Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2014. Том 55, № 3

УДК 511

ГАМИЛЬТОНОВО ЗАМЫКАНИЕ НА УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБРАХ

А. Г. Пинус

Аннотация. Вводится понятие гамильтонова замыкания подалгебр универсальных алгебр. Получен ряд свойств этого замыкания и свойств решеток гамильтоново замкнутых подалгебр универсальных алгебр.

Ключевые слова: подалгебры и конгруэнции универсальных алгебр, гамильтоново замыкание подалгебры, решетки гамильтоново замкнутых подалгебр, гамильтоново простые алгебры.

Одним из традиционных вопросов, связанных с универсальной алгеброй, является проблема взаимосвязи между собой различных производных объектов (подалгебр, автоморфизмов, эндоморфизмов, конгруэнций и т. д.) универсальных и классических алгебр. Наиболее известна эта проблематика в случае традиционной теории Галуа, рассматривающей взаимосвязи между автоморфизмами алгебр и подалгебрами их неподвижных точек (см., например, [1, 2]).

Другая взаимосвязь подобных производных объектов отражена в понятии гамильтоновой алгебры. Под конгруэнц-классом впредь будем понимать произвольный класс эквивалентности для любой конгруэнции рассматриваемой алгебры. Напомним (см., например, [3, 4]), что универсальная алгебра называется *гамильтоновой*, если любая ее подалгебра является конгруэнц-классом. Многообразие, состоящее из гамильтоновых алгебр, называется *гамильтоновым*. Характеризация гамильтоновых алгебр в терминах полиномиальных функций дана Кишем [5]. Характеризация гамильтоновых многообразий мальцевского типа получена Клуковичем [6]. Подробнее об этом см., к примеру, [3, 4]. Если $\mathfrak{B}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, являющаяся ее конгруэнц-классом, то через $\theta_{\mathfrak{B}}$ обозначим наименьшую конгруэнцию алгебры $\mathfrak{A}$, для которой $\mathfrak{B}$ является классом эквивалентности. При этом отметим, что если $\psi_{\mathfrak{B}}$ — естественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\theta_{\mathfrak{B}}$, то в последней элемент $\psi_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B})$ является идемпотентом.

Отметим также известный факт, состоящий в том, что любое гамильтоново многообразие абелево. Для локально конечных многообразий, как доказано Кишем и Валериотом, верно и обратное: любое локально конечное абелево многообразие гамильтоново. Подробнее см. [4].

Настоящая работа посвящена рассмотрению некоторой операции замыкания $\mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{B}}$ на решетке $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}$ подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$, естественным образом связанной с конгруэнциями этой алгебры, с вопросами ее аппроксимации, и являющейся тождественной для гамильтоновых алгебр.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по государственному заданию № 2014/138 (проект 1052).

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ — произвольная универсальная алгебра, а $\mathfrak{B} = \langle B;\sigma\rangle$ — некоторая ее подалгебра. Совокупность подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$, включающих в себя $\mathfrak{B}$ и являющихся конгруэнц-классами для $\mathfrak{A}$, непуста (содержит, к примеру, алгебру $\mathfrak{A}$) и замкнута относительно произвольных пересечений. Тем самым существует наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, включающая в себя подалгебру $\mathfrak{B}$ и являющаяся конгруэнц-классом алгебры $\mathfrak{A}$. Обозначим эту подалгебру через $\overline{\mathfrak{B}}$ и назовем ее *гамильтоновым замыканием подалгебры* $\mathfrak{B}$. Таким образом, все подалгебры гамильтоновой алгебры гамильтоново замкнуты. Для подгрупп $\mathfrak{B}$ группы $\mathfrak{A}$ замыкание $\overline{\mathfrak{B}}$ — это наименьшая нормальная подгруппа группы $\mathfrak{A}$, включающая в себя $\mathfrak{B}$. Для подколец $\mathfrak{B}$ кольца $\mathfrak{A}$ замыкание $\overline{\mathfrak{B}}$ — это наименьший идеал кольца $\mathfrak{A}$, включающий в себя $\mathfrak{B}$. Для подрешеток $\mathfrak{B} = \langle;\wedge,\vee\rangle$ линейно упорядоченной решетки $\mathfrak{A}$ замыкание $\overline{\mathfrak{B}}$ есть выпуклая оболочка подмножества B в $\mathfrak{A}$. Очевидно, что операция $\mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{B}}$ на решетке $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}$ действительно является операцией замыкания. А именно, для любых подалгебр $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ алгебры $\mathfrak{A}$

(1) $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2 \to \overline{\mathfrak{B}}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}_2$;

(2) $\mathfrak{B}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}_1$;

(3) $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_1 = \overline{\mathfrak{B}}_1$.

В то же время гамильтоново замыкание не коммутирует с операциями $\wedge$ и $\vee$ на решетке $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}$. Действительно, рассмотрим, к примеру, простую решетку $M_3 = \langle\{0,1,a,b,c\};\wedge,\vee\rangle$, где 0 (1) — наименьший (наибольший) ее элемент и $a\vee b = a\vee c = b\vee c = 1$, $a\wedge b = a\wedge c = b\wedge c = 0$. Пусть $\mathfrak{B}_1 = \langle\{a\};\wedge,\vee\rangle$, $\mathfrak{B}_2 = \langle\{c\};\wedge,\vee\rangle$. Тогда $\overline{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{B}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}_2 = \mathfrak{B}_2$ и $\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \overline{\mathfrak{B}}_2 = \langle\{0,1,a,c\};\wedge,\vee\rangle$, но так как M_3 проста и $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 = \langle\{0,1,a,c\};\wedge,\vee\rangle$, имеем $\overline{\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2} = M_3$, т. е. $\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \overline{\mathfrak{B}}_2 \neq \overline{\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2}$. Пусть $\mathfrak{C}_1 = \langle\{0,a\};\wedge,\vee\rangle$, $\mathfrak{C}_2 = \langle\{0,c\};\wedge,\vee\rangle$. Тогда $\overline{\mathfrak{C}}_1 = \overline{\mathfrak{C}}_2 = M_3$, $\mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2 = \langle\{0\};\wedge,\vee\rangle$ и $\overline{\mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2} = \mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2$, т. е. $\overline{\mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2} \neq \overline{\mathfrak{C}}_1 \wedge \overline{\mathfrak{C}}_2$.

Отметим локальный характер гамильтонова замыкания. Это вытекает из приведенного ниже (лемма 1) индуктивного описания элементов гамильтонова замыкания $\overline{\mathfrak{B}}$ подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры, основанного, в свою очередь, на известной лемме Мальцева (см., к примеру, [7, 8]) о строении конгруэнций универсальных алгебр.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$ — произвольная универсальная алгебра. Напомним, что одноместная функция $p(x)$ на множестве A называется *полиномиальной* для $\mathfrak{A}$, если для некоторого терма $t(x, y_1, \dots, y_n)$ сигнатуры σ и некоторых элементов $c_1, \dots, c_n$ из A имеет место $p(x) = t(x, c_1, \dots, c_n)$. Напомним также утверждение леммы Мальцева о конгруэнциях. Для любого подмножества B множества A через θ^B обозначим наименьшую конгруэнцию алгебры A, относительно которой все элементы из B эквивалентны.

Лемма Мальцева. *Для любой алгебры $\mathfrak{A}\langle A;\sigma\rangle$, любого $B \subseteq A$ и любых $a, c \in A$ отношение $\theta^B(a, c)$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют натуральное n, полиномиальные функции $p_0(x), \dots, p_n(x)$ алгебры $\mathfrak{A}$ и элементы $b_0, \dots, b_n, b'_0, \dots, b'_n$ из B такие, что $a = p_0(b_0)$, $c = p_n(b'_n)$ и $p_i(b'_i) = p_{i+1}(b_{i+1})$ для любого $i < n$.*

Пусть $\mathfrak{B} = \langle B;\sigma\rangle$ — некоторая подалгебра алгебры $\mathfrak{A} = \langle A;\sigma\rangle$. Определим возрастающую цепочку подмножеств

$$B_0 = B \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B_n \subseteq B_{n+1} \subseteq \dots$$

множества A следующей индукцией: для любого $n \in \omega$ положим $B_{n+1} = B_n \cup$

$\{p(b) \mid p(x)$ — произвольная полиномиальная для $\mathfrak{A}$ функция и $a, b \in B$ таковы, что $p(a) \in B_n\}$.

Лемма 1. *Для любой подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ имеет место $\overline{\mathfrak{B}} = \langle \overline{B}; \sigma\rangle$, где $\overline{B} = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$.*

Доказательство. В силу леммы Мальцева подмножество D множества A является конгруэнц-классом для $\mathfrak{A}$, если для любых $a, b \in D$ и любой полиномиальной функции $p(x)$ такой, что $p(a) \in D$, имеет место включение $p(b) \in D$. Таким образом, $\overline{B}$ является наименьшим конгруэнц-классом, включающим в себя множество B, и для доказательства того, что $\overline{\mathfrak{B}} = \langle \overline{B}; \sigma\rangle$, достаточно заметить, что $\langle \overline{B}; \sigma\rangle$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in \sigma$, $a_1, \dots, a_n \in \overline{B}$. Необходимо показать, что $f(a_1, \dots, a_n) \in \overline{B}$. Пусть $m \in \omega$ таково, что $a_1, \dots, a_n \in B_m$. Покажем, что $f(a_1, \dots, a_n) \in B_{m+n}$. Пусть $b \in B$, тогда $f(b, \dots, b) \in B$. Для полиномиальной функции $p_1(x) = f(x, b, \dots, b)$, стало быть, $b, a_1 \in B_m$, $p_1(b) \in B_m$, а значит, и $p_1(a_1) = f(a_1, b, \dots, b) \in B_{m+1}$. Поэтому для полиномиальной функции $p_2(x) = f(a_1, x, b, \dots, b)$ имеет место $b, a_2 \in B_{m+1}$, $p_2(b) \in B_{m+1}$, следовательно, $p_2(a_2) = f(a_1, a_2, b, \dots, b) \in B_{m+2}$. Продолжая рассуждения, получаем, что $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B_{m+n}$. Таким образом, $\langle \overline{B}; \sigma\rangle$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. $\langle \overline{B}; \sigma\rangle = \overline{\mathfrak{B}}$, и лемма доказана.

В качестве первого следствия из этой леммы прежде всего отметим критерий гамильтоновой замкнутости подалгебр, вытекающий из ее утверждения.

Утверждение 1. *Подалгебра $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ гамильтоново замкнута ($\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$) тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in B$ и любой полиномиальной функции $p(x)$ такой, что $p(a) \in B$, имеет место включение $p(b) \in B$.*

Из этого утверждения непосредственно вытекает локальный характер гамильтонова замыкания. Пусть $\mathrm{Sub}_{fg}\,\mathfrak{A}$ — совокупность всех конечно порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.

Утверждение 2. *Для любой подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место*

$$\overline{\mathfrak{B}} = \bigcup_{\mathfrak{C} \in \mathrm{Sub}_{fg}\,\mathfrak{B}} \overline{\mathfrak{C}}.$$

Для любой подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ через $\mathfrak{A}_B$ обозначим обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ до сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \{P\}$, где P — новый одноместный предикат, интерпретируемый в алгебре $\mathfrak{A}_B$ множеством B.

Очевидным образом из утверждения 1 вытекает

Утверждение 3. *Для любой подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ не более чем счетной сигнатуры σ существует $L_{\omega_1\omega}$-формула $\Phi(x)$ сигнатуры σ', определяющая в алгебре $\mathfrak{A}_B$ подалгебру $\overline{\mathfrak{B}}$.*

В свою очередь, это утверждение влечет следующее

Утверждение 4. *Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ не более чем счетной сигнатуры σ, любой ее подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$ и любого автоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ такого, что $\varphi(B) = B$, имеет место равенство $\varphi(\overline{B}) = \overline{B}$.*

Представляет интерес вопрос о необходимости в этом утверждении ограничения на сигнатуру алгебры $\mathfrak{A}$.

Совокупность всех гамильтоново замкнутых подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$. Чтобы была возможность рассматривать совокупность $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$, упорядоченную отношением теоретико множественного включения, как решетку (в случае необходимости включения в решетку $\operatorname{Sub} \mathfrak{A}$ пустого множества), добавим формально к решетке $\operatorname{Con} \mathfrak{A}$ конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ в качестве внешнего нуля пустое отношение как конгруэнцию алгебры $\mathfrak{A}$ с единственным конгруэнц-классом: пустым множеством. Подобное расширение решетки $\operatorname{Con} \mathfrak{A}$ обозначим через $\operatorname{Con}_0 \mathfrak{A}$. Тем самым пустая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ (в случае ее вхождения в $\operatorname{Sub} \mathfrak{A}$) гамильтоново замкнута.

Непосредственно можно заметить, что совокупность гамильтоново замкнутых подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ образует полную (более того, алгебраическую) решетку, обозначаемую далее через $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$. При этом в силу отмеченных выше возможных неравенств

$$\overline{\mathfrak{B}}_1 \vee \overline{\mathfrak{B}}_2 \neq \overline{\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2}, \quad \overline{\mathfrak{B}}_1 \wedge \overline{\mathfrak{B}}_2 \neq \overline{\mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{B}_2}$$

решетка $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$, вообще говоря, не является подрешеткой решетки $\operatorname{Sub} \mathfrak{A}$. При этом компактными элементами решетки $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$ являются гамильтоновы замыкания конечно порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$, которые, как показывает пример решетки

$$M_\infty = \langle \{0, 1, a_n \mid n \in \omega\}; \wedge, \vee \rangle$$

(здесь $a_i \wedge a_j = 0, a_i \vee a_j = 1$ при $i \neq j$), могут сами не являться конечно порожденными. Действительно, пусть $M_m = \langle \{0, 1, a_n \mid n \leq m\}; \wedge, \vee \rangle$ для $m \in \omega$. Тогда $\overline{M}_2 = M_\infty$, но любая конечно порожденная подрешетка решетки M_∞ содержится в решетке вида M_m для некоторого $m \in \omega$, т. е. отличается от M_∞.

Традиционно для любой решетки L и любого элемента c из L через $L_{\geq c}$ обозначим главный фильтр $\{d \in L \mid d \geq c\}$ решетки L, порожденный элементом c. Очевидно, что любой конгруэнц-класс алгебры $\mathfrak{A}$, включающий в себя некоторую подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, является гамильтоново замкнутой подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$. Напомним, что для любой гамильтоново замкнутой подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ через $\theta_{\mathfrak{B}}$ обозначена наименьшая конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{B}$ является ее конгруэнц-классом. Тем самым для любой непустой подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ если $b \in \mathfrak{B}$, то отображение $\varphi(\theta) = b/\theta$ будет отображением главного фильтра $\operatorname{Con} \mathfrak{A}_{\geq \theta_{\overline{\mathfrak{B}}}}$ решетки $\operatorname{Con} \mathfrak{A}$ на главный фильтр $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A} \geq \overline{\mathfrak{B}}$ решетки $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$, являющимся гомоморфизмом этих фильтров как решеток. Отсюда вытекает

Утверждение 5. *Любое тождество, истинное на решетке* $\operatorname{Con} \mathfrak{A}$, *истинно и на любом собственном главном фильтре решетки* $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$, *а в случае, когда наименьшая подалгебра алгебры* $\mathfrak{A}$ *непуста, и на решетке* $\operatorname{Sub}_H \mathfrak{A}$.

Так как решетка конгруэнций любой решетки дистрибутивна, в частности, имеет место

Следствие 1. *Для любой решетки L любой собственный главный фильтр решетки* $\operatorname{Sub}_H L$ *является дистрибутивной решеткой.*

Выше отмечен результат Киша и Валериота: любое локально конечное абелево многообразие гамильтоново. Этот результат и утверждение 5 влекут

Следствие 2. *Для любой алгебры $\mathfrak{A}$ из локально конечного абелева конгруэнц-модулярного многообразия любой собственный главный фильтр решетки* $\operatorname{Sub} \mathfrak{A}$ *модулярен (если наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ непуста, то модулярной будет и* $\operatorname{Sub} \mathfrak{A}$).

Естествен интерес к различным экстремальным ситуациям, связанным с операцией гамильтонова замыкания. Одна из них соответствует понятию гамильтоновой алгебры, когда все подалгебры алгебры гамильтоново замкнуты, другая (противоположная) — когда гамильтоново замыкание любой неодноэлементной подалгебры рассматриваемой алгебры совпадает с самой алгеброй, т. е. когда гамильтоново замкнутые подалгебры данной алгебры суть она сама и ее идемпотенты. Назовем подобные алгебры *гамильтоново простыми*. Очевидно, что простые алгебры (не имеющие нетривиальных конгруэнций) гамильтоново простые. Следующий пример показывает, что обратное неверно. Пусть A совпадает с дизъюнктным объединением равномощных множеств B и B'. Пусть f — биекция B на B' и f тождественна на B', g — биекция B' на B и g тождественна на B, при этом для любых $b \in B$, $b' \in B'$ выполняется

$$g(f(b)) \neq b, \quad f(g(b')) \neq b'.$$

Пусть $d(x, y, z)$ совпадает с дискриминаторной функцией и на B, и на B', а если $\{a, b, c\} \nsubseteq B$ и $\{a, b, c\} \nsubseteq B'$, то $d(a, b, c) = a$. Непосредственно замечаем, что разбиение $\{B, B'\}$ множества A соответствует нетривиальной конгруэнции алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; f, g, d\rangle$ и, значит, алгебра $\mathfrak{A}$ не проста. В то же время любая подалгебра $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ содержит две пары элементов, одна из которых лежит в B, другая — в B'. Тем самым в силу вхождения в сигнатуру функции d (являющейся дискриминатором на B и на B') любой конгруэнц-класс алгебры $\mathfrak{A}$, включающий в себя некоторую подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, будет совпадать с A, т. е. алгебра $\mathfrak{A}$ гамильтоново проста, но не является простой. Другим примером гамильтоново простых, но не простых алгебр являются любые недвухэлементные булевы алгебры и вообще любая не простая ограниченная решетка с дополнениями в сигнатуре $\langle \wedge, \vee, \neg\rangle$. Гамильтоново простым, но не простым будет и любое не простое кольцо с единицей в сигнатуре $\langle +, \cdot, 0, 1\rangle$.

Заметим, что классы гамильтоновых и гамильтоново простых алгебр не более чем счетной сигнатуры аксиоматизируемы в языке $L_{\omega_1\omega}$. Прежде всего заметим, что в силу следствия 2 (о локальном характере гамильтонова замыкания) для доказательства гамильтоновости алгебры достаточно доказать равенства $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}$ для ее конечно порожденных подалгебр. Тем самым класс гамильтоновых алгебр выделяется в классе всех алгебр данной сигнатуры σ формулами вида

$$\forall x_1, \dots, x_n \forall x \Bigg(\Phi'_n(x) \to \bigvee_{t(x_1,\dots,x_n)\in T^n_\sigma} (x = t(x_1, \dots, x_n))\Bigg),$$

где T^n_σ — совокупность всех термов сигнатуры σ от переменных $x_1, \dots, x_n$, а $\Phi'_n(x)$ — $L_{\omega_1\omega}$-формула, получаемая из $L_{\omega_1\omega}$-формулы $\Phi(x)$ сигнатуры σ' (см. утверждение 3) заменой предиката $P(x)$ $L_{\omega_1\omega}$-формулой

$$\bigvee_{t(x_1,\dots,x_n)\in T^n_\sigma} x = t(x_1, \dots, x_n).$$

Точно так же очевидно, что $L_{\omega_1\omega}$-формула

$$\forall x_1, x_2 (x_1 \neq x_2 \to \forall x \Phi'_2(x))$$

выделяет в классе всех алгебр сигнатуры σ совокупность гамильтоново простых алгебр.

Тем самым имеет место

Утверждение 6. *Классы всех гамильтоновых и гамильтоново простых алгебр фиксированной не более чем счетной сигнатуры аксиоматизируемы $L_{\omega_1\omega}$-формулами в классе всех алгебр этой сигнатуры.*

Теорема Левенгейма — Сколема — Тарского для языка $L_{\omega_1\omega}$ (см., к примеру, [9]) наряду с утверждением 6 влечет следующее

Утверждение 7. *Для любого аксиоматизируемого (в языке узкого исчисления предикатов) класса $\mathscr{K}$ алгебр не более чем счетной сигнатуры существование гамильтоновой (гамильтоново простой) $\mathscr{K}$-алгебры бесконечной мощности k влечет существование гамильтоновой (гамильтоново простой) $\mathscr{K}$-алгебры любой бесконечной мощности, не превышающей мощности k. В случае, когда $k \geq \beth_{\omega_1}$ гамильтоновы (гамильтоновы простые), $\mathscr{K}$-алгебры существуют любой бесконечной мощности.*

Среди естественных остающихся открытыми вопросов, связанных с операцией гамильтонова замыкания, отметим следующие:

1) дать абстрактное описание решеток $\mathrm{Sub}_H\,\mathfrak{A}$ гамильтоново замкнутых подалгебр универсальных алгебр (выше замечено, что эти решетки алгебраические);

2) дать абстрактное описание пар вида $\langle \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}, \mathrm{Sub}_H\,\mathfrak{A}\rangle$ для универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ (заметим, что выше отмечено, что $\mathrm{Sub}_H\,\mathfrak{A}$ является решеточно упорядоченным подмножеством в решетке $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$, не обязанным быть подрешеткой этой решетки).

При этом довольно широк диапазон возможностей для $\mathrm{Sub}_H\,\mathfrak{A}$ как подмножеств одной и той же решетки $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$: от равенства $\mathrm{Sub}_H\,\mathfrak{A} = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ (т. е. случая гамильтоновости алгебры $\mathfrak{A}$) до $|\,\mathrm{Sub}_H\,\mathfrak{A}| = 1$ (т. е. случая гамильтоновой простоты алгебры $\mathfrak{A}$). Действительно, для любой дистрибутивной решетки L_n существует унар $\mathfrak{A}$ (алгебра сигнатуры, состоящей лишь из одноместных функций) без идемпотентов с решеткой подалгебр, изоморфной решетке L. Очевидно, что в этом случае $\mathfrak{A}$ является гамильтоновой алгеброй. Обогащение $\mathfrak{A}$ до алгебры $\mathfrak{A}'$ путем добавления в ее сигнатуру дискриминаторной функции сохраняет решетки подалгебр ($\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}' = \mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$), но превращает гамильтонову алгебру $\mathfrak{A}$ в простую и, значит, в гамильтоново простую алгебру $\mathfrak{A}'$.

Наконец заметим, что двойственное к гамильтоновости требование: все конгруэнц-классы алгебры $\mathfrak{A}$ являются ее подалгебрами, очевидным образом равносильно требованию идемпотентности алгебры $\mathfrak{A}$ (т. е. тому, что любое одноэлементное подмножество основного множества алгебры $\mathfrak{A}$ является ее подалгеброй).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979.

2. *Пинус А. Г.* О классическом Галуа-замыкании для универсальных алгебр // Изв. вузов. Математика. 2014. № 2. С. 47–53.

3. *Chajda I., Eigenthaler G., Langer H.* Congruence classes in universal algebra. Vienna: Heldermann-Verl., 2003.

4. *Jezek J.* Universal Algebra // www.Karlin.mff.cuni.cz. 2008.

5. *Kiss E. W.* Each Hamiltonian variety has the congruence extension property // Algebra Univers. 1981. V. 12, N 2. P. 395–398.

6. *Klukovits L.* Hamiltonian varieties of universal algebras // Acta Sci. Math. (Szeged). 1975. V. 37, N 1. P. 11–15.

7. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем // Мат. сб. 1954. Т. 35, № 1. С. 3–20.

8. *Пинус А. Г.* Производные структуры универсальных алгебр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.

9. *Keisler H. J.* Model theory for infinitary logic. Amsterdam: North Holland Publ. Comp., 1971.

Статья поступила 24 января 2013 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru