Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 513.82

АКСИОМА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ КЕНМОЦУ ДЛЯ 6–МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М. Б. Банару

Аннотация. Доказано, что всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме гиперповерхностей Кенмоцу, является локально симметрическим подмногообразием типа Риччи.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, структура Кенмоцу, гиперповерхность, 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли.

В память о дорогом Леониде Евгеньевиче Евтушике (1931–2013)

Существование 3-векторных произведений в алгебре Кэли дает исследователю весьма интересные, содержательные и разнообразные примеры почти эрмитовых структур. Каждое из таких 3-векторных произведений индуцирует почти эрмитову структуру на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав. Подобные почти эрмитовы структуры изучались систематически с 60-х годов прошлого века известнейшими американскими геометрами Греем и Калаби, затем отечественным специалистом В. Ф. Кириченко и многими другими. Среди прочего В. Ф. Кириченко получил полную классификацию 6-мерных локально симметрических эрмитовых типа Риччи подмногообразий алгебры Кэли [1], имеющих самое непосредственное отношение к данной статье. Эта тематика ни в коей мере не утратила своего значения и в нынешнее время.

Автором данной статьи в [2] доказано, что если 6-мерное эрмитово подмногообразие M^6 алгебры Кэли удовлетворяет аксиоме U-гиперповерхностей Кенмоцу (т. е. если через всякую точку M^6 проходит вполне омбилическая гиперповерхность Кенмоцу), то M^6 — келерово многообразие.

В данной статье условие быть вполне омбилической для гиперповерхности Кенмоцу снято. Цель работы — выяснить, какими свойствами обладает 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры октав, удовлетворяющее аксиоме гиперповерхностей Кенмоцу.

1. Как известно [3], *почти эрмитовой* (*almost Hermitian, AH-*) *структурой* на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}).$$

Здесь $\mathfrak{N}(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым многообразием.* С каждой AH-структурой

$\{J, g = \langle\cdot,\cdot\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т. е. 2-формы), определяемого равенством

$$F(X,Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(M^{2n}),$$

и называемого фундаментальной (или келеровой) формой структуры.

Пусть $(M^{2n}, \{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\})$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p, g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Реперы, адаптированные к почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом: $(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, где ε_a — собственные векторы оператора структуры, соответствующие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, соответствующие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a} = a+n$. Применение A-репера для исследования почти эрмитовых структур разработано В. Ф. Кириченко в [4].

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R^8}$ — алгебра Кэли. Как известно [1, 5], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,Y,Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y;$$

$$P_2(X,Y,Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y.$$

Здесь $X, Y, Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \overline{X}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением $J_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2)$, $\alpha = 1, 2$, где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [1]. Подмногообразие M^6 называется *эрмитовым*, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и *келеровым*, если $\nabla F = 0$. Напомним [1, 2], что точка $p \in M^6$ называется *общей*, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 — единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются *подмногообразиями общего типа* [1, 2]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа.

2. Напомним [3, 6, 7], что *почти контактной метрической структурой* на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1; \quad \Phi(\xi) = 0; \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad \Phi^2 = -\operatorname{id} + \xi \otimes \eta;$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N).$$

(Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\mathfrak{N}(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.)

Хорошо известно [3], что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, которую можно охарактеризовать тождеством $\nabla\eta = \nabla\Phi = 0$, где ∇ — риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ [3]. Многообразия, наделенные такой структурой, локально эквивалентны произведению келерова многообразия на вещественную прямую [7]. Почти контактные метрические структуры тесно связаны с почти эрмитовыми структурами. Например, если $(N, \{\Phi, \xi, \eta, g\})$ — почти контактное метрическое многообразие, то на многообразии $N \times R$ индуцируется почти эрмитова структура [8]. Если эта почти эрмитова структура интегрируема, то исходная почти контактная метрическая структура называется *нормальной*. Нормальная контактная метрическая структура называется *сасакиевой* [7]. Сасакиевы структуры можно охарактеризовать с помощью тождества

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N). \tag{1}$$

Сасакиевы структуры индуцируются, например, на вполне омбилических гиперповерхностях келеровых многообразий [7]. Они обладают многими замечательными свойствами и играют фундаментальную роль в контактной геометрии.

В начале 70-х годов двадцатого века Кенмоцу ввел в рассмотрение класс почти контактных метрических структур, характеризуемых тождеством [9]

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle\xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathfrak{N}(N). \tag{2}$$

Многообразия Кенмоцу нормальны и интегрируемы, но не являются контактными и, стало быть, не могут являться сасакиевыми [10]. Несмотря на внешнее сходство тождеств (1) и (2), свойства многообразий Кенмоцу в определенном смысле противоположны свойствам сасакиевых многообразий. Отметим, что многообразия Кенмоцу и их обобщения — одна из самых популярных тематик современной контактной геометрии.

Заметим, что краткое и исчерпывающее описание многообразий Кенмоцу содержится в исследовании В. Ф. Кириченко [10]. Кроме того, выделим изданную в 2007 г. фундаментальную монографию Питиша [11], содержащую практически все известные на тот момент времени результаты о геометрии многообразий Кенмоцу и их обобщений.

3. Говорят, что почти эрмитово многообразие удовлетворяет *аксиоме гиперповерхностей Кенмоцу*, если через каждую его точку проходит гиперповерхность Кенмоцу. Особую роль в эрмитовой геометрии играют локально симметрические подмногообразия алгебры октав. Их изучению посвящено несколько интересных работ, самая значительная из которых, на наш взгляд, принадлежит В. Ф. Кириченко [1]. В ней введены в рассмотрение и исследованы 6-мерные типа Риччи эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Приведем определение таких подмногообразий. Для этого напомним, что точка $p \in M^6$ называется *специальной*, если

$$T_p(M^6) \subset L(e_0)^{\perp},$$

где $L(e_0)^{\perp}$ — ортогональное дополнение единицы алгебры октав. В противном случае точка p называется *простой*. Ясно, что совокупность всех простых точек M^6 представляет собой открытое подмногообразие $M_0^6 \subset M^6$, на котором канонически индуцируется распределение Z, порожденное ортогональными проекциями вектора e_0 на касательное пространство $T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$. Такое распределение Z, а также одномерное пространство $Z_p \in T_p(M^6)$, $p \in M_0^6$, называют *исключительными* [1].

Определение [1]. Эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется *подмногообразием типа Риччи*, если кривизна Риччи в каждой точке $p \in M_0^6$ в направлении исключительного пространства Z_p принимает минимальное значение.

Сформулируем и докажем основной результат данной заметки.

Теорема. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме гиперповерхностей Кенмоцу, является локально симметрическим подмногообразием типа Риччи.*

Доказательство. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} эрмитова многообразия M^{2n} [12]:

$$\begin{aligned}
d\omega^\alpha ={}& \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \bigl(\sqrt{2}B^{\alpha n}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta\bigr)\omega^\beta \wedge \omega \\
&+ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_n + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta \wedge \omega; \\
d\omega_\alpha ={}& -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \bigl(\sqrt{2}B^\beta_{\alpha n} - i\sigma^\beta_\alpha\bigr)\omega_\beta \wedge \omega \\
&+ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^n_{\alpha\beta} - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta \wedge \omega; \\
d\omega ={}& \bigl(\sqrt{2}B^{n\alpha}_\beta - \sqrt{2}B^\alpha_{n\beta} - 2i\sigma^\alpha_\beta\bigr)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \bigl(B^n_{n\beta} + i\sigma_{n\beta}\bigr)\omega_\wedge\omega^\beta \\
&+ \bigl(B^{n\beta}_n - i\sigma^\beta_n\bigr)\omega_\wedge\omega_\beta,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$), $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности, а системы функций $\{B^{ab}_c\}$ и $\{B^c_{ab}\}$ служат компонентами тензоров Кириченко [2, 13, 14] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$; $\hat{a} = a + n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в почти эрмитово M^{2n}.

Сопоставляя (3) со структурными уравнениями структуры Кенмоцу [2, 10]:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \omega \wedge \omega^\alpha, \quad d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + \omega \wedge \omega_\alpha, \quad d\omega = 0,$$

в силу линейной независимости базисных форм получаем условия, одновременное выполнение которых есть критерий того, чтобы почти контактная метрическая структура, индуцированная на гиперповерхности 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры октав, являлась структурой Кенмоцу:

$$\begin{gathered}
\sqrt{2}B^{\alpha 3}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta; \quad B^{\alpha\beta}_\gamma = 0; \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_3 + i\sigma^{\alpha\beta} = 0; \\
\sqrt{2}B^{3\alpha}_\beta - \sqrt{2}B^\alpha_{3\beta} - 2i\sigma^\alpha_\beta = 0; \quad B^{3\beta}_3 - i\sigma^\beta_3 = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

и формулы комплексного сопряжения, запись которых мы опустим.

В [15] В. Ф. Кириченко получил структурные уравнения почти эрмитовой структуры на 6-мерном подмногообразии алгебры октав:

$$\begin{gathered}
d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D^{c]}_h\omega_b \wedge \omega_c; \\
d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b}D^h_{c]}\omega^b \wedge \omega^c; \\
d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg}D_{h[k}D^g_{j]} + \sum_\varphi T^\varphi_{\hat{a}[k}T_{j]b}\right)\omega^k \wedge \omega^j.
\end{gathered} \tag{5}$$

Условимся, что здесь и далее $\varphi = 7, 8,\ a, b, c, d, g, h = 1, 2, 3;\ \hat{a} = a + 3;\ k, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Как и в [1, 2, 15], $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$. При этом $\varepsilon_{abc} = \varepsilon^{123}_{abc}$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}_{123}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три; $\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b\delta^h_g - \delta^a_g\delta^h_b$;

$$D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}},\ D^c_h = D_{h\hat{c}},\ D^h_c = D_{\hat{h}c};\quad D_{cj} = \mp T^8_{cj} + iT^7_{cj},\ D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - iT^7_{\hat{c}j},$$

где $\left\{T^{\varphi}_{kj}\right\}$ — компоненты конфигурационного тензора (в терминологии Грея — Кириченко) или второй основной формы погружения подмногообразия M^6.

Поскольку почти эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ эрмитово тогда и только тогда [16], когда $D_{\hat{a}b} = D_{a\hat{b}} = 0$, уравнения (5) для 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли примут вид

$$\begin{gathered} d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b; \\ d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b; \\ d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg}D_{hd}D^{gc} + \sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}}T^{\varphi}_{bd}\right)\omega_c \wedge \omega^d. \end{gathered} \tag{6}$$

Принимая во внимание (6), из (4) получаем

$$B^{\alpha\beta}_{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta 3}D_{3\gamma} = 0 \Leftrightarrow D_{3\gamma} = 0.$$

Воспользуемся тождествами, установленными для 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав в [17]:

$$(D_{12})^2 = D_{11}D_{22},\quad (D_{13})^2 = D_{11}D_{33},\quad (D_{23})^2 = D_{22}D_{33}.$$

Получаем, что матрица (D_{ab}) при соответствующем выборе репера в каждой точке 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы эрмитово подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ являлось локально симметрическим подмногообразием типа Риччи [1]. Теорема полностью доказана.

Отметим, что особый интерес, разумеется, представляет лишь нетривиальный случай, соответствующий некелерову 6-мерному локально симметрическому подмногообразию типа Риччи. В этом случае согласно [1] $M^6 \subset \mathbf{O}$ локально голоморфно изометрично произведению келеровых многообразий C^2 и CH^1, «скрученному» вдоль CH^1. (Здесь через C^2 обозначено двумерное комплексное евклидово пространство, а через CH^1 — комплексное гиперболическое пространство.)

Поскольку ранее было доказано [18], что всякое 6-мерное локально симметрическое подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи является уплощающимся (т. е. такое M^6 лежит в гиперплоскости алгебры октав), то из доказанной теоремы вытекает такое

Следствие. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме гиперповерхностей Кенмоцу, является уплощающимся подмногообразием.*

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное отношение к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кириченко В. Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. № 3. С. 6–13.
2. *Banaru M.* The *U*-Kenmotsu hypersurfaces axiom and six-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra // J. Sichuan Univ. Sci. Eng. 2013. V. 26, N 3. P. 1–5.
3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003.
4. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1986. С 25–71. (Итоги науки и техники).
5. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 465–504.
6. *Blair D. E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2002. (Progress in Math.).
7. *Kiritchenko V. F.* Sur la gèomètrie des variètès approximativement cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1982. V. 295, N 12. P. 673–676.
8. *Blair D. E.* The theory of quasi-Sasakian structures // J. Diff. Geom. 1967. V. 1. P. 331–345.
9. *Kenmotsu K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tôhoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93–103.
10. *Кириченко В. Ф.* О геометрии многообразий Кенмоцу // Докл. АН. 2001. Т. 380, № 5. С. 585–587.
11. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov: Publ. House Transilvania Univ., 2007.
12. *Степанова Л. В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Науч. тр. МПГУ им. В. И. Ленина. 1995. С. 187–191.
13. *Abu-Saleem A., Banaru M.* Some applications of Kirichenko tensors // Analele Univ. Oradea. 2010. V. 17, N 2. P. 201–208.
14. *Banaru M.* On Kirichenko tensors of nearly-Kählerian manifolds // J. Sichuan Univ. Sci. Eng. 2012. V. 25, N 4. P. 1–5.
15. *Кириченко В. Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. № 8. С. 32–38.
16. *Banaru M.* On the Gray-Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire Univ. Sofia «St. Kl. Ohridski». Math. 2004. V. 95. P. 125–131.
17. *Банару М. Б.* О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 981–991.
18. *Banaru M.* On the type number of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Kyungpook Math. J. 2003. V. 43, N 1. P. 27–35.

Статья поступила 8 июля 2013 г.

Банару Михаил Борисович
Смоленский гос. университет,
кафедра математики и информатики,
ул. Пржевальского, 4, Смоленск 214000
mihail.banaru@yahoo.com