Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 513.82

О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ 1–ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М. Б. Банару

Аннотация. Доказано, что почти контактная метрическая структура на ориентируемой гиперповерхности с типовым числом 1 келерова многообразия является косимплектической.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, косимплектическая структура, типовое число, гиперповерхность, келерово многообразие.

Класс келеровых многообразий — самый простой и хорошо изученный класс почти эрмитовых многообразий. Он входит в состав любого из шестнадцати классов Грея — Херveллы почти эрмитовых многообразий [1]. Поэтому всякий результат о геометрии почти эрмитовых многообразий любого класса имеет отношение и к келеровым многообразиям. Отметим, что геометрия почти эрмитовых многообразий, или эрмитова геометрия, — интенсивно развивающийся в наше время раздел дифференциальной геометрии. Этот раздел обладает несомненным богатейшим внутренним содержанием, а также имеет теснейшие связи как с другими разделами геометрии, так и с различными областями современной теоретической физики.

В данной статье рассмотрен вопрос о виде почти контактной метрической структуры на гиперповерхности келерова многообразия. Известен, и притом очень давно, тот факт, что на вполне геодезической гиперповерхности (т. е. на гиперповерхности с нулевым типовым числом) келерова многообразия индуцируется косимплектическая структура. Кто именно это установил первым, определить трудно. Из построений выдающегося американского геометра Блэра [2] этот факт следует так же непосредственно, как, например, из работ Л. В. Степановой [3, 4] и многих других авторов. Мы рассмотрим вопрос о почти контактной метрической структуре на гиперповерхности с типовым числом 1 (на 1-гиперповерхности) келерова многообразия. Оказывается, что и на 1-гиперповерхности келерова многообразия также индуцируется исключительно косимплектическая структура. Настоящая работа является продолжением исследований автора о почти контактных метрических структурах на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразиях. К данной заметке наиболее близки статьи [5, 6] о гиперповерхностях Сасаки и Кенмоцу специальных эрмитовых многообразий (т. е. многообразий класса W_3 в терминологии Грея — Хервеллы [1]).

1. Как известно [7], *почти эрмитовой* (almost Hermitian, AH-) *структурой* на четномерном многообразии M^{2n} называется пара $\{J, g = \langle\cdot, \cdot\rangle\}$, где J — почти комплексная структура, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика на этом многообразии. При этом J и $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ должны быть согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}).$$

Здесь $\mathfrak{X}(M^{2n})$ — модуль гладких (класса C^∞) векторных полей на многообразии M^{2n}. Многообразие с фиксированной на нем почти эрмитовой структурой называется *почти эрмитовым* (AH-) *многообразием.* С каждой AH-структурой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ на многообразии M^{2n} связано поле дважды ковариантного кососимметрического тензора (т. е. 2-формы), определяемого равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M^{2n}),$$

и называемого *фундаментальной* (или *келеровой*) *формой структуры.*

Пусть $(M^{2n}, \{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\})$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p, $\{J_p, g_p = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle\}$. Ортонормированные реперы, адаптированные к почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом:

$$(p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора структуры, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a} = a + n$. Хорошо известно [7], что матрицы римановой метрики g и фундаментальной формы F в A-репере принимают соответственно вид

$$(g_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (F_{kj}) = \begin{pmatrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Почти эрмитово многообразие называется *эрмитовым*, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и *келеровым*, если $\nabla F = 0$.

2. Напомним [2, 7, 8], что *почти контактной метрической структурой на многообразии* N называется система тензорных полей $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ на этом многообразии, для которой выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \eta\circ\Phi = 0, \quad \Phi^2 = -\operatorname{id} + \xi\otimes\eta,$$

$$\langle\Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N).$$

(Здесь Φ — поле тензора типа (1, 1) , ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\mathfrak{X}(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.)

Известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура, которую можно охарактеризовать тождеством

$$\nabla\eta = \nabla\Phi = 0,$$

где ∇ — риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ [7, 8]. Многообразия, наделенные такой структурой, локально эквивалентны произведению келерова многообразия на вещественную прямую [9].

Почти контактная метрическая структура индуцируется на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Многие специалисты отмечают, что именно этот факт определяет глубокую связь между контактной и эрмитовой геометриями. Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий исследовались и исследуются многими геометрами. Классическими считаются работы Сасаки, Голдберга, Блэра, Ишихары, Янамото и Яно. Например, работа Сасаки по данной тематике [10] содержит один из первых (если не первый!) примеров почти контактной метрической структуры.

3. Прежде чем привести основные результаты, напомним, что *типовым числом гиперповерхности риманова многообразия* называют ранг ее второй квадратичной формы [11].

Теорема 1. *Почти контактная метрическая структура на ориентируемой гиперповерхности с типовым числом* 1 *келерова многообразия является косимплектической структурой.*

Доказательство. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры (точнее, структурными уравнениями римановой связности присоединенной G-структуры, тотальное пространство которой состоит из модифицированных A-реперов) на ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} эрмитова многообразия M^{2n} [3, 12]:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^{\alpha\beta}_\gamma \omega^\gamma \wedge \omega_\beta + \big(\sqrt{2}B^{\alpha n}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta\big)\omega^\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_n + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta \wedge \omega,$$

$$d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta + B^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma \wedge \omega^\beta + \big(\sqrt{2}B^\beta_{\alpha n} - i\sigma^\beta_\alpha\big)\omega_\beta \wedge \omega + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^n_{\alpha\beta} - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta \wedge \omega,$$

$$d\omega = \big(\sqrt{2}B^{n\alpha}_\beta - \sqrt{2}B^\alpha_{n\beta} - 2i\sigma^\alpha_\beta\big)\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + \big(B^n_{n\beta} + i\sigma_{n\beta}\big)\omega \wedge \omega^\beta + \big(B^{n\beta}_n - i\sigma^\beta_n\big)\omega \wedge \omega_\beta,$$

где

$$B^{ab}_c = -\frac{i}{2}J^a_{\hat{b},c}, \quad B^c_{ab} = \frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}.$$

Здесь $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения ($\omega^n = \omega$), $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности, $\omega_\alpha = \omega^{\hat{\alpha}}$, а через $\{J^j_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J [7, 12]. Отметим, что системы функций $\{B^{ab}_c\}$ и $\{B^c_{ab}\}$ служат компонентами виртуальных тензоров Кириченко [13, 14] почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n-1$, $a, b, c = 1, \dots, n$, $\hat{a} = a + n$, σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в эрмитово многообразие M^{2n}.

Равенство типового числа гиперповерхности нулю или единице приводит к тому, что все элементы матрицы ее второй квадратичной формы (σ_{ps}), $p, s = 1, \dots, 2n-1$, кроме, возможно, σ_{nn}, также равны нулю, причем понятно, что если типовое число равно нулю, то матрица нулевая [5].

Принимая во внимание, что эрмитово многообразие келерово в том и только том случае [14], если все компоненты тензоров Кириченко обращаются в нуль:

$$B^{ab}_c = 0, \quad B^c_{ab} = 0, \tag{1}$$

можем переписать структурные уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n} в таком виде:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + i\sigma^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta}\omega_\beta \wedge \omega,$$

$$d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta - i\sigma_\alpha^\beta \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega,$$

$$d\omega = -i\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{n\beta}\omega \wedge \omega^\beta - i\sigma_n^\beta \omega \wedge \omega_\beta.$$

Наконец, учтем, что все элементы матрицы (σ_{ps}), кроме, возможно, σ_{nn}, также равны нулю. В результате получаем такие структурные уравнения:

$$d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad d\omega_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \quad d\omega = 0.$$

Так как эти уравнения задают косимплектическую структуру [7, 10, 15], теорема полностью доказана.

Замечание. Поскольку, как уже упоминали, класс келеровых многообразий содержится в любом из классов Грея — Хервеллы почти эрмитовых многообразий, можно было бы доказать теорему 1, взяв за отправную точку структурные уравнения почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия иного класса. Например, в [4] содержатся структурные уравнения почти контактной метрической структуры на гиперповерхности квазикелерова (quasi-Kählerian, QK-, или, в терминологии Грея — Хервеллы [1], $W_1 + W_2$) многообразия. Необходимые и достаточные условия в терминах тензоров Кириченко, аналогичные (1), при которых квазикелерово многообразие является келеровым, имеются в [14].

Как отмечалось выше, известно, что если типовое число гиперповерхности келерова многообразия равно нулю, то почти контактная метрическая структура на такой гиперповерхности косимплектическая. Отсюда вытекает более общее утверждение.

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура на ориентируемой гиперповерхности с типовым числом* 0 *или* 1 *келерова многообразия является косимплектической структурой.*

Отметим, что доказанные теоремы обобщают результаты, полученные ранее для почти контактных метрических гиперповерхностей 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав. У автора данной заметки более 40 опубликованных статей в этом направлении, в частности, работы [12, 15]. Как и в случае с работами [5, 6] о почти контактных метрических гиперповерхностях n-мерных почти эрмитовых многообразий, приведенные здесь результаты вначале были получены для случая гиперповерхностей 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли. Именно, используя методы исследования, разработанные для 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав замечательным отечественным специалистом В. Ф. Кириченко, а также построения Л. В. Степановой о почти контактных метрических гиперповерхностях эрмитовых многообразий, автор смог догадаться о приведенных выше результатах, а потом и доказать их.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за внимательное отношение к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. V. 123, N 4. P. 35–58.
2. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry // Lect. Notes Math. 1976. V. 509. P. 1–145.

3. *Степанова Л. В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Науч. тр. МПГУ им. В. И. Ленина. 1995. С. 187–191.
4. *Stepanova L. V., Banaru M. B.* On hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds // An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. 2001. V. 47, N 1. P. 65–70.
5. *Banaru M.* On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3-manifold // Saitama Math. J. 2002. V. 20. P. 1–7.
6. *Банару М. Б.* О гиперповерхностях Кенмоцу специальных эрмитовых многообразий // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 11–15.
7. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Изд. 2-е, доп. Одесса: Печатный дом, 2013.
8. *Blair D. E.* Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2002.
9. *Kiritchenko V. F.* Sur la gèomètrie des variètès approximativement cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1982. V. 295, N 12. P. 673–676.
10. *Sasaki S.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures // Tohoku Math. J. 1960. V. 12, N 3. P. 459–476.
11. *Kurihara H.* The type number on real hypersurfaces in a quaternionic space form // Tsukuba J. Math. 2000. V. 24. P. 127–132.
12. *Банару М. Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 8. С. 13–24.
13. *Abu-Saleem A., Banaru M.* Some applications of Kirichenko tensors // An. Univ. Oradea, Fasc. Mat. 2010. V. 17, N 2. P. 201–208.
14. *Banaru M.* On the Gray–Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire Univ. Sofia «St. Kl. Ohridski». Math. 2004. V. 95. P. 125–131.
15. *Банару М. Б.* О косимплектических гиперповерхностях 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 2003. Т. 494, № 7. С. 59–63.

Статья поступила 2 сентября 2013 г.

Банару Михаил Борисович
Смоленский гос. университет,
кафедра математики и информатики,
ул. Пржевальского, 4, Смоленск 214000
mihail.banaru@yahoo.com