*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2014. Том 55, № 3*

*УДК 517.51*

# ВЕСОВОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ НА МНОЖЕСТВЕ $\overset{\circ}{AC}(I)$

**А. М. Абылаева,**
**А. О. Байарыстанов, Р. Ойнаров**

**Аннотация.** Рассматривается весовое дифференциальное неравенство Харди на множестве локально абсолютно непрерывных функций, обращающихся в нуль на концах интервала, для которого получены более общие результаты, охватывающие ранее известные, и даны более точные оценки для наилучшей постоянной.

**Ключевые слова:** весовое дифференциальное неравенство Харди, пространство Лебега, локально абсолютно непрерывные функции.

## § 1. Введение

Пусть $I = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $0 < p,q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\rho$, $v$ и $\rho^{1-p'} = \frac{1}{\rho^{p'-1}}$ — неотрицательные локально суммируемые на $I$ функции, причем $v \not\equiv 0$.

Пусть $0 < p < \infty$, $L_{p,\rho} \equiv L_{p,\rho}(I)$ — пространство измеримых на $I$ функций $f$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\rho} = \left( \int\limits_a^b \rho(t)|f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $W^1_{p,\rho} \equiv W^1_p(\rho, I)$, $p > 1$, — совокупность локально абсолютно непрерывных на $I$ функций $f$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^1_{p,\rho}} = \|f'\|_{p,\rho} + |f(t_0)|, \tag{1}$$

где $t_0 \in I$ — некоторая фиксированная точка. Пусть $\lim\limits_{t\to a^+} f(t) \equiv f(a)$, $\lim\limits_{t\to b^-} f(t) \equiv f(b)$ и $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : f(a) = f(b) = 0\}$, $AC_{p,l}(\rho, I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : f(a) = 0\}$, $AC_{p,r}(\rho, I) = \{f \in W^1_{p,\rho} : f(b) = 0\}$.

Замыкания множеств $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$, $AC_{p,l}(\rho, I)$ и $AC_{p,r}(\rho, I)$ по норме (1) соответственно обозначим через $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I)$, $W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $W^1_{p,r}(\rho, I)$.

На множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ рассмотрим весовое неравенство Харди в дифференциальной форме [1]:

$$\left( \int\limits_a^b v(t)|f(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left( \int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки МОН РК (грант № 1529/ГФ).

Неравенство (2) и его различные обобщения в последние 50 лет стали предметом исследования для многих специалистов и в основном изучены на множествах $AC_{p,l}(\rho, I)$ и $AC_{p,r}(\rho, I)$. Историю вопроса и результаты можно найти в [1–3]. В последние годы получены многочисленные эквивалентные критерии их выполнения (см., например, [4, 5]). Однако неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ исследовано очень слабо. Некоторые результаты приведены в [1, 2], причем только в [1] даны двухсторонние оценки для наилучшей константы $C > 0$ в (2).

В связи с различными приложениями неравенства (2) в качественной теории дифференциальных уравнений (см. [6–9]) возникает необходимость исследовать его на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ с более точными оценками его наилучшей постоянной.

В настоящей статье методом, отличным от примененного в [1], получен более общий результат, охватывающий результаты выше указанных работ, и даны более точные двухсторонние оценки для наилучшей константы $C > 0$ в (2).

## § 2. Необходимые обозначения и утверждения

Исследования неравенства (2) на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ проводится в зависимости от поведения функции $\rho$ на концах интервала $I$. Весовая функция $\rho$ на концах интервала $I$ может вырождаться, поэтому имеет место

**Теорема A.** *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда*

(i) *если* $\rho^{1-p'} \in L_1(I)$, *то для любой функции* $f \in W_p^1(\rho, I)$ *существуют* $\lim\limits_{t\to a+} f(t) \equiv f(a)$, $\lim\limits_{t\to b-} f(t) \equiv f(b)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = \left\{f \in W_p^1(\rho, I) : f(a) = f(b) = 0\right\} \equiv \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I);$$

(ii) *если* $\rho^{1-p'} \in L_1(a, c)$ *и* $\rho^{1-p'} \notin L_1(c, b)$, $c \in I$, *то для любой функции* $f \in W_p^1(\rho, I)$ *существуют* $f(a)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_{p,l}^1(\rho, I) = \left\{f \in W_p^1(\rho, I) : f(a) = 0\right\} \equiv AC_{p,l}(\rho, I);$$

(iii) *если* $\rho^{1-p'} \notin L_1(a, c)$ *и* $\rho^{1-p'} \in L_1(c, b)$, $c \in I$, *то для любой функции* $f \in W_p^1(\rho, I)$ *существуют* $f(b)$ *и*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_{p,r}^1(\rho, I) = \left\{f \in W_p^1(\rho, I) : f(b) = 0\right\} \equiv AC_{p,r}(\rho, I_0);$$

(iv) *если* $\rho^{1-p'} \notin L_1(a, c)$ *и* $\rho^{1-p'} \notin L_1(c, b)$, $c \in I$, *то*

$$\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_{p,l}^1(\rho, I) = W_{p,r}^1(\rho, I) = W_p^1(\rho, I).$$

Утверждения теоремы A, вообще говоря известны, и их можно вывести из результатов работ [10–12]. Мы приведем доказательство утверждения (ii), а остальные утверждения доказываются аналогичным образом.

Пусть $\rho^{1-p'} \in L_1(a, c)$ и $\rho^{1-p'} \notin L_1(c, b)$, $c \in I$. Тогда для $f \in W_p^1(\rho, I)$

$$\int_a^c |f'(t)|\, dt \le \left(\int_a^c \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_a^b \rho(t)|f'(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Отсюда вытекает существование $f(a)$.

Пусть $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$. Тогда найдется последовательность $\{f_n\} \subset AC_{p,l}(\rho, I)$ такая, что $\|f - f_n\|_{W^1_{p,\rho}} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как

$$|f(t) - f_n(t)| \le \int\limits_t^{t_0} |f'(s) - f'_n(s)| ds + |f(t_0) - f_n(t_0)|$$

при $a < t < t_0 < b$, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|f(t) - f_n(t)| \le \max\left\{1, \left(\int\limits_a^{t_0} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\} \|f - f_n\|_{W^1_{p,\rho}}.$$

Стало быть, $f(a) = 0$.

Пусть $a < \alpha \le t_0 < b$. Тогда

$$|f(\alpha)| \le \left(\int\limits_a^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_a^{\alpha} \rho(t)|f'|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$|f(\alpha)| \left(\int\limits_a^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \le \left(\int\limits_a^{\alpha} \rho(t)|f'|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть точка $\alpha^* = \alpha^*(a, \alpha) \in (a, \alpha)$ такова, что

$$\int\limits_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'} = \int\limits_a^{\alpha^*} \rho^{1-p'}.$$

Введем функцию

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & a < t \le \alpha^*, \\ f(\alpha)\left(\int\limits_{\alpha^*}^{t} \rho^{1-p'}\right)\left(\int\limits_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-1}, & \alpha^* \le t \le \alpha, \\ f(t), & \alpha \le t < b. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_\alpha \in AC_{p,l}(\rho, I)$. Имеем

$$\|f - f_\alpha\|_{W^1_p} = \left(\int\limits_a^{\alpha} \rho|f' - f'_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int\limits_a^{\alpha} \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |f(\alpha)| \left(\int\limits_{\alpha^*}^{\alpha} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \le (1 + 2^{\frac{1}{p'}}) \left(\int\limits_a^{\alpha} \rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда следует, что $\|f - f_\alpha\|_{W^1_p} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Значит, $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $W^1_{p,l}(\rho, I) = \{f \in W^1_p(\rho, I) : f(a) = 0\}$.

Покажем, что $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W^1_{p,l}(\rho, I)$. В силу $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\rho, I) \subset W^1_{p,l}(\rho, I)$ достаточно показать, что $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) \supset W^1_{p,l}(\rho, I)$. Пусть $f \in W^1_{p,l}(\rho, I)$ и $a < \alpha \le t_0 < \beta < b$.

Ввиду условия $\int\limits_{\beta}^{b}\rho^{1-p'}\,ds=\infty$ для каждого $\beta\in I$ найдется точка $\beta^*=\beta^*(\beta,b)\in(\beta,b)$ такая, что

$$|f(\beta)|\left(\int\limits_{\beta}^{\beta^*}\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}}\le\left(\int\limits_{\beta}^{b}\rho(t)|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Построим функцию $f_{\alpha,\beta}\in\overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)$:

$$f_{\alpha,\beta}(t)=\begin{cases}f_\alpha(t), & a<t\le\beta,\\ f(\beta)\left(\int\limits_{\beta}^{\beta^*}\rho^{1-p'}\right)^{-1}\int\limits_{t}^{\beta^*}\rho^{1-p'}, & \beta\le t\le\beta^*,\\ 0, & \beta^*\le t<b.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|f-f_{\alpha,\beta}\|_{W^1_{p,\rho}}&\\ \le\left(\int\limits_{a}^{\alpha}\rho|f'-f'_\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}}&+\left(\int\limits_{\beta}^{\beta^*}\rho|f'-f'_{\alpha,\beta}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{\beta*}^{b}\rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ \le(1+2^{\frac{1}{p'}})\left(\int\limits_{a}^{\alpha}\rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}}&+2\left(\int\limits_{\beta}^{b}\rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}}+|f(\beta)|\left(\int\limits_{\beta}^{\beta^*}\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}}\\ &\le(1+2^{\frac{1}{p'}})\left(\int\limits_{a}^{\alpha}\rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}}+3\left(\int\limits_{\beta}^{b}\rho|f'|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Отсюда $\|f-f_{\alpha,\beta}\|_{W^1_{p,\rho}}\to0$, при $\alpha\to a$, $\beta\to b$. Следовательно, $f\in\overset{\circ}{W}_p(\rho,I)$. Теорема A доказана.

Пусть $a\le\alpha<\beta\le b$. Положим

$$A_1(\alpha,\beta,x)=\left(\int\limits_{\alpha}^{x}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_{x}^{\beta}v(t)dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_2(\alpha,\beta,x)=\left(\int\limits_{\alpha}^{x}\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\alpha}^{x}v(t)\left(\int\limits_{\alpha}^{t}\rho^{1-p'}\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_1^*(\alpha,\beta,x)=\left(\int\limits_{x}^{\beta}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_{\alpha}^{x}v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_2^*(\alpha,\beta,x)=\left(\int\limits_{x}^{\beta}\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{x}^{\beta}v(t)\left(\int\limits_{t}^{\beta}\rho^{1-p'}\right)^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}},\quad\alpha<x<\beta.$$

$$A_i(\alpha,\beta) = \sup_{\alpha<x<\beta} A_i(\alpha,\beta,x),$$

$$A_i^*(\alpha,\beta) = \sup_{\alpha<x<\beta} A_i^*(\alpha,\beta,x), \quad i=1,2,$$

$$\gamma_1 = \min(p^{\frac{1}{q}}(p')^{\frac{1}{p'}}, q^{\frac{1}{q}}(q')^{\frac{1}{p'}}), \quad \gamma_2 = p'.$$

Наилучшую постоянную $C$ в (2) на множествах $\overset{\circ}{AC}_p(\rho,(\alpha,\beta))$, $AC_{p,l}(\rho,(\alpha,\beta))$ и $AC_{p,r}(\rho,(\alpha,\beta))$ соответственно обозначим через $C = J_0(\alpha,\beta)$, $C = J_l(\alpha,\beta)$ и $C = J_r(\alpha,\beta)$.

Из [3, 13] следует

**Теорема B.** *Пусть* $1<p\le q<\infty$. *Тогда*

$$\max\{A_1(\alpha,\beta),A_2(\alpha,\beta)\} \le J_l(\alpha,\beta) \le \min\{\gamma_1 A_1(\alpha,\beta), \gamma_2 A_2(\alpha,\beta)\}, \tag{3}$$

$$\max\{A_1^*(\alpha,\beta),A_2^*(\alpha,\beta)\} \le J_r(\alpha,\beta) \le \min\{\gamma_1 A_1^*(\alpha,\beta), \gamma_2 A_2^*(\alpha,\beta)\}. \tag{4}$$

Пусть

$$B(\alpha,\beta) = \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_x^\beta v\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_\alpha^x \rho\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$B^*(\alpha,\beta) = \left(\int_\alpha^\beta \left(\int_\alpha^x v\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_x^\beta \rho\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Из [3, 14], а также с учетом того, что по условию функция $\rho^{1-p'}$ локально суммируема на $I$, вытекает (см. [14, замечание])

**Теорема C.** *Пусть* $0<q<p<\infty$, $p>1$. *Тогда*

$$\mu^- B(\alpha,\beta) \le J_l(\alpha,\beta) \le \mu^+ B(\alpha,\beta), \quad \mu^- B^*(\alpha,\beta) \le J_r(\alpha,\beta) \le \mu^+ B^*(\alpha,\beta),$$

*где* $\mu^- = \left(\frac{p-q}{p}\right)^{\frac{1}{q'}}$, $\mu^+ = (p')^{\frac{1}{pq'}} q^{\frac{1}{q}}$ *при* $1<q<p<\infty$ *и* $\mu^- = q^{\frac{1}{q}}(p')^{\frac{1}{q'}} \frac{p-q}{p}$, $\mu^+ = p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{p}{p-q}\right)^{\frac{p-q}{pq}}$ *при* $0<q<1<p<\infty$.

## § 3. Основные результаты

**3.1. Случай** $1<p\le q<\infty$. Пусть

$$\int_a^b \rho^{1-p'}(s)\,ds < \infty. \tag{5}$$

Определение 1. Точку $c_i \in I$, $i=1,2$, назовем *серединной точкой* для $(A_i, A_i^*)$, если $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b) \equiv T_{c_i}(a,b) < \infty$, $i=1,2$.

**Теорема 1.** *Пусть* $1<p\le q<\infty$ *и выполняется* (5). *Тогда неравенство* (2) *выполнено на множестве* $\overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)$ *тогда и только тогда, когда существует серединная точка* $c_i\in I$ *для* $(A_i,A_i^*)$ *хотя бы при одном* $i=1,2$ *и при этом для наилучшей постоянной* $J_0(a,b)$ *в* (2) *имеет место оценка*

$$2^{\frac{q-p}{pq}} \max\{T_{c_1}(a,b), T_{c_2}(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{\gamma_1 T_{c_1}(a,b), \gamma_2 T_{c_2}(a,b)\}. \tag{6}$$

**Следствие 1** [9]. *В случае $p = q$ справедлива оценка*

$$\max\{T_{c_1}(a,b), T_{c_2}(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}} T_{c_1}(a,b), p' T_{c_2}(a,b)\}.$$

В доказательстве теоремы 1 используется следующая

**Лемма 1.** *Пусть $1 < p \le q < \infty$ и выполнено* (5). *Тогда серединная точка для $(A_i, A_i^*)$, $i = 1,2$, существует тогда и только тогда, когда для $c \in I$*

$$\lim_{x\to a}\sup A_i(a,c,x) < \infty, \quad \lim_{x\to b}\sup A_i^*(c,b,x) < \infty, \quad i = 1,2. \tag{7}$$

Доказательство леммы 1. Достаточность. Из условия (7) следует, что

$$\lim_{c\to a} A_i(a,c) < \infty, \quad \lim_{c\to b} A_i^*(c,b) < \infty, \quad i = 1,2.$$

Покажем, что

$$\lim_{c\to b} A_i(a,c) > \lim_{c\to b} A_i^*(c,b), \quad i = 1,2. \tag{8}$$

Действительно, если

$$\lim_{c\to b} A_i(a,c) \le \lim_{c\to b} A_i^*(c,b) < \infty, \tag{9}$$

то в силу (5) имеем

$$\int_c^b v(t)\,dt < \infty, \quad c \in I.$$

Тогда

$$\lim_{c\to b} A_i^*(c,b) = 0, \quad i = 1,2. \tag{10}$$

При $i = 1$ равенство (10) очевидно, а при $i = 2$ оно вытекает из неравенства

$$\left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_c^b v(t)\left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_c^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_c^b v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $A_i(a,c)$ — неотрицательная, неубывающая и непрерывная функция по $c \in I$, из (9) и (10) следует, что $A_i(a,b) = 0$, $i = 1,2$. Тогда $v(t) \equiv 0$ на $I$, что противоречит условию, наложенному на $v$. Следовательно, имеет место (8). Точно так же устанавливаем, что

$$\lim_{c\to a} A_i^*(c,b) > \lim_{c\to b} A_i(a,c), \quad i = 1,2. \tag{11}$$

Из (8) и (11) в силу непрерывности и монотонности $A_i(a,c)$, $A_i^*(c,b)$ по $c \in I$, вытекает существование точек $c_i \in I$ таких, что $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b)$, $i = 1,2$.

Необходимость. Пусть существует серединная точка $c_i \in I$ для $(A_i, A_i^*)$, $i = 1,2$. Тогда по определению серединной точки $c_i$

$$A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b) < \infty, \quad i = 1,2.$$

Если $c \geq c_1$, то в силу условия (5)

$$\lim_{x\to a}\sup A_1(a,c,x) = \lim_{t\to a}\sup_{a<x<t}\left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^c v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{a<x<c_1}\left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^{c_1} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} + \lim_{t\to a}\sup_{a<x<t}\left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{c_1}^c v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= A_1(a,c_1) + \lim_{t\to a}\left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{c_1}^c v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_1(a,c_1) < \infty,$$

$$\lim_{x\to b}\sup A_1^*(c,b,x) = \lim_{t\to b}\sup_{t<x<b}\left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_c^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{c_1<x<b}\left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{c_1}^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_1^*(c_1,b) < \infty.$$

В случае $c < c_1$ аналогично

$$\lim_{x\to a}\sup A_1(a,c,x) \leq A_1(a,c_1) < \infty,$$

$$\lim_{x\to b}\sup A_1^*(c,b,x) = \lim_{t\to b}\sup_{t<x<b}\left(\int_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_c^x v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq A_1^*(c_1,b) + \lim_{t\to a}\left(\int_t^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_c^{c_1} v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_1^*(c_1,b) < \infty.$$

В случае $A_2$ и $A_2^*$ для любого $c \in I$

$$\lim_{x\to a}\sup A_2(a,c,x) = \lim_{t\to a}\sup_{a<x<t}\left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_a^x v(t)\left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{a<x<c_2}\left(\int_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_a^x v(t)\left(\int_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = A_2(a,c_2) < \infty$$

и аналогично

$$\lim_{x\to b}\sup A_2^*(c,b,x) \leq A_2^*(c_2,b) < \infty.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть неравенство (2) на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)$ выполнено с наилучшей константой $C = J_0(a,b)$. Пусть

$a < c^- < c < c^+ < b$. Положим

$$f_0(t) = \begin{cases} \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int\limits_a^t \rho^{1-p'}, & a < t < c^-, \\ 1, & c^- \le t \le c^+, \\ \left(\int\limits_{c^+}^{b} \rho^{1-p'}\right)^{-1} \int\limits_t^b \rho^{1-p'}, & c^+ < t < b. \end{cases} \tag{12}$$

Функция $f_0$ локально абсолютно непрерывная на $I$, и

$$\int\limits_a^b \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds = \int\limits_a^{c^-} \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds + \int\limits_{c^-}^{c^+} \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds + \int\limits_{c^+}^{b} \rho(s)|f_0'(s)|^p\,ds$$
$$= \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int\limits_a^{c^-} \rho\rho^{p(1-p')} + \left(\int\limits_{c^+}^{b} \rho^{1-p'}\right)^{-p} \int\limits_{c^+}^{b} \rho\rho^{p(1-p')}$$
$$= \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^{b} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} < \infty. \tag{13}$$

Поэтому $f_0 \in W_p^1(\rho, I)$, причем по построению

$$\lim_{t\to a+} f_0(t) \equiv f_0(a) = 0, \quad \lim_{t\to b-} f_0(t) \equiv f_0(b) = 0.$$

Тогда $f_0 \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$. Подставляя функцию $f_0$ в (2), имеем

$$J_0(a,b) \ge \frac{\left(\int\limits_a^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_a^b \rho(t)|f_0'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{14}$$

Непосредственное вычисление дает

$$\int\limits_a^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt = \int\limits_a^{c^-} v(t)|f_0(t)|^q\,dt + \int\limits_{c^-}^{c^+} v(t)|f_0(t)|^p\,dt + \int\limits_{c^+}^{b} v(t)|f_0(t)|^q\,dt$$
$$= \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt$$
$$+ \int\limits_{c^-}^{c^+} v(t)\,dt + \left(\int\limits_{c^+}^{b} \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^{b} v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt. \tag{15}$$

Из (13)–(15) получаем неравенства

$$J_0^q(a,b) \ge \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}} + \frac{\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}, \tag{16}$$

$$J_0^q(a,b) \ge \frac{\int\limits_{c^-}^c v(t)\,dt + \int\limits_c^{c^+} v(t)\,dt}{\left(\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p} + \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}. \tag{17}$$

Умножая числитель и знаменатель правых частей (16) и (17) на $\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}$, имеем

$$J_0^q(a,b) \ge \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1} \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}} + \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1} \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}, \tag{18}$$

$$J_0^q(a,b) \ge \frac{\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_{c^-}^c v(t)\,dt + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_c^{c^+} v(t)\,dt}{\left(1 + \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1} \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}. \tag{19}$$

Так как левые части (18) и (19) не зависят от $c^- \in (a,c)$, переходя к пределу при $c^- \to a$, в их правых частях получим

$$J_0^q(a,b) \ge \frac{\lim\limits_{x\to a} \sup \left(\int\limits_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int\limits_a^x v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \lim\limits_{c^-\to a} \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1} \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}} + \frac{\lim\limits_{c^-\to a} \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_{c^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(1 + \lim\limits_{c^-\to a} \left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1} \left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \limsup_{x\to a}\left(\int\limits_a^x \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p'}} \int\limits_a^x v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt = \limsup_{x\to a} A_2^q(a,c,x), \qquad (20)$$

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\limsup\limits_{x\to a}\left(\int\limits_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_x^c v(t)\,dt + \lim\limits_{c^-\to a}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_c^{c^+} v(t)\,dt}{\left(1+\lim\limits_{c^-\to a}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \limsup_{x\to a}\left(\int\limits_a^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_x^c v(t)\,dt = \limsup_{x\to a} A_1^q(a,c,x). \qquad (21)$$

Умножая числитель и знаменатель правых частей (16) и (17) на $\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}$ и переходя к пределу при $c^+ \to b$, получим

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{-q} \int\limits_a^{c^-} v(t)\left(\int\limits_a^t \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p}+1\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+ \frac{\limsup\limits_{x\to b}\left(\int\limits_x^b \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int\limits_x^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt}{\left(\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p}+1\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \limsup_{x\to b}\left(\int\limits_x^b \rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}} \int\limits_x^b v(t)\left(\int\limits_t^b \rho^{1-p'}\right)^q dt = \limsup_{x\to b}(A_2^*(c,b,x))^q, \qquad (22)$$

$$J_0^q(a,b) \geq \frac{\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_{c^-}^c v(t)\,dt + \limsup\limits_{x\to b}\left(\int\limits_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_c^x v(t)\,dt}{\left(\lim\limits_{c^+\to b}\left(\int\limits_{c^+}^b \rho^{1-p'}\right)^{p-1}\left(\int\limits_a^{c^-} \rho^{1-p'}\right)^{1-p}+1\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$= \limsup_{x\to b}\left(\int\limits_x^b \rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \int\limits_c^x v(t)\,dt = \limsup_{x\to b}(A_1^*(c,b,x))^q. \qquad (23)$$

Из (20)–(23) следует, что выполнено (7). Тогда по лемме 1 существуют серединные точки $c_i \in I$ для $(A_i, A_i^*)$, $i = 1,2$. Значит, по определению 1 $A_i(a,c_i) = A_i^*(c_i,b) \equiv T_{c_i}(a,b) < \infty$, $i = 1,2$.

Так как $A_i(a,c_i,x)$, $A_i^*(c_i,b,x)$ непрерывны по $x$ соответственно на $(a,c_i]$, $[c_i,b)$ и

$$A_i(a,c_i) \geq \limsup_{x\to a} A_i(a,c_i,x), \quad A_i^*(c_i,b) \geq \limsup_{x\to b} A_i^*(c_i,b,x),$$

имеются две возможности. Если $A_i(a,c_i)=\limsup\limits_{x\to a}A_i(a,c_i,x)$ или $A_i^*(c_i,b)=\limsup\limits_{x\to b}A_i^*(c_i,b,x)$, то из (20)–(23) имеем оценку $J_0(a,b)\ge T_{c_i}(a,b)$, $i=1,2$, т. е. выполнена левая часть оценки (6). В противном случае существуют точки $c_i^-$, $c_i^+$, $a<c_i^-\le c_i$, $c_i\le c_i^+<b$, такие, что $A_i(a,c_i)=A_i(a,c_i,c_i^-)$, $A_i^*(c_i,b)=A_i^*(c_i,b,c_i^+)$, причем $c_1^-\ne c_1$, $c_1^+\ne c_1$.

Чтобы получить левую оценку (6), в этом случае оцениваем $T_{c_1}(a,b)$, $T_{c_2}(a,b)$ по отдельности. Сначала оценим $T_{c_2}(a,b)$.

Пусть в (16) $c^-=c_2^-$. Тогда из (18) имеем

$$J_0^q(a,b)\ge\frac{\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}}\int\limits_a^{c_2^-}v(t)\left(\int\limits_a^t\rho^{1-p'}\right)^q dt\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+\frac{\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{-\frac{q}{p}}\int\limits_{c_2^+}^b v(t)\left(\int\limits_t^b\rho^{1-p'}\right)^q dt\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

(учитываем выражения для $A_2(a,c_2,c_2^-)$, $A_2^*(c_2,b,c_2^+)$)

$$=\frac{(A_2(a,c_2,c_2^-))^q\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_2^*(c_2,b,c_2^+))^q\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

(по определению точки $c_2$: $A_2(a,c_2)=A_2(a,c_2,c_2^-)$ и $A_2^*(a,c_2)=A_2^*(c_2,b,c_2^+)$)

$$=\frac{(A_2(a,c_2))^q\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_2^*(c_2,b))^q\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

(так как $c_2$ серединная точка для $(A_2,A_2^*)$)

$$=(T_{c_2}(a,b))^q\frac{\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^b\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}\ge 2^{1-\frac{q}{p}}(T_{c_2}(a,b))^q. \quad (24)$$

Оценим $T_{c_1}(a,b)$. Аналогично, полагая $c=c_1$, $c^-=c_1^-$, $c^+=c_2^+$ в (17), из

(19) получим

$$J_0^q(a,b) \ge \frac{\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\int\limits_{c_1^-}^{c_1} v(t)\,dt\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$+\frac{\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\int\limits_{c_1}^{c_1^+} v(t)\,dt\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$=\frac{(A_1(a,c_1,c_1^-))^q\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_1^*(c_1,b,c_1^+))^q\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$=\frac{(A_1(a,c_1))^q\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+(A_1^*(c_1,b))^q\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}$$

$$=(T_{c_1}(a,b))^q\frac{\left(\int\limits_{c_1^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}+\left(\int\limits_a^{c_1^-}\rho^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}}{\left(\left(\int\limits_{c_2^+}^{b}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}+\left(\int\limits_a^{c_2^-}\rho^{1-p'}\right)^{p-1}\right)^{\frac{q}{p}}}\ge 2^{1-\frac{q}{p}}(T_{c_1}(a,b))^q. \quad (25)$$

Из (24) и (25) имеем левую оценку (6). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует срединная точка $c_i \in I$ для $(A_i, A_i^*)$, $i=1,2$. Тогда $A_i(a,c_i)=A_i^*(c_i,b)=T_{c_i}(a,b)<\infty$, $i=1,2$. Так как $f(a)=f(b)=0$ для $f\in \overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)$, сужения функции $f\in \overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)$ на интервалах $(a,c_i)$ и $(c_i,b)$ соответственно принадлежат $AC_{p,l}(\rho,(a,c_i))$ и $AC_{p,r}(\rho,(c_i,b))$ .

Поэтому на основании теоремы B

$$\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^q\,dt=\int\limits_a^{c_i} v(t)|f(t)|^q\,dt+\int\limits_{c_i}^b v(t)|f(t)|^q\,dt$$

$$\le(\gamma_iA_i(a,c_i))^q\left(\int\limits_a^{c_i}\rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}+(\gamma_iA_i^*(c_i,b))^q\left(\int\limits_{c_i}^b\rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\le(\gamma_iT_{c_i}(a,b))^q\left(\int\limits_a^{c_i}\rho(s)|f'(s)|^p\,ds+\int\limits_{c_i}^b\rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$= (\gamma_i T_{c_i}(a,b))^q \left( \int\limits_a^b \rho(s)|f'(s)|^p\, ds \right)^{\frac{q}{p}},$$

т. е. выполняется неравенство (2) и для наилучшей постоянной $C = J_0(a,b)$ в (2) имеет место оценка

$$J_0(a,b) \le \min\{\gamma_1 T_{c_1}(a,b), \gamma_2 T_{c_2}(a,b)\},$$

которая дает правую часть (6). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 расширяет оценки величины $J_0(a,b)$, приведенные в [1]. Например, в теореме 8.8 из [1] в предположении $A_1(a,a) = A_1^*(b,b) = 0$ (что равносильно условиям $\lim\limits_{x\to a} A_1(a,c,x) = 0$, $\lim\limits_{x\to b} A_1^*(c,b,x) = 0$) получено

$$2^{-\frac{1}{p}} A \le J_0(a,b) \le \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} A,$$

где $A = \inf\limits_{a<c<b} \max\{A_1(a,c), A_1^*(c,b)\}$.

В указанных предположениях легко установить, что $A = T_1(a,b)$.

Пусть

$$\int\limits_a^c \rho^{1-p'}(s)\, ds < \infty, \quad \int\limits_c^b \rho^{1-p'}(s)\, ds = \infty, \quad c \in I, \tag{26}$$

или

$$\int\limits_a^c \rho^{1-p'}(s)\, ds = \infty, \quad \int\limits_c^b \rho^{1-p'}(s)\, ds < \infty, \quad c \in I. \tag{27}$$

**Теорема 2.** *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Если выполняется (26) или (27), то для наилучшей постоянной $J_0(a,b)$ в (2) соответственно имеет место оценка*

$$\max\{A_1(a,b), A_2(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{\gamma_1 A_1(a,b), \gamma_2 A_2(a,b)\} \tag{28}$$

*или*

$$\max\{A_1^*(a,b), A_2^*(a,b)\} \le J_0(a,b) \le \min\{\gamma_1 A_1^*(a,b), \gamma_2 A_2^*(a,b)\}. \tag{29}$$

Доказательство теоремы 2. Так как множество $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ всюду плотно в $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I)$,

$$J_0(a,b) = \sup_{f \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho,I)} \frac{\left(\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{f \in \overset{\circ}{W}_p(\rho,I)} \frac{\left(\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_a^b \rho(t)|f'(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{30}$$

Пусть выполнены условия (26). Тогда по п. (ii) теоремы A $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = \{f \in W_p^1(\rho, I) : f(a) = 0\} = AC_{p,l}(\rho, I)$. Следовательно, $J_0(I) = J_l(I)$, и оценка (28) вытекает из теоремы B. Аналогично доказывается справедливость оценки (29) в случае (27). Теорема 2 доказана.

Наконец, пусть

$$\int\limits_a^c \rho^{1-p'}(s)\, ds = \infty, \quad \int\limits_c^b \rho^{1-p'}(s)\, ds = \infty, \quad c \in I. \tag{31}$$

**Теорема 3.** *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и выполняется* (31). *Тогда неравенство* (2) *не имеет места на множестве* $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I)$, *т. е.* $J_0(a,b) = \infty$.

Доказательство теоремы 3. По условию выполнено (31). Тогда по теореме A (п. (iv)) $\overset{\circ}{W}_p(\rho, I) = W_p^1(\rho, I)$. Так как $f(x) \equiv 1 \in W_p^1(\rho, I)$, на основании (30) $J_0(a,b) = \infty$. Теорема 3 доказана.

**3.2. Случай** $0 < q < p < \infty$**.**

Определение 2. Точку $c \in I$ назовем *серединной точкой для* $(B, B^*)$, если $B(a,c) = B^*(c,b) \equiv T(a,b) < \infty$.

Очевидно, что для существования серединной точки для $(B, B^*)$ необходимо и достаточно, чтобы $B(a,\beta) < \infty$, $\beta \in I$, $B^*(\alpha, b) < \infty$, $\alpha \in I$.

**Теорема 4.** *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ *и выполняется* (5). *Тогда неравенство* (2) *выполнено на множестве* $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ *тогда и только тогда, когда существует серединная точка* $c \in I$ *для* $(B, B^*)$, *при этом для наилучшей постоянной* $J_0(a,b)$ *в* (2) *имеет место оценка*

$$q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} T(a,b) \le J_0(a,b) \le 2^{\frac{p-q}{pq}} \mu^+ T(a,b). \tag{32}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $0 < q < p < \infty$, $p > 1$ и (2) выполнено на множестве $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$ с постоянной $C = J_0(a,b)$.

Пусть $a < \alpha < \beta < b$. Тогда в силу условий на весовые функции $v$ и $\rho$ величины $B(\alpha, c)$, $c \in (\alpha, b)$, $B^*(c, \beta)$, $c \in (a, \beta)$ конечны. Тем самым существует серединная точка $c = c(\alpha, \beta) \in (\alpha, \beta)$ для $B(\alpha, \beta)$ и $B^*(\alpha, \beta)$, т. е.

$$\int_\alpha^c \left(\int_x^c v\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx$$
$$= \int_c^\beta \left(\int_c^x v\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\int_x^\beta \rho^{1-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx. \tag{33}$$

Введем функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & a < t \le \alpha, \\ \frac{1}{b_1} \int_\alpha^t \left(\int_x^c v\right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx, & \alpha \le t \le c, \\ \frac{1}{b_2} \int_t^\beta \left(\int_c^x v\right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int_x^\beta \rho^{1-p'}\right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx, & c \le t \le \beta, \\ 0, & \beta \le t < b, \end{cases}$$

где

$$b_1 = \int_\alpha^c \left(\int_x^c v\right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\int_\alpha^x \rho^{1-p'}\right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\,dx,$$

$$b_2 = \int_c^\beta \left( \int_c^x v \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_x^\beta \rho^{1-p'} \right)^{\frac{(q-1)}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\, dx.$$

Очевидно, что $f_0 \in \overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$. Для функции $f_0$ имеем

$$\left( \int_a^b \rho(t)|f_0'(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{1}{b_1^p} (B(\alpha,c))^{\frac{qp}{p-q}} + \frac{1}{b_2^p} (B^*(c,\beta))^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (T(\alpha,\beta))^{\frac{q}{p-q}} \left( \frac{1}{b_1^p} + \frac{1}{b_2^p} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (34)$$

$$\int_a^b v(t)|f_0(t)|^q\, dt = \int_\alpha^c v(t)(f_0(t))^q\, dt + \int_c^\beta v(t)(f_0(t))^q\, dt$$

$$= q \int_\alpha^c f_0'(t)(f_0(t))^{q-1} \int_t^c v(s)\, ds dt + q \int_c^\beta (-f_0'(t))(f_0(t))^{q-1} \int_c^t v(s)\, ds dt. \quad (35)$$

Так как

$$f_0(t) \geq \frac{1}{b_1} \left( \int_t^c v \right)^{\frac{1}{p-q}} \int_\alpha^t \left( \int_\alpha^x \rho^{1-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \rho^{1-p'}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{b_1} \frac{p-q}{p-1} \left( \int_t^c v \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_\alpha^t \rho^{1-p'} \right)^{\frac{p-1}{p-q}}$$

при $\alpha \leq t \leq c$ и аналогично

$$f_0(t) \geq \frac{1}{b_1} \frac{p-q}{p-1} \left( \int_c^t v \right)^{\frac{1}{p-q}} \left( \int_t^\beta \rho^{1-p'} \right)^{\frac{p-1}{p-q}}$$

при $c \leq t \leq \beta$, имеем

$$\int_\alpha^c f_0'(t)(f_0(t))^{q-1} \int_t^c v(s)\, ds dt \geq \left( \frac{1}{b_1} \frac{p-q}{p-1} \right)^{q-1} (B(\alpha,c))^{\frac{pq}{p-q}},$$

$$\int_c^\beta (-f_0'(t))(f_0(t))^{q-1} \int_c^t v(s)\, ds dt \geq \left( \frac{1}{b_2} \frac{p-q}{p-1} \right)^{q-1} (B^*(c,\beta))^{\frac{pq}{p-q}}.$$

Поэтому согласно (35)

$$\left( \int_a^b v(t)|f_0(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \geq q^{\frac{1}{q}} \left( \frac{p-q}{p-1} \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \frac{1}{b_1^q} (B(\alpha,c))^{\frac{qp}{p-q}} + \frac{1}{b_2^q} (B^*(c,\beta))^{\frac{qp}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= q^{\frac{1}{q}} \left( \frac{p-q}{p-1} \right)^{\frac{1}{q'}} (T(\alpha,\beta))^{\frac{p}{p-q}} \left( \frac{1}{b_1^q} + \frac{1}{b_2^q} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поскольку $\frac{p}{q} > 1$, то $\left[\left(\frac{1}{b_1^q} + \frac{1}{b_2^q}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{1}{b_1^p} + \frac{1}{b_2^p}\right)^{\frac{1}{p}}$. Тем самым

$$\left(\int\limits_a^b v(t)|f_0(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \geq q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}}(T(\alpha,\beta))^{\frac{p}{p-q}}\left(\frac{1}{b_1^p} + \frac{1}{b_2^p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{36}$$

Из (2), (34) и (36) вытекает, что

$$q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} T(\alpha,\beta) \leq J_0(a,b). \tag{37}$$

Из абсолютной непрерывности интеграла легко следует, что $T(\alpha,\beta)$ непрерывна по $\alpha,\beta$ при $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Значит, из независимости от $\alpha,\beta$, $a < \alpha < \beta < b$, правой части (37) имеем

$$q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} T(a,b) \leq J_0(a,b), \tag{38}$$

т. е. существует серединная точка $c \in I$ для $(B, B^*)$ и выполнена оценка (38).

Достаточность. Пусть существует серединная точка $c \in I$ для $(B, B^*)$, т. е. $B(a,c) = B^*(c,b) = T(a,b) < \infty$. Рассуждая так же, как при доказательстве достаточной части теоремы 1, на основании теоремы C имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b v(t)|f(t)|^q\,dt &= \int\limits_\alpha^c v(t)|f(t)|^q\,dt + \int\limits_c^\beta v(t)|f(t)|^q\,dt \\
&\leq (\mu^+ B(a,c))^q\left(\int\limits_a^c \rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}} + (\mu^+ B^*(c,b))^q\left(\int\limits_c^b \rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}} \\
&\leq (\mu^+ T(a,b))^q 2^{\frac{p-q}{p}}\left(\int\limits_\alpha^c \rho(s)|f'(s)|^p\,ds + \int\limits_c^\beta \rho(s)|f'(s)|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}},
\end{aligned}$$

т. е. неравенство (2) выполняется с оценкой $J_0(a,b) \leq \mu^+ 2^{\frac{p-q}{pq}} T(a,b)$, которая вместе с (38) дает (32). Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Сравнение оценки (32) с оценкой

$$2^{-\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{q'}} \widetilde{B} \leq J_0(a,b) \leq 2^{\frac{p-q}{pq}}(p')^{\frac{1}{pq'}} q^{\frac{1}{q}} \widetilde{B},$$

где $\widetilde{B} = \min\limits_{a<c<b} \max\{B(a,c), B(b,c)\}$, полученной для случая $1 \leq q < p < \infty$ в теореме 8.17 из [1], показывает, что оценка в (32) лучше, чем в [1].

**Теорема 5.** *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$. *Если выполняется* (26) *или* (27), *то для наилучшей постоянной* $J_0(a,b)$ *в* (2) *соответственно имеют место оценки* $\mu^- B(a,b) \leq J_0(a,b) \leq \mu^+ B(a,b)$ *или* $\mu^- B^*(a,b) \leq J_0(a,b) \leq \mu^+ B^*(a,b)$.

**Теорема 6.** *Пусть* $0 < q < p < \infty$, $p > 1$, *и выполняется* (31). *Тогда неравенство* (2) *не выполняется на множестве* $\overset{\circ}{AC}_p(\rho, I)$, *т. е.* $J_0(a,b) = \infty$.

Теоремы 5 и 6 доказываются аналогично теоремам 2 и 3 соответственно.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Opic B., Kufner A.* Hardy-type inequalities. Harlow: Longman, 1990.
2. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type. New Jersey; London; Singapore; Hong Kong: World Sci., 2003.
3. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy inequality. About its history and some related results. Pilsen, 2007.
4. *Gogatishvili A., Kufner A., Persson L.-E., Wedestig A.* An equivalence theorem for integral conditions related to Hardy's inequality // Real Anal. Exchange. 2003/2004. V. 29. P. 867–880.
5. *Kufner A., Persson L.-E., Wedestig A.* A study of some constants characterizing the weighted Hardy inequality // Banach Center Publ. Warsaw: Polish Acad. Sci., 2004. V. 64. Orlicz Centenary Volume. P. 135–146.
6. *Drabek P., Kufner A.* Hardy inequality and properties of the quasilinear Sturm–Liouville problem // Rend. Lincei Mat. Appl. 2007. V. 18. P. 125–138.
7. *Oinarov R., Rakhimova S. Y.* Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equations // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 2. P. 110–124.
8. *Oinarov R., Rakhimova S. Y.* Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order // Electron. J. Qual. Theory of Differ. Equ., Hungary. 2010. V. 49. P. 1–15.
9. *Kudabayeva S. Y., Oinarov R.* The criteria of disconjugate of half–linear second order differential equations // Math. J., Kazakhstan. 2010. V. 10, N 2. P. 56–67. (in Russian).
10. *Лизоркин П. И.* О замыкании множества финитных функции в весовом пространстве $W^l_{p,\phi}$ // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 789–792.
11. *Кудрявцев Л. Д.* О плотности финитных функций в весовых пространствах // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 1. С. 46–49.
12. *Oinarov R.* On weighted norm inequalities with three weights // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 2. P. 103–116.
13. *Persson L.-E., Stepanov V. D.* Weighted integral inequalities with the geometric mean operator // J. Inequal. Appl. 2002. V. 7, N 5. P. 727–746.
14. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. Math. Soc. 1996. V. 54, N 2. P. 89–101.


*Статья поступила 29 июля 2013 г.*

Абылаева Акбота Мухамедяровна, Байарыстанов Аскар Ойнарович,
Ойнаров Рыскул
Евразийский нац. университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мирзояна, 2, Астана 010080, Казахстан
abylayeva_b@mail.ru, oskar_62@mail.ru, o_ryskul@mail.ru