Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2014. Том 55, № 5

УДК 517.98

ОБОБЩЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБРАХ

Б. Б. Тасоев

Аннотация. Построено функциональное исчисление в равномерно полных f-алгебрах с единицей для непрерывных центрозначных функций полиномиального роста и исследована связь с двойственностью Минковского.

Ключевые слова: векторная решетка, функциональное исчисление, двойственность Минковского.

Ю. Г. Решетняку к 85-летию

1. Введение

Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $x_1, \dots, x_N \in E$. Отображение, сопоставляющее числовым функциям их «значения» на фиксированном наборе векторов и являющееся гомоморфизмом рассматриваемой категории, называем *функциональным исчислением.* В [1] показано, что естественным образом определяется положительно однородная функция от элементов равномерно полной векторной решетки E, если эта функция определена на коническом множестве конечномерного пространства и непрерывна на некотором подконусе последнего. В [2] показано, что для функций φ со значениями в произвольной f-подалгебре идеального центра конструктивным образом можно определить $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$. Гомоморфизм $\varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, называемый *обобщенным функциональным исчислением*, служит обобщением аналогичных результатов из [1, 3–5]. Цель данной работы — построить функциональное исчисление в равномерно полных f-алгебрах с единицей для непрерывных функций полиномиального роста со значениями из идеального центра и исследовать связь с двойственностью Минковского.

2. Вспомогательные леммы и определение

В этом разделе построим функциональное исчисление в равномерно полных f-алгебрах с единицей для непрерывных функций полиномиального роста, принимающих свои значения из идеального центра. Все рассматриваемые векторные решетки предполагаются архимедовыми.

Определение 2.1. Пусть E — векторная решетка и Λ — f-алгебра. E называется *левым f-модулем над* Λ, если выполняются следующие условия:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00623–а).

(1) E является левым модулем над Λ относительно умножения $(\pi, x) \mapsto \pi \cdot x$ из $\Lambda \times E$ в E, т. е. $\pi \cdot (x + y) = \pi \cdot x + \pi \cdot y$, $(\pi + \rho) \cdot x = \pi \cdot x + \rho \cdot x$, $\pi \cdot (\rho \cdot x) = (\pi\rho) \cdot x$ и $\pi \cdot (\lambda x) = (\lambda\pi) \cdot x = \lambda(\pi \cdot x)$ для всех $\pi, \rho \in \Lambda$, $x, y \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;

(2) $\pi \cdot x \geq 0$ для всех $0 \leq \pi \in \Lambda$ и $0 \leq x \in E$;

(3) из того, что $x \perp y$, следует $\pi \cdot x \perp y$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x, y \in E$.

Правый f-модуль над Λ определяется аналогично. Пусть E — f-алгебра. Всякую f-подалгебру в E, являющуюся левым f-модулем над Λ, будем называть просто *f-модулем*. Приведем два примера f-модулей, встречающихся в данной работе. Пусть Λ — произвольная f-алгебра, K — некоторое подмножество в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим f-алгебру Λ^K всех функций из K в Λ с поточечными решеточными и алгебраическими операциями. В f-алгебре Λ^K можно ввести структуру f-модуля над Λ, полагая по определению $(\pi \cdot f)(t) := \pi \circ (f(t))$ для всех $\pi \in \Lambda$, $f \in \Lambda^K$ и $t \in K$, где $\circ$ — операция умножения в Λ. В качестве второго примера возьмем произвольную f-алгебру E и зафиксируем f-подалгебру Λ из идеального центра $\mathscr{Z}(E)$. Тогда E является f-модулем над Λ относительно умножения $(\pi, x) \mapsto \pi(x)$ из $\Lambda \times E$ в E. Ниже будем иметь дело с произвольной f-алгеброй E и фиксированной f-подалгеброй $\Lambda \subset \mathscr{Z}(E)$.

Всюду далее E — равномерно полная f-алгебра с мультипликативной единицей e, Λ — замкнутая по норме f-подалгебра в идеальном центре $\mathscr{Z}(E)$. Умножением в $\mathscr{Z}(E)$ является композиция операторов, обозначаемая символом $\circ$. Норма в $\mathscr{Z}(E)$ задается формулой

$$\|\pi\| := \inf\{\lambda > 0 : |\pi| \leq \lambda I\} \quad (\pi \in \Lambda),$$

где I — тождественный оператор на E. Предположим, что L — f-подмодуль в E. Обозначим через $\mathrm{H}(L)$ и $\mathrm{H}_m(\Lambda)$ соответственно множество всех $\mathbb{R}$-значных решеточных гомоморфизмов на L и множество всех $\mathbb{R}$-значных мультипликативных решеточных гомоморфизмов на Λ.

Лемма 2.1. *Для любого $\omega \in \mathrm{H}(L)$ существует единственный $\widetilde{\omega} \in \mathrm{H}_m(\Lambda)$ такой, что $\|\widetilde{\omega}\| = 1$, $\omega(\pi x) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. При этом $\widetilde{\lambda\omega} = \widetilde{\omega}$ для всех $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ и $\omega \in \mathrm{H}(L)$.*

Доказательство следует из [2, лемма 2.1]. $\square$

Пусть A — некоторое подмножество в E. Символом $\Lambda\langle\langle A\rangle\rangle$ будем обозначать f-подмодуль в E, порожденный множеством A. Введем следующие операции:

$$\operatorname{mul} A := \{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k : a_i \in A,\ 1 \leq i \leq k,\ k \in \mathbb{N}\},$$

$$\operatorname{lin}_\Lambda A := \left\{\sum_{i=1}^k \pi_i(a_i) : \pi_i \in \Lambda,\ a_i \in A, 1 \leq i \leq k,\ k \in \mathbb{N}\right\},$$

$$A^\vee := \left\{\bigvee_{i=1}^k a_i : a_i \in A,\ 1 \leq i \leq k,\ k \in \mathbb{N}\right\},$$

$$A^\wedge := \left\{\bigwedge_{i=1}^k a_i : a_i \in A,\ 1 \leq i \leq k,\ k \in \mathbb{N}\right\}, \quad A^{\vee\wedge} := (A^\vee)^\wedge,\ A^{\wedge\vee} := (A^\wedge)^\vee.$$

Лемма 2.2. *Пусть A — подмножество в f-алгебре E с мультипликативной единицей e. Тогда $\Lambda\langle\langle A\rangle\rangle$ совпадает с $(\operatorname{lin}_\Lambda \operatorname{mul} A)^{\vee\wedge} = (\operatorname{lin}_\Lambda \operatorname{mul} A)^{\wedge\vee}$.*

Доказательство. Ясно, что $L := \operatorname{lin}_\Lambda \operatorname{mul} A$ замкнуто относительно сложения и умножения на ортоморфизмы из Λ и, следовательно, является векторным пространством. Поэтому в силу [6, задача 5.4.3] $L^{\vee\wedge} = L^{\wedge\vee}$ является векторной решеткой. Покажем, что L замкнуто относительно умножения. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i(x_i)$ и $y = \sum\limits_{j=1}^{k} \rho_j(y_j) \in L$, где $\pi_i, \rho_j \in \Lambda$, $x_i, y_j \in \operatorname{mul} A$ $(1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k)$. Тогда в силу [7, теорема 2.64] справедливы равенства

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \rho_j(y_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \pi_i(e)x_i \cdot \rho_j(e)y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \pi_i \circ \rho_j(x_i y_j) \in L.$$

Следовательно, так как умножение на положительные элементы в произвольной f-алгебре — решеточный гомоморфизм, $L^{\vee\wedge}$ является f-подмодулем в E. $\square$

Пусть $x_1, \dots, x_N \in E$ не равны нулю одновременно и $\mathfrak{x} := \{e, x_1, \dots, x_N\}$. Символом $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathrm{m}}$ будем обозначать замыкание множества $\{(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)) \in \mathbb{R}^N : 0 \neq \omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle\mathfrak{x}\rangle\rangle)\}$. Предположим, что непустое замкнутое множество $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathrm{m}}$. Обозначим f-подмодуль непрерывных функций из K в Λ через $C(K, \Lambda) \subset \Lambda^K$.

Определение 2.2. Пусть E — равномерно полная f-алгебра с мультипликативной единицей e, $x_1, \dots, x_N, y \in E$, Λ — замкнутая по норме f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$. Предположим, что $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathrm{m}} \subset K$ и $\varphi \in C(K, \Lambda)$. Будем писать $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, если выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle)$.

Лемма 2.3. *Пусть $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ и L — некоторый f-подмодуль в E, содержащий $e, x_1, \dots, x_N, y$. Тогда $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$.*

Доказательство. Пусть $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$. Обозначим через ω' сужение ω на $\Lambda\langle\langle x_1 \dots, x_N, y, e\rangle\rangle$. В силу леммы 2.1 справедливы равенства $\widetilde{\omega}(\pi)\omega(e) = \omega(\pi e) = \omega'(\pi e) = \widetilde{\omega'}(\pi)\omega'(e) = \widetilde{\omega'}(\pi)\omega(e)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Из того, что $\omega(e) = 1$ для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$, следует $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega'}$. Таким образом,

$$\omega(y) = \omega'(y) = \widetilde{\omega'}(\varphi(\omega'(x_1), \dots, \omega'(x_N))) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))). \quad \square$$

Лемма 2.4. *Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность элементов f-алгебры E с мультипликативной единицей $e = x_1$. Обозначим через $L := \Lambda\langle\langle(x_n)_{n=1}^{\infty}\rangle\rangle$ f-подмодуль в E, порожденный последовательностью $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогда множество $\mathrm{H}_m(L)$ различает точки из L.*

Доказательство. В силу [7, теорема 2.64] E отождествима с порядково плотной f-подалгеброй в расширенном K-пространстве $C_\infty(Q)$ непрерывных действительных функций на компакте Q, принимающих бесконечные значения на нигде не плотных подмножествах в Q. При таком отождествлении единица $e \in E$ переходит в тождественную единицу на Q, а элементы из Λ представляются как операторы умножения на функции из $C(Q)$. В силу леммы 2.2 справедливо равенство $L = \big(\operatorname{lin}_\Lambda\big(\operatorname{mul}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}\big)\big)\big)^{\vee\wedge}$. Обозначим через F счетное объединение нигде не плотных подмножеств, на котором функции из последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ могут принимать бесконечные значения. Из последнего равенства следует, что всякая функция $y \in L$ принимает конечные значения на $G := Q \setminus F$. Следовательно, каждую точку $q \in G$ можно отождествить с мультипликативным гомоморфизмом $\hat{q}$ по формуле $\hat{q}(y) := y(q)$ для всех $y \in L$. Так как G плотно в Q, множество $G \subset \mathrm{H}_m(L)$ различает точки из L. $\square$

Лемма 2.5. *Существует не более одного элемента $y \in E$, удовлетворяющего условию $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторых $y, y_1 \in E$ выполняются $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ и $y_1 = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Введем обозначение $L := \Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y, y_1\rangle\rangle$. В силу леммы 2.3 справедливы равенства

$$\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = \omega(y_1)$$

для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$. Отсюда и из леммы 2.4 следует справедливость леммы. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть подмножество $G \subset \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle)$ различает точки из $\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle$. Если для всех $\omega \in G$ выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$, то $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$.*

Доказательство. Введем обозначения $L := \Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle$, $\Omega := \mathrm{H}_m(L)$, $u := e + |x_1| + \dots + |x_N| + |y|$. Снабдим Ω топологией поточечной сходимости, индуцируемой из $\mathbb{R}^L$. Как показано в доказательстве [3, лемма 4.3], подмножество G плотно в Ω. По условию леммы для всех $\omega \in G$ справедливо равенство

$$\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))). \tag{1}$$

Покажем, что равенство (1) выполняется для произвольного $\omega \in \Omega$. Возьмем сеть $(\omega_\alpha) \subset \Omega$, сходящуюся к ω. Тогда $\omega_\alpha(\pi x) \to \omega(\pi x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in L$. Ввиду того, что $\rho(u) > 0$ для всех $0 \neq \rho \in \Omega$, из леммы 2.1 следует $\widetilde{\omega}_\alpha(\pi) \to \widetilde{\omega}(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Полагая $\pi_0 := \varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))$, из непрерывности φ и леммы 2.1 имеем справедливость соотношений

$$\begin{aligned}
&|\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \dots, \omega_\alpha(x_N))) - \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))| \\
&\qquad \le |\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega_\alpha(x_1), \dots, \omega_\alpha(x_N))) - \widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))| \\
&\qquad\quad + |\widetilde{\omega}_\alpha(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) - \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))| \\
&\quad \le \|\varphi(\omega_\alpha(x_1), \dots, \omega_\alpha(x_N)) - \varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))\| + |\widetilde{\omega}_\alpha(\pi_0) - \widetilde{\omega}(\pi_0)| \to 0.
\end{aligned}$$

Получили, что $\omega_\alpha(y) \to \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. С другой стороны, по определению топологии на Ω верно $\omega_\alpha(y) \to \omega(y)$, поэтому $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \Omega$. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть f-подмодуль $L \subset E$ содержит элементы $e, x_1, \dots, x_N, y$ и $\mathrm{H}_m(L)$ разделяет точки из L. Если для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$ выполняется равенство $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$, то $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$.*

Доказательство. Пусть $L_1 := \Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle$ и $G := \{\omega|_{L_1} : \omega \in \mathrm{H}_m(L)\}$. Тогда по лемме 2.3 $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in G$ и G разделяет точки из L_1. Отсюда и из леммы 2.6 следует $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. $\square$

3. Основной результат

Сформулируем результат, в котором устанавливается гомоморфизм из некоторого подкласса в $C(K, \Lambda)$ в E. Образ этого гомоморфизма равномерно замкнут и конечно порожден.

Определение 3.1. Пусть E, F — некоторые f-модули над f-алгеброй Λ. Будем говорить, что решеточный мультипликативный гомоморфизм $h : E \to F$ Λ-*модульный*, если $h(\pi x) = \pi h(x)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $x \in E$.

Обозначим символом $\mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x})$ множество всех функций $\varphi \in C(K, \Lambda)$, для которых существует $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$. Через dt_i $(1 \le i \le N)$ будем обозначать функции из $C(K, \Lambda)$, действующие по закону $dt_i(t) = t_i I_E$, I_E — тождественный оператор на E, $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$. Также введем тождественную функцию $I : t \mapsto I_E$ $(t \in \mathbb{R}^N)$. Отметим, что $C(K, \Lambda)$ есть f-модуль над Λ.

Лемма 3.1. *Множество $\mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x})$ является I-равномерно замкнутым f-подмодулем в $C(K, \Lambda)$, а отображение $h : \mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x}) \ni \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$ из леммы 2.5 является Λ-модульным гомоморфизмом из $\mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x})$ в E таким, что $h(I) = e$, $h(dt_i) = x_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x})$, $y_1 = \varphi_1(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ и $y_2 = \varphi_2(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Положим $L := \Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y_1, y_2\rangle\rangle$. В силу леммы 2.3 для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$ выполняются равенства

$$\omega(y_1) = \widetilde{\omega}(\varphi_1(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))), \quad \omega(y_2) = \widetilde{\omega}(\varphi_2(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))).$$

Поэтому $\omega(y_1 + y_2) = \widetilde{\omega}[(\varphi_1 + \varphi_2)(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))]$ для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$. Отсюда и из лемм 2.4 и 2.7 следует, что $y_1 + y_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)(\cdot, x_1, \dots, x_N)$. Аналогично можно показать, что h выдерживает умножение и решеточные операции, а также справедливы равенства $h(I) = e$, $h(dt_i) = x_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$. Покажем, что $h(\pi \circ \varphi) = \pi(h(\varphi)))$ для всех $\pi \in \Lambda$. Действительно, полагая $y = \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, в силу леммы 2.1 имеем

$$\omega(\pi y) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(y) = \widetilde{\omega}(\pi)\widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) = \widetilde{\omega}(\pi \circ \varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$$

для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle)$. Следовательно, $\mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x})$ является f-подмодулем в $C(K, \Lambda)$, а h представляет собой Λ-модульный гомоморфизм.

Пусть последовательность $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из $\mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x})$ сходится с регулятором I к функции $\varphi \in C(K, \Lambda)$. Тогда $y_n := h(\varphi_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ будет r-фундаментальной последовательностью в E. В силу полноты E существует $y \in E$ такой, что $y_n \to y$. Пусть L обозначает f-подмодуль в E, порожденный мультипликативной единицей e, элементом y и последовательностью $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда для каждого $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$ выполняется $\omega(y_n) \to \omega(y)$. С другой стороны, по лемме 2.3 $\omega(y_n) = \widetilde{\omega}(\varphi_n(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$. Так как $\varphi_n \to \varphi$, то $\widetilde{\omega}(\varphi_n(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N))) \to \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$. Таким образом, $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(L)$. Осталось применить леммы 2.4 и 2.7. $\square$

Обозначим f-алгебру непрерывных функций $\varphi \in C(K, \Lambda)$ полиномиального роста через $\mathscr{B}(K, \Lambda)$, т. е. $\varphi \in \mathscr{B}(K, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда существуют показатель $n \in \mathbb{N}$ и число $M > 0$ такие, что $|\varphi| \le M(I + dt_1 + \dots + dt_N)^n$. Таким образом, $\varphi \in \mathscr{B}(K, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда $|\varphi(t)| \le M(1 + \|t\|)^n I_E$ для всех $t \in K \subset \mathbb{R}^N$, где $\|t\| = |t_1| + \dots + |t_N|$. Заметим, что $\mathscr{B}(K, \Lambda)$ является f-модулем над Λ. Структура f-модуля определяется формулой $\pi f(t) := \pi \circ (f(t))$ для всех $t \in K$, $\pi \in \Lambda$ и $f \in \mathscr{B}(K, \Lambda)$.

Лемма 3.2. *Пространство $\mathscr{B}(K, \Lambda)$ совпадает с I-равномерным замыканием f-подмодуля в $C(K, \Lambda)$, порожденного функциями $I, dt_1, \dots, dt_N$, т. е. $\mathscr{B}(K, \Lambda) = \overline{\Lambda\langle\langle I, dt_1, \dots, dt_N\rangle\rangle}$.*

Доказательство. По теореме Крейнов — Какутани существуют компакт Q и решеточный изоморфизм σ из Λ на $C(Q)$, при котором тождественный оператор $I_E \in \Lambda$ переходит в тождественную единицу $\mathbf{1}_Q$. В силу [7, теорема 2.58] σ мультипликативен. Обозначим через $\mathscr{B}(K \times Q)$ множество всех непрерывных функций $g : K \times Q \to \mathbb{R}$, для которых найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $M \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющие условию $|g(t,q)| \leq M(1 + \|t\|)^n$ для всех $(t,q) \in K \times Q$. Пространство $\mathscr{B}(K,\Lambda)$ отождествим с $\mathscr{B}(K \times Q)$, полагая по определению $\pi \circ \varphi(t,q) := \sigma(\pi)(q) \cdot \sigma(\varphi(t))(q)$ для всех $(t,q) \in K \times Q$, $\varphi \in \mathscr{B}(K,\Lambda)$ и $\pi \in \Lambda$. При таком отождествлении функция I переходит в тождественную единицу на $K \times Q$.

Положим $u := I + dt_1 + \dots + dt_N$ и $L := \overline{\Lambda\langle\langle I, dt_1, \dots, dt_N\rangle\rangle}$. Возьмем произвольную функцию $0 \leq \varphi \in \mathscr{B}(K \times Q)$. Тогда для подходящих $M, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\varphi \leq Mu^n$. Для доказательства леммы достаточно установить, что $g := M^{-1}\varphi u^{-n-1} \in L$. Пусть $C_0(K \times Q)$ — f-алгебра непрерывных функций на локально компактном пространстве $K \times Q$, исчезающих на бесконечности, т. е. $f \in C_0(K \times Q)$ тогда и только тогда, когда множество $\{(t,q) \in K \times Q : |f(t,q)| \geq \varepsilon\}$ компактно в $K \times Q$ для любого $\varepsilon > 0$. Заметим, что $g \in C_0(K \times Q)$. В силу [8, теорема 146.3] u^{-1}, $(u + dt_i)^{-1} \in C_0(K \times Q) \cap L$ для всех $1 \leq i \leq N$. Если покажем, что f-подалгебра $\mathscr{A} := \overline{\Lambda\langle\langle u^{-1}, (u + dt_1)^{-1}, \dots, (u + dt_N)^{-1}\rangle\rangle}$, содержащаяся в $C_0(K \times Q) \cap L$, различает точки из $K \times Q$, то соотношение $g \in \mathscr{A}$ будет следовать из [9, следствие V.8.3], и тем самым лемма будет доказана. Пусть $(t,q), (s,p) \in K \times Q$ и $(t,q) \neq (s,p)$. Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что $t = s$ и $p \neq q$. Тогда найдется $\pi \in \Lambda$ такой, что $\sigma(\pi)(p) \neq \sigma(\pi)(q)$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\pi \circ u^{-1}(t,q) &= \sigma(\pi)(q) \cdot \sigma(u^{-1}(t))(q) \\
&= \sigma(\pi)(q) \cdot (1 + \|t\|)^{-1} \neq \sigma(\pi)(p) \cdot (1 + \|s\|)^{-1} = \pi \circ u^{-1}(s,p).
\end{aligned}
$$

Предположим, что $t = (t_1, \dots, t_N) \neq s = (s_1, \dots, s_N)$. При этом если $\|t\| \neq \|s\|$, то $u^{-1}(t,q) = \sigma(u^{-1}(t))(q) = (1 + \|t\|)^{-1} \neq (1 + \|s\|)^{-1} = u^{-1}(s,p)$. Если же $\|t\| = \|s\|$, то для некоторого $1 \leq j \leq N$ будет выполняться $t_j \neq s_j$ и, следовательно, $(u + dt_j)^{-1}(t,q) = (1 + \|t\| + t_j)^{-1} \neq (1 + \|s\| + s_j)^{-1} = (u + dt_j)^{-1}(s,p)$. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть E — равномерно полная f-алгебра с мультипликативной единицей e, Λ — равномерно замкнутая f-подалгебра $\mathscr{Z}(E)$, $x_1, \dots, x_N \in E$ и $\mathfrak{x} := \{e, x_1, \dots, x_N\}$. Предположим, что замкнутое подмножество $K \subset \mathbb{R}^N$ содержит $\Lambda[\mathfrak{x}]_{\mathrm{m}}$. Тогда отображение $h : \varphi \mapsto \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ — единственный Λ-модульный гомоморфизм из $\mathscr{B}(K,\Lambda)$ в E такой, что $h(I) = e$ и $h(dt_i) = x_i$ $(1 \leq i \leq N)$. Более того, $h(\mathscr{B}(K,\Lambda))$ совпадает с равномерным замыканием f-подмодуля в E, порожденным элементами $e, x_1, \dots, x_N$, т. е. $h(\mathscr{B}(K,\Lambda)) = \overline{\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N\rangle\rangle}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x})$ обозначает множество всех функций $\varphi \in C(K,\Lambda)$, для которых существует $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$. Из лемм 3.1 и 3.2 следует справедливость соотношений $\mathscr{A}(\cdot, \mathfrak{x}) = \mathscr{B}(K,\Lambda)$ и $h(\mathscr{B}(K,\Lambda)) \subset \overline{\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N\rangle\rangle}$. Обратное включение вытекает из того, что $h(\mathscr{B}(K,\Lambda))$ содержит $e, x_1 \dots, x_N$, является f-модулем над Λ и равномерно полон в силу [10, теорема 59.3].

Покажем единственность h. Пусть $T : \mathscr{B}(K,\Lambda) \to E$ — Λ-модульный гомоморфизм такой, что $T(I) = e$ и $T(dt_i) = x_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда множество $F = \{\varphi \in \mathscr{B}(K,\Lambda) : h(\varphi) = T(\varphi)\}$ является равномерно замкнутым f-подмодулем в $\mathscr{B}(K,\Lambda)$, содержащим $I, dt_1, \dots, dt_N$. Отсюда в силу леммы 3.2 получим $h = T$. $\square$

Предложение 3.1. *Пусть E, F — равномерно полные f-модули над $\Lambda \subset \mathscr{Z}(E) \cap \mathscr{Z}(F)$ с мультипликативными единицами $e \in E$, $e' \in F$ и $T : E \to F$ — Λ-модульный гомоморфизм. Предположим, что $x_1, \dots, x_N \in E$, $\Lambda[e, x_1, \dots, x_N]_{\mathrm{m}} \subset K$ и $\varphi \in \mathscr{B}(K, \Lambda)$. Тогда $\Lambda[e', T(x_1), \dots, T(x_N)]_{\mathrm{m}} \subset \Lambda[e, x_1, \dots, x_N]_{\mathrm{m}}$ и справедливо равенство*

$$T(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) = \varphi(\cdot, T(x_1), \dots, T(x_N)). \tag{2}$$

Доказательство. Положим $y_i := T(x_i)$ $(i = 1, \dots, N)$. Пусть $0 \neq \omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e', y_1, \dots, y_N\rangle\rangle)$. Тогда $\overline{\omega} := \omega \circ T \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle x_1, \dots, x_N\rangle\rangle)$, поэтому

$$\Lambda[e', y_1, \dots, y_N]_{\mathrm{m}} \subset \Lambda[e, x_1, \dots, x_N]_{\mathrm{m}}.$$

Покажем, что $\widetilde{\omega}(\pi) = \widetilde{\overline{\omega}}(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$ и $0 \neq \omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e', y_1, \dots, y_N\rangle\rangle)$. В силу леммы 2.1 $\omega(\pi(Te)) = \widetilde{\omega}(\pi)\omega(Te) = \widetilde{\omega}(\pi)\overline{\omega}(e)$. С другой стороны, из Λ-модульности T следует, что

$$\omega(\pi(Te)) = \omega(T(\pi e)) = \overline{\omega}(\pi e) = \widetilde{\overline{\omega}}(\pi)\overline{\omega}(e).$$

Ввиду $\overline{\omega}(e) = 1$ получим

$$\widetilde{\omega}(\pi) = \widetilde{\overline{\omega}}(\pi) \quad (\pi \in \Lambda). \tag{3}$$

Положим $x := \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$, $y := \varphi(\cdot, y_1, \dots, y_N)$. Тогда в силу (3) справедливы равенства

$$\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(y_1), \dots, \omega(y_N))) = \widetilde{\overline{\omega}}(\varphi(\overline{\omega}(x_1), \dots, \overline{\omega}(x_N))) = \overline{\omega}(x) = \omega(Tx)$$

для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e', y, y_1, \dots, y_N\rangle\rangle)$. Ввиду леммы 2.4 получим $y = Tx$. $\square$

4. Метод огибающих

Пусть N — натуральное число, K — подмножество в $\mathbb{R}^N$, Q — компакт и $\mathbb{R}^Q$ — множество всех функций, действующих из Q в $\mathbb{R}$.

Определение 4.1. Функция $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *полунепрерывной снизу в точке* $t \in \mathbb{R}^N$, если выполняется равенство

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}(\inf\{f(s) : s \in \operatorname{dom} f, \|s - t\| \leq \varepsilon\}), \tag{4}$$

где $\operatorname{dom} f := \{t \in \mathbb{R}^N : f(t) < +\infty\}$. Если функция φ полунепрерывна снизу во всех точках из $\mathbb{R}^N$, то она называется *полунепрерывной снизу*.

Для всякой функции $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ существует наибольшая полунепрерывная снизу функция $\bar{f}$, называемая *замыканием функции* f, минорирующая f (см. [11]). Функция $\bar{f}$ определяется правой частью формулы (4).

Определение 4.2. Говорят, что оператор $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ *полунепрерывен снизу*, если для любого $q \in Q$ частичная функция $\varphi_q : s \mapsto \varphi(s)(q)$ из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу.

В конструкции вида $\mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ будем подразумевать отождествление $+\infty$ с функцией на Q, тождественно равной $+\infty$.

Определение 4.3. Оператор $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ называется *субаддитивным*, если выполняется условие $\varphi(s + t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$ для всех $s, t \in \mathbb{R}^N$.

Определение 4.4. Оператор $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ называется *положительно однородным*, если $\varphi(\lambda t) = \lambda\varphi(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^N$, $0 < \lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 4.5. Полунепрерывный снизу субаддитивный положительно однородный оператор $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ $(\varphi \neq +\infty)$ называется *сублинейным.*

Отметим, что для сублинейного оператора φ выполняется условие $\varphi(0) = 0$.

Определение 4.6. Оператор $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ $(\varphi \neq +\infty)$ называется *равностепенно непрерывным снизу*, если для каждого $\varepsilon > 0$ и $q_0 \in Q$ найдется окрестность $U(q_0)$ точки q_0 такая, что

$$\varphi(t)(q_0) - \varepsilon \le \varphi(t)(q) \tag{5}$$

при всех $t \in \operatorname{dom}\varphi := \{t \in \mathbb{R}^N : \varphi(t) \neq +\infty\}$, $\|t\| \le 1$ и $q \in U(q_0)$.

Для данного оператора $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ обозначим через $\overline{\varphi}$ замыкание его частичных функций, т. е. $\overline{\varphi}(t)(q) := \overline{\varphi_q}(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^N$ и $q \in Q$. Оператор $\overline{\varphi}$ будем называть *замыканием* φ. Из определения 4.2 следует, что $\overline{\varphi}$ полунепрерывен снизу.

Лемма 4.1. *Если субаддитивный положительно однородный оператор $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ равностепенно непрерывен снизу, то его замыкание $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^Q \cup \{+\infty\}$ есть равностепенно непрерывный снизу сублинейный оператор.*

Доказательство. Сублинейность $\overline{\varphi}$ следует из определения 4.1, а также из субаддитивности и положительной однородности φ. Покажем, что $\overline{\varphi}$ равностепенно непрерывен снизу. Ввиду положительной однородности φ для любых $\varepsilon, r > 0$ и $q_0 \in Q$ существует окрестность $U(q_0)$ точки q_0 такая, что

$$\varphi(t)(q_0) - \varepsilon \le \varphi(t)(q) \tag{6}$$

при всех $t \in \operatorname{dom}\varphi$, $\|t\| \le 1 + r$ и $q \in U(q_0)$. Следовательно, для всех $t \in \operatorname{dom}\overline{\varphi}$, $\|t\| \le 1$ и $q \in U(q_0)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \inf\{\varphi_{q_0}(s) : s \in \operatorname{dom}\varphi, \|s-t\| \le r\} - \varepsilon &= \inf\{\varphi(s)(q_0) - \varepsilon : s \in \operatorname{dom}\varphi, \|s-t\| \le r\} \\ &\le \inf\{\varphi(s)(q) : s \in \operatorname{dom}\varphi, \|s-t\| \le r\} \le \overline{\varphi_q}(t) = \overline{\varphi}(t)(q). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $t \in \operatorname{dom}\overline{\varphi}$, $\|t\| \le 1$ и $q \in U(q_0)$ справедливо неравенство $\overline{\varphi}(t)(q_0) - \varepsilon \le \overline{\varphi}(t)(q)$. $\square$

Для данного непустого множества $K \subset \mathbb{R}^N$ положим $K_h := \{(\lambda, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N : \lambda > 0,\ s \in \lambda K\}$. Возьмем функцию $\varphi : K \to C(Q)$, и пусть

$$\varphi_h(\lambda, s) := \lambda\varphi(s/\lambda)\ ((\lambda, s) \in K_h), \quad \varphi_h(\lambda, s) := +\infty\ ((\lambda, s) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \setminus K_h).$$

Функцию φ_h будем называть *преобразованием Хёрмандера* функции φ.

Лемма 4.2. *Преобразование Хёрмандера φ_h всякой непрерывной выпуклой функции $\varphi : K \to C(Q)$ является субаддитивным положительно однородным оператором из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ в $C(Q) \cup \{+\infty\}$, непрерывным на K_h.*

Доказательство следует из [12, предложение 3.1]. $\square$

Лемма 4.3. *Преобразование Хёрмандера φ_h всякой $\varphi \in \mathscr{B}(K, C(Q))$ равностепенно непрерывно снизу.*

Доказательство. Будем говорить, что функция $\varphi \in \mathscr{B}(K, C(Q))$ *вполне равностепенно непрерывна*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in Q$ найдется окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что

$$\varphi(s)(t_0) - \varepsilon \le \varphi(s)(t) \le \varphi(s)(t_0) + \varepsilon \tag{7}$$

для всех $s \in K$ и $t \in U(t_0)$. Функции $I, dt_1, \dots, dt_N$ вполне равностепенно непрерывны, поэтому в силу лемм 3.2 и 2.2 все функции из $\mathscr{B}(K, C(Q))$ также вполне равностепенно непрерывны.

Пусть $\varphi \in \mathscr{B}(K, C(Q))$, $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in Q$. Подберем окрестность $U(t_0)$ точки t_0 так, чтобы выполнялось условие (7) для всех $s \in K$ и $t \in U(t_0)$. Для произвольного $(\lambda, s) \in K_h$ такого, что $\|(\lambda, s)\| \leq 1$, верно $0 < \lambda \leq 1$. Поэтому справедливы соотношения

$$\varphi_h(\lambda, s)(t_0) - \varepsilon = \lambda\varphi(s/\lambda)(t_0) - \varepsilon \leq \lambda(\varphi(s/\lambda)(t) + \varepsilon) - \varepsilon \leq \varphi_h(\lambda, s)(t)$$

для всех $t \in U(t_0)$, $(\lambda, s) \in K_h$, $\|(\lambda, s)\| \leq 1$. $\square$

Определение 4.7. Оператор $A : \mathbb{R}^N \to \Lambda$ называют *аффинным*, если существуют линейный оператор $S : \mathbb{R}^N \to \Lambda$ и константа $\pi \in \Lambda$ такие, что $A(t) = S(t) + \pi$ для всех $t \in \mathbb{R}^N$.

Обозначим символом $A(\mathbb{R}^N, \Lambda)$ множество всех аффинных операторов из $\mathbb{R}^N$ в Λ, $L(\mathbb{R}^N, \Lambda)$ — множество всех линейных операторов из $\mathbb{R}^N$ в Λ. Наделим множество $A(\mathbb{R}^N, \Lambda)$ поточечными операциями, превратив его в векторное пространство.

Лемма 4.4. *Пространство $A(\mathbb{R}^N, \Lambda)$ линейно изоморфно Λ^{N+1}.*

Доказательство. Действительно, каждый аффинный оператор $A : t \mapsto S(t) + \pi$ $(t \in \mathbb{R}^N, S \in L(\mathbb{R}^N, \Lambda), \pi \in \Lambda)$ однозначно определяется парой $(S, \pi) \in L(\mathbb{R}^N, \Lambda) \times \Lambda$. В свою очередь, всякий линейный оператор $S \in L(\mathbb{R}^N, \Lambda)$ на конечномерном пространстве $\mathbb{R}^N$ однозначно определяется набором $\pi_1, \dots, \pi_N \in \Lambda$. Сопоставив оператору A набор $(\pi, \pi_1, \dots, \pi_N)$, получим требуемый изоморфизм. $\square$

Определение 4.8. Пусть K — выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^N$. Функция $\varphi : K \to \Lambda \cup \{+\infty\}$ называется *выпуклой*, если $\varphi(\alpha s + \beta t) \leq \alpha\varphi(s) + \beta\varphi(t)$ для всех $s, t \in K$ и $0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$. Функция $\varphi : K \to \Lambda \cup \{-\infty\}$ *вогнута*, если $-\varphi$ выпукла.

Для выпуклой (вогнутой) функции $\varphi : K \to \Lambda \cup \{+\infty\}$ $(\psi : K \to \Lambda \cup \{-\infty\})$ обозначим символом $\underline{\partial}^A\varphi$ $(\overline{\partial}^A\psi)$ множество всех аффинных операторов $A : \mathbb{R}^N \to \Lambda$, мажорируемых (минорируемых) оператором φ (ψ). Ввиду леммы 4.4 $\underline{\partial}^A\varphi$ и $\overline{\partial}^A\psi$ запишутся в виде

$$\underline{\partial}^A\varphi := \left\{(\pi_0, \dots, \pi_N) \in \Lambda^{N+1} : \pi_0 + \sum_{i=1}^N \pi_i t_i \leq \varphi(t)\ (t \in K)\right\},$$

$$\overline{\partial}^A\psi := \left\{(\pi_0, \dots, \pi_N) \in \Lambda^{N+1} : \pi_0 + \sum_{i=1}^N \pi_i t_i \geq \psi(t)\ (t \in K)\right\}.$$

Обозначим символом $\mathscr{B}_\vee(K, \Lambda)$ $(\mathscr{B}_\wedge(K, \Lambda))$ множество всех выпуклых (вогнутых) функций $\varphi \in \mathscr{B}(K, \Lambda)$.

Теорема 4.1. *Пусть K — выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^N$, $\varphi \in \mathscr{B}_\vee(K, C(Q))$. Тогда справедливо представление*

$$\varphi(t)(q) = \sup\left\{\pi_0(q) + \sum_{i=1}^N \pi_i(q)t_i : (\pi_0, \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}^A\varphi\right\} \tag{8}$$

для всех $t = (t_1, \dots, t_N) \in K$ *и* $q \in Q$.

Доказательство. Пусть φ_h — преобразование Хёрмандера функции $\varphi \in \mathscr{B}_\vee(K, C(Q))$. Тогда в силу лемм 4.2 и 4.3 φ_h субаддитивно, положительно однородно и равностепенно непрерывно снизу. Отсюда с учетом леммы 4.1 следует, что замыкание $\overline{\varphi_h}$ функции φ_h является сублинейным равностепенно непрерывным снизу оператором. Ввиду [11, гл. 1, § 8] справедливо представление

$$\overline{\varphi_h}(t)(q) = \sup\{S(t)(q) : S \in \underline{\partial}\overline{\varphi_h}\} \quad (t \in \mathbb{R}^{N+1},\ q \in Q), \tag{9}$$

где $\underline{\partial}\overline{\varphi_h}$ — множество всех линейных операторов из $\mathbb{R}^{N+1}$ в $C(Q)$, мажорируемых $\overline{\varphi_h}$. В силу леммы 4.2 $\overline{\varphi_h}(1, t_1, \dots, t_N) = \varphi_h(1, t_1, \dots, t_N) = \varphi(t_1, \dots, t_N)$ для всех $(1, t_1, \dots, t_N) \in K_h$. Поэтому справедливы соотношения $\underline{\partial}\overline{\varphi_h} \subset \underline{\partial}\varphi_h \subset \underline{\partial}^A\varphi$. Так как всякий линейный оператор $S : \mathbb{R}^{N+1} \to C(Q)$ однозначно определяется набором $(\pi_0, \dots, \pi_N) \in C(Q)^{N+1}$ по правилу

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N} \pi_i(q) t_i \quad (t = (t_0, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^{N+1}),$$

из формулы (9) следует справедливость представления (8). $\square$

Пусть Q — экстремальный компакт, $C_\infty(Q)$ — пространство непрерывных функций на Q, принимающих бесконечные значения на нигде не плотных подмножествах. Тогда, как известно, $C_\infty(Q)$ является расширенным K-пространством, а идеальный центр $\mathscr{Z}(C_\infty(Q))$ можно отождествить с $C(Q)$, рассматривая всякий элемент $\pi \in C(Q)$ как оператор умножения на π.

Лемма 4.5. *Пусть Q — экстремальный компакт, e — тождественная единица на Q, $x_1, \dots, x_N \in C_\infty(Q)$, Λ — f-подалгебра в $C(Q)$, K — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^N$, содержащее $\Lambda[\mathfrak{x}]_m$, и $\varphi \in \mathscr{B}(K, C(Q))$. Тогда существует котощее подмножество $Q_0 \subset Q$ такое, что $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)(q) = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q)$ для всех $q \in Q_0$.*

Доказательство. По теореме 3.1 существует единственный элемент $y := \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in C_\infty(Q)$ такой, что $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle)$. Из леммы 2.2 следует существование котощего множества $Q_0 \subset Q$, на котором все функции из $L := \Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle$ конечны. Поэтому всякий элемент $q \in Q_0$ можно отождествить с решеточным гомоморфизмом $\omega_q \in \mathrm{H}_m(L)$ по формуле $\omega_q(x) := x(q)$ $(x \in L)$. Из леммы 2.1 следует, что $\pi(q) = \pi(q)e(q) = \omega_q(\pi e) = \widetilde{\omega_q}(\pi)e(q) = \widetilde{\omega_q}(\pi)$ для всех $\pi \in \Lambda$. Отсюда и из определения $\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)$ получаем равенства

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)(q) &= \omega_q(\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N)) \\ &= \widetilde{\omega_q}(\varphi(\omega_q(x_1), \dots, \omega_q(x_N))) = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q) \text{ для всех } q \in Q_0. \quad \square\end{aligned}$$

Теорема 4.2. *Пусть E — равномерно полная f-алгебра с мультипликативной единицей e, Λ — замкнутая по норме f-подалгебра в $\mathscr{Z}(E)$, $x_1, \dots, x_N \in E$, $K \subset \mathbb{R}^N$ — выпуклое замкнутое подмножество, содержащее $\Lambda[\mathfrak{x}]_m$, $\varphi \in \mathscr{B}_\vee(K, \Lambda)$ и $\psi \in \mathscr{B}_\wedge(K, \Lambda)$. Тогда справедливы равенства*

$$\varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \sup\left\{\pi_0 e + \sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i : (\pi_0, \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}^A\varphi\right\},$$

$$\psi(\cdot, x_1, \dots, x_N) = \inf\left\{\pi_0 e + \sum_{i=1}^{N} \pi_i x_i : (\pi_0, \dots, \pi_N) \in \overline{\partial}^A\psi\right\}.$$

Доказательство. В силу теоремы 3.1 существует единственный элемент $y := \varphi(\cdot, x_1, \dots, x_N) \in E$ такой, что $\omega(y) = \widetilde{\omega}(\varphi(\omega(x_1), \dots, \omega(x_N)))$ для всех $\omega \in \mathrm{H}_m(\Lambda\langle\langle e, x_1, \dots, x_N, y\rangle\rangle)$. По той же теореме верно неравенство $y \geq \pi_0 e + \sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i x_i$ для любого набора $(\pi_0, \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}^A \varphi$, так как $(\pi_0, \dots, \pi_N) = \pi_0 I + \pi_1\, dt_1 + \dots + \pi_N\, dt_N$. Пусть $v \in E$ такой, что $v \geq \pi_0 e + \sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i x_i$ для всех $(\pi_0, \dots, \pi_N) \in \underline{\partial}^A \varphi$. Реализуем E как порядково плотную f-подалгебру в пространстве функций $C_\infty(Q)$ на экстремальном компакте Q. Тогда в силу [7, теорема 2.62] Λ можно рассматривать как f-подалгебру в $C(Q)$. Таким образом, $\varphi \in \mathscr{B}_\vee(K, C(Q))$. По лемме 4.5 существует котощее подмножество $Q_0 \subset Q$ такое, что для всех $q \in Q_0$ выполняются соотношения

$$y(q) = \varphi(x_1(q), \dots, x_N(q))(q), \quad v(q) \geq \pi_0(q) + \sum_{i=1}^{N} \pi_i(q) x_i(q). \tag{10}$$

Следовательно, в силу теоремы 4.1 для всех $q \in Q_0$ справедливо неравенство $v(q) \geq y(q)$. Так как всякое котощее подмножество в произвольном компакте всюду плотно, получим $v \geq y$. Таким образом, $v = y$, и доказана справедливость первой формулы.

Справедливость второй формулы следует из того, что если $\psi \in \mathscr{B}_\wedge(K, \Lambda)$, то $-\psi \in \mathscr{B}_\vee(K, \Lambda)$ и $\overline{\partial}^A \psi = \underline{\partial}^A(-\psi)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kusraev A. G.* Homogeneous functional calculus on vector lattices. Vladikavkaz: Inst. of Appl. Math. Informatics VSC RAS, 2008.
2. *Тасоев Б. Б.* Обобщенное функциональное исчисление в векторных решетках // Владикавк. мат. журн. 2013. Т. 15, № 3. С. 77–88.
3. *Buskes, G., de Pagter.B., van Rooij. A.* Functional calculus on Riesz spaces // Indag. Math. 1991. V. 4, N 2. P. 423–436.
4. *Haydon R., Levy M., Raynaud Y.* Randomly normed spaces. Paris: Hermann, 1991.
5. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. V. 2. Function spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1979.
6. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Problems in operators theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
7. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. New York: Acad. Press, 1985.
8. *Zaanen A. C.* Riesz spaces. Amsterdam etc.: North-Holland, 1983. V. 2.
9. *Conway J. B.* A course in functional analysis. New York: Springer-Verl., 1990.
10. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. Amsterdam; London: North-Holland, 1971. V. 1.
11. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976.
12. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Envelops and inequalities in vector lattices // Positivity. 2011. V. 15, N 4. P. 661–676.

Статья поступила 16 июля 2014 г.

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
tasoevbatradz@yandex.ru