько вариантов.

Случай 2.1. Один из элементов, например g, имеет вид $g = a'c_1$, где $1 \neq a'$ — элемент из какого-то множителя A_i, а c_1 — элемент из коммутанта M'.

Пусть $h = bc_2$ — запись элемента h в виде (4), т. е. $c_2 \in M'$ и $b = b_1 \ldots b_n$, $b_i \in A_i$. Покажем, что при $j \neq i$ элементы b_j равны 1.

Предположим, что $b_j \neq 1$ для некоторого $i \neq j$. Рассмотрим гомоморфизм группы M на свободную метабелеву группу G с двумя порождающим x_1, x_2, при котором элемент a' отображается на ненулевую степень элемента x_1, а b_j — на ненулевую степень элемента x_2. Тогда образ элемента $[g, h]$ в группе G не равен 1, как следует из описания централизаторов элементов свободной разрешимой группы. Противоречие показывает, что $h = a''c_2$, $a'' \in A_i$.

Случай 2.1.1. $g = a'c_1$, $h = a''c_2$, $a', a'' \in A$, $c_1, c_2 \in M'$ и элементы a' и a'' зависимы в группе A_i.

Можно считать, что $i = 1$ и $a' = a^{n_1}$, $a'' = a^{n_2}$ — ненулевые степени одного и того же базисного элемента $a \in A_i$.

Из $[g, h] = 1$ следует, что $c_1^{1-a^{n_2}} = c_2^{1-a^{n_1}}$. Вычислим обобщенные производные от этого равенства. Имеем

$$D_i(c_1)(1-a^{n_2}) = D_i(c_2)(1-a^{n_1}). \tag{13}$$

Пусть $d =$ Н.О.Д.(n_1, n_2) и $m_1 d = n_1$, $m_2 d = n_2$. Из (13) получаем

$$D_i(c_1)\bigl(1 + a_1^d + \cdots + a_1^{d(m_2-1)}\bigr) = D_i(c_2)\bigl(1 + a_1^d + \cdots + a^{d(m_1-1)}\bigr). \tag{14}$$

Нетрудно доказать, что многочлены $(1 + a^d + \cdots + a^{d(m_1-1)})$ и $(1 + a^d + \cdots + a^{d(m_2-1)})$ взаимно просты.

Значит,

$$D_i(c_1) = \alpha_i(1 + a^d + \cdots + a^{d(m_1-1)}),$$
$$D_i(c_2) = \alpha_i(1 + a^d + \cdots + a^{d(m_2-1)}).$$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, $\alpha_i \in \Delta_i \mathbb{Z}A$. Из вложения Шмелькина следует, что существует элемент $c \in M'$ такой, что $D_i(c) = \alpha_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$c_1 = c^{1+a^d+\cdots+a^{d(m_1-1)}}, \quad c_2 = c^{1+a^{\,d}+\cdots+a^{d(m_2-1)}}.$$

Стало быть, $g = (a^d c)^{m_1}$, $h = (a^d c)^{m_2}$, т. е. элементы g и h лежат в одной и той же циклической группе.

Случай 2.1.2. $g = a'c_1$, $h = a''c_2$, $a', a'' \in A$, $c_1, c_2 \in M'$ и элементы a' и a'' независимы в группе A_i.

Не уменьшая общности, будем предполагать, что элементы g и h имеют вид $g = a_1^{n_1}c_1$, $h = a_2^{n_2}c_2$, где система элементов $\{a_1, a_2\}$ принадлежит некоторому базису группы A_1, $c_1, c_2 \in M'$, а n_1 и n_2 — ненулевые целые числа.

Из перестановочности g и h получаем

$$c_1^{1-a_2^{n_2}} = c_2^{1-a_1^{n_1}}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что элемент c_1 принадлежит пересечению коммутанта M' и нормальной подгруппы, порожденной элементом a_1 в группе M. Заметим, что в таком случае элемент c можно записать в виде

$$c_1 = [a_1, b_1]^{\alpha_1} \dots [a_1, b_r]^{\alpha_r}, \tag{16}$$

где $\{b_1, \dots, b_r\}$ — базис абелевой группы $A_2 \times \dots \times A_n$, а $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — элементы из $\mathbb{Z}A$.

Действительно, представим элемент c_1 в виде (4):

$$c_1 = \prod [a_p, a_q]^{\alpha_{p,q}}.$$

Применим к этому равенству эндоморфизм φ группы M, при котором элемент a_1 отображается в единицу, а остальные элементы базиса $\mathfrak{A}$ группы A остаются фиксированными. Под действием этого эндоморфизма элемент c_1 отображается в единицу. Из ограничений на вхождения элементов базиса $\mathfrak{A}$ в запись c_1 получаем, что $\varphi(\alpha_{p,q}) = \alpha_{p,q}$ при $p > 1$. Так как $\varphi(c_1) = 1$, то $\alpha_{p,q} = 0$ при $p > 1$. Это означает, что элемент c_1 можно записать в виде (16).

Аналогично

$$c_2 = [a_2, b_1]^{\beta_1} \dots [a_2, b_r]^{\beta_r}, \tag{17}$$

где $\{b_1, \dots, b_r\}$ — базис абелевой группы $A_2 \times \dots \times A_n$, а $\beta_1, \dots, \beta_r$ — элементы из $\mathbb{Z}A$. Тогда

$$c_1^{1-a_2^{n_2}} = [a_1, b_1]^{\alpha_1(1-a_2^{n_2})} \dots [a_1, b_r]^{\alpha_r(1-a_2^{n_2})} \tag{18}$$

— каноническая запись элемента $c_1^{1-a_2^{n_2}}$.

Имеем

$$c_2^{1-a_1^{n_1}} = [a_2, b_1]^{\beta_1(1-a_1^{n_1})} \dots [a_2, b_r]^{\beta_r(1-a_1^{n_1})}. \tag{19}$$

Запись (19) не каноническая. Применим формулу Якоби и получим каноническую запись:

$$c_2^{1-a_1^{n_1}} = [a_1, b_1]^{\beta_1(1-a_2)\frac{1-a_1^{n_1}}{1-a_1}} \dots [a_2, b_r]^{\beta_r(1-a_2)\frac{1-a_1^{n_1}}{1-a_1}}. \tag{20}$$

Из (15), (18) и (20) следует, что

$$\alpha_i\bigl(1 - a_2^{n_2}\bigr) = \beta_i(1 - a_2)\frac{1 - a_1^{n_1}}{1 - a_1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Значит,

$$\alpha_i = \bigl(1 + a_1 + \dots + a_1^{n_1-1}\bigr)\gamma_i, \quad \beta_i = \bigl(1 + a_2 + \dots + a_2^{n_2-1}\bigr)\gamma_i$$

для некоторых $\gamma_i \in \mathbb{Z}A$. Так как в любой метабелевой группе $[x^l, y] = [x, y]^{\frac{x^l-1}{x-1}}$, $l \in \mathbb{Z}$, имеем

$$c_1 = [a_1, b_1]^{(1+a_1+\dots+a_1^{n_1-1})\gamma_1} \dots [a_1, b_r]^{(1+a_1+\dots+a_1^{n_1-1})\gamma_r} = \bigl[a_1^{n_1}, b_1\bigr]^{\gamma_1} \dots \bigl[a_1^{n_1}, b_r\bigr]^{\gamma_r}.$$

Аналогично получаем

$$c_2 = \left[a_2^{n_2}, b_1\right]^{\gamma_1} \dots \left[a_2^{n_2}, b_r\right]^{\gamma_r}.$$

Тем самым доказано, что элементы g и h имеют требуемый в п. (3) теоремы 1 вид, т. е. в этом случае элементы g и h подобны.

Случай 2.2. $g = a'c_1'$, $h = a''c_2'$, $a', a'' \in A$, $c_1', c_2' \in M'$ и для любых $1 \le i, j \le n$ имеет место $a' \notin A_i$, $a'' \notin A_j$.

Заметим, что в этом случае найдется элемент $a \in A_1 \times \dots \times A_n$ такой, что $a' = a^{n_1}$, $a'' = a^{n_2}$, где n_1, n_2 — ненулевые целые числа.

Действительно, рассмотрим проекции группы M на свободные 2-ступенно нильпотентные группы $N_{i,j}$ с двумя порождающими a_i, a_j, где a_i принадлежит фиксированному базису $\mathfrak{A}_i$ группы A_i, а a_j — фиксированному базису $\mathfrak{A}_j$ группы A_j, причем $i < j$. Так как $[g,h] = 1$, то $\left[a_i^{l_i} a_j^{l_j}, a_i^{r_i} a_j^{r_j}\right] = 1$ в группе $N_{i,j}$. Последний коммутант равен единице тогда и только тогда, когда $\frac{l_i}{r_i} = \frac{l_j}{r_j}$. Поскольку это равенство верно для любых i, j, то $g = a^{n_1} c_1$, $h = a^{n_2} c_2$, $c_1, c_2 \in M'$.

Из $[g,h] = 1$ получим $c_1^{1-a^{n_2}} = c_2^{1-a^{n_1}}$. Вычисляя обобщенные производные от этого равенства, имеем

$$D_i(c_1)(1 - a^{n_2}) = D_i(c_2)(1 - a^{n_1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Как в случае 2.1.1, убеждаемся, что

$$\begin{aligned} D_i(c_1) &= \alpha_i(1 + a^d + \dots + a^{d(m_1-1)}), \\ D_i(c_2) &= \alpha_i(1 + a^d + \dots + a^{d(m_2-1)}), \end{aligned} \tag{21}$$

где $d = \text{Н.О.Д.}\,(n_1, n_2)$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, $\alpha_i \in \Delta_i \mathbb{Z}A$, найдется элемент $c \in M'$ такой, что $D_i(c) = \alpha_i$. Из (22) получим

$$c_1 = c^{1 + a^d + \dots + a^{d(m_1-1)}}, \quad c_2 = c^{1 + a^d + \dots + a^{d(m_2-1)}}.$$

Значит, $g = (a^d c)^{m_1}$, $h = (a^d c)^{m_2}$, т. е. элементы g и h лежат в одной и той же циклической группе. Теорема полностью доказана.

Как обычно, через $\sqrt{h}$, $h \in M$, обозначим какой-либо порождающий элемент наибольшей циклической подгруппы из M, содержащей элемент h.

Пусть элементы $g = ac$ и $g' = a'c'$ подобны. Проверим, что если множитель A_i, которому принадлежат элементы a и a', имеет ранг 1, то $\sqrt{g} = \sqrt{g'}^{\pm 1}$.

Действительно, если элементы $g = a$ и $g' = a'$ принадлежат одной и той же циклической подгруппе A_i, то $\sqrt{g} = \sqrt{g'}^{\pm 1}$.

Пусть $g = a[a, g_1]^{\alpha_1} \dots [a, g_m]^{\alpha_m}$, $g' = a'[a', g_1]^{\alpha_1} \dots [a', g_m]^{\alpha_m}$ и a_i — порождающий элемент циклической группы A_i. Тогда $g = a_i^l \left[a_i^l, g_1\right]^{\alpha_1} \dots \left[a_i^l, g_m\right]^{\alpha_m}$, где l ненулевое целое. Легко вычислить, что

$$g = (a_i [a_i, g_1]^{\alpha_1} \dots [a_i, g_m]^{\alpha_m})^l.$$

Аналогично

$$g' = (a_i [a_i, g_1]^{\alpha_1} \dots [a_i, g_m]^{\alpha_m})^{l'}.$$

Значит, $\sqrt{g} = \sqrt{g'}^{\pm 1}$.

Заметим, что элемент $g \in M$ обладает подобными, если g принадлежит некоторому множителю A_i либо равен ac, где $1 \ne a \in A_i$, а элемент c лежит в пересечении коммутанта M' и нормального замыкания элемента a в группе M.

Можно дать описание централизаторов элементов из M.

Теорема 2. *Пусть группа M является метабелевым произведением свободных абелевых групп A_i, $i \in I$.*

1. *Если $1 \neq g \in M'$, то централизатор $C(g)$ совпадает с M'.*

2. *Если $g = ac$, элемент a не равен 1 и принадлежит некоторому нециклическому множителю A_i, а элемент c лежит в пересечении коммутанта M' с нормальным замыканием элемента a в группе M, то $C(g)$ совпадает с множеством, состоящим из элементов, подобных g, и единичного элемента.*

3. *В остальных случаях для $1 \neq g$ централизатор $C(g)$ совпадает с группой, порожденной элементом $\sqrt{g}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О свободных разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 495–498.
2. *Тимошенко Е. И.* Эндоморфизмы и универсальные теории. Новосибирск, 2011. (Сер. Монографии НГТУ).
3. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Критерий для обратимости эндоморфизмов и тестовый ранг метабелева произведения абелевых групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 561–581.
4. *Романовский Н. С.* К теореме о свободе для произведений групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 354–367.

Статья поступила 7 мая 2013 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru